Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

ӘОЖ 510.67 Қолжазба құқығында

**Жумабекова Галия Еркиновна**

**Рұқсат етілген байытулардағы йонсондық қосарлар**

8D05401-Математика

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

А.Р. Ешкеев

Шетелдік ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

Судоплатов С.В.

(Ресей)

Қазақстан Республикасы

Қарағанды, 2024

**МАЗМҰНЫ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР** ...................................... | 3 |
|  | **КІРІСПЕ**............................................................................................... | 4 |
| **1** | **БАЙЫТУДА РҰҚСАТТЫЛЫҒЫ БАР МҰРАЛЫ ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ КЕЙБІР МОДЕЛЬДІ ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ** ……………………………… | 20 |
| 1.1 | Кемел йонсондық теориялар мен йонсондық спектр....................... | 20 |
| 1.2 | Йонсондық стабильділік және оның кейбір жалпыламасы ............ | 26 |
| 1.3 | Рұқсаттылығы бар байыту туралы түсінік және централды тип .... | 28 |
| 1.4 | Бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің алғашқы және елеулі типтер геометриясындағы қатты минималды жиындар .......................................................................... | 32 |
| 1.5 | Йонсондық теорияның әлбеттілік қасиеттері ................................... | 35 |
| 1.6 | Йонсондық теориялардағы форкингтің аксиоматикалық түрде берілуі ................................................................................................... | 38 |
| **2** | **ЙОНСОНДЫҚ ҚОСАРЛАР ТУРАЛЫ ЖАЛПЫ МӘЛІМЕТ** . | 41 |
| 2.1 | Мұралы теориялар үшін йонсондық -стабильділік қасиеттері .... | 41 |
| 2.2 | Йонсондық семантикалық қосар........................................................ | 46 |
| 2.3 | Йонсондық шекті бүркеу қасиеті ...................................................... | 49 |
| 2.4 | Көп өлшемді емес йонсондық теориялар ......................................... | 51 |
|  | **ҚОРЫТЫНДЫ**................................................................................... | 58 |
|  | **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**.............................. | 61 |

**БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР**

|  |  |
| --- | --- |
|  | * сигнатура |
|  | * байытылған сигнатура |
|  | * тіл |
|  | * йонсондық теория |
|  | * үйлесімді енгізілу қасиеті |
|  | * амальгама қасиеті |
|  | * семантикалық модель |
|  | * йонсондық теорияның центрі |
|  | * теорияның барлық экзистенциалды тұйық модельдері |
|  | * косеманттылық қатынасы |
|  | * моделінің йонсондық спектрі |
|  | * бойынша моделінің йонсондық спектрінің фактор жиыны |
|  | * рұқсат етілген байыту |
|  | * байытуда рұқсаттылығы бар модулярлы йонсондық теория |
|  | * байытуда рұқсаттылығы бар мұралы йонсондық теория |
|  | * типтер |
|  | * аясындағы формулалары -ға тиісті барлық толық 1-типтер жиыны |
|  | * экзистенциалды тұйық қосар |
|  | * семантикалық қосар |

**КІРІСПЕ**

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы.** Қарастырылып отырған диссертациялық жұмыс математикалық логика бөліміне қарасты модельдер теориясына қатысты. Модельдер теориясы жеке ғылым ретінде өткен ғасырдың 50-ші жылдарында дамыды.Дж. Кейслер және Ч.Чэн сынды ғалымдар өздерінің «Модельдер теориясы» [1] атты атақты кітабында модельдер теориясы әмбебап алгебра мен математикалық логика арасындағы көпір деп айтып кеткен.

Модельдер теориясы – формальді тіл мен алгебралық жүйелердің (модельдердің) арасындағы байланысты оқытатын математиканың едәуір жас облысы. Модельдер теориясының негізін қалаған академик А.И. Мальцев пен американдық профессор А. Тарский. Уақыт өте келе математикалық логиканың өзіндік бөлімі болып саналатын модельдер теориясы формальді тілдің құрылуынан тәуелсіз әр түрлі бағытта тез дамыды (40 ж. соңы-50 ж басы), әсіресе математикалық тілдердің ішіндегі ең қарапайым болып табылатын - бірінші ретті тіл жылдам дамыды. Американдық математик Морлидің әлбетті теориялар туралы атақты Лось мәселесін шешкен жұмысы (1965 жылы жарияланған) бірінші ретті модельді тілдер теориясының дамуының алғашқы этапын бастады. Морлидің әдістемелік тұрғыда жаңашылдығы – элементтер қасиеттері үшін рангті негізгі түрде рангтердің трансфинитті индукцияны қолдана отырып әр түрлі формулалар, элементтер, модельдер туралы теоремаларды дәлелдеуі. Сонымен қоса, Морлидің тамаша идеясының бірі алдыңғы әдістің рангтерінің басқа түсінігінде қолданылатындығы, осы идеяның арқасында Шелах, Лахлан, және басқа авторлар бұрын орындалмайтын деген көптеген тапсырмаларды шешті. Олардың жұмыстарындағы типтің анықталуы мен бөлінуі, теорияның және рангтік функциялардың стабильділігі басты түсінік болып табылды.

Дж.Барвайздың редакциясымен шығарылған әйгілі «Математикалық логика бойынша анықтамалық кітап» кітабының «Модельдер теориясы» атты №1 томында [2] Америка Құрама Штаттарында модельдер теориясының екі басты негізін қалаушылар Альфред Тарский мен Абрахам Робинсонның географиялық тұрғылықты жеріне байланысты модельдер теориясын «шығыс» және «батыс» деп ерекшелеуге болатыны туралы ақпаратты табуға болады. Батыс теориясы Скулем мен Тарский еңбектерімен дамыды. Бұл жерде көбіне сандар теориясы, жиындар теориясына көңіл бөлінді және оған логиканың барлық бірінші ретті формуласы қолданды. Ал шығыс теориясы Мальцев пен Робинсон негізінде дамыды. Мұнда формулалары кванторлар болатын абстрактылы алгебра төңірегінде өрбіді. Сонымен қатар ол батыстағы модельдер теориясы толық теорияны, ал шығыстағы модельдер теориясы йонсондық теорияны зерттейтінін атап көрсеткен. Сонымен, осы екі бағыт арасындағы айырмашылықтан йонсондық теориялар «шығыс» теория модельдерінің негізгі мәселелі зерттеу нысаны екенін анық байқаймыз. Тарихи деректер бойынша, батыс модельдер теориясында шығыс модельдер теориясынан гөрі зерттеу аппараты көбірек дамыған. Және нәтижелері де бай деп айтуға болады. Ол бәрі таңқалатын нәрсе емес. Өйткені теориялар жалпы айтқанда, толық емес. Сонымен осы бәрін айтылған нәрсені қорытындыласақ, шығыс моделдер теориясының пайда болған нәтижелері батыс модельдер теориясынан гөрі жалпы жағдайдағы нәтижелері де есептердің қойылымдары есептелінеді.

Жалпы айтқанда, йонсондық теориялар толық емес теорияларға жатады және біраз алгебралар йонсондық теориялардың аксиомаларына қанағаттандырады. Келесі алгебралар йонсондық, олар: бекітілген сипаттама мен өрістер, группалар, абельдік группалар, сақинаның біраз түрлері, торлар, реттер, буль алгебралар және полигондар.

Сонымен, толық теориялардағы ұғымдар және оларға сәйкес нәтижелерді йонсондық теорияларға қатысты қайта анықтау толық теориялардағы модельді-теоретикалық атрибуттарды йонсондыққа көшіре салу емес, керісінше, жаңа пайда болған ұғымдар мен нәтижелерді ерекшелеп көрсету және ой жиегінен өткізу арқылы йонсондық теорияға да, толық теорияға да ортақ қасиеттерді табу, біздің көзқарасымыз бойынша, бұл – басты жетістіктің бірі. Қарап отырсақ, йонсондық теорияның осындай бір зерттеу тәсілі заманауи модельдер теориясына ашылған жарық есік десек артық айтпаймыз, және де бұл диссертациялық жұмысымыздың әрі қарай даму жолындағы негізгі түпкі түрткісі десек қателеспейміз.

Егер біз осы тақырыптың астарын еске түсірсек, келесі есімдерді және олардың классикалық модельдер теориясының осы саласын дамытуға қосқан іргелі үлесін атап өтуіміз керек: Б. Йонсон [3, 4], М. Морли және Р. Воота [5], А. Робинсон [6], Г. Черлин [7], Т.Г. Мұстафин [8].

Әрі қарай, бұл тақырып модельдер теориясымен айналысып келген көптеген мамандардың назарында болғанын байқауға болады. Атап айтсақ, К.Вуд [9], Ю.Л. Ершов [10], Б. Йонсон [11], Г. Кейслер [12], П. Линдстрём [13], А. Макинтайр [14, 15], М. Морли [16], Дж. Сакс [17]. Одан кейін Т.Г. Мұстафиннің шәкірті А.Р. Ешкеев және оның шәкірттері осы саладағы зерттеулерді жалғастырды, барлық әдебиеттерді тізбектемесе де түсінікті шығар, себебі барлық йонсондық теорияларға тиесілі басылымдарды жатқызуға болады.

**Тақырыптың қазіргі жағдайы мен өзектілігі.** Йонсондық теориялардың өзінің мәні бойынша индуктивті теориялар класының нақты ішкі класы, жалпы айтқанда, толық емес екенін ескеруіміз қажет. Яғни, йонсондық теорияларды «батыс» модельдер теориясы зерттейтін толық теорияларға қатысты зерттеуде, әрине, толық емес болғандықтан, толық теориялар арсеналынан алынған ұғымдар мен нәтижелерді пайдалана алмаймыз. Осыған байланысты, толық теориялардағы ұғымдар мен нәтижелерді сәйкесінше қайта анықтау және аналогтарын табу есебі өзекті, әрі қызықты, бірақ сонымен бірге айтарлықтай күрделі есеп болып табылады.

Диссертациялық жұмысымның өзектілігі, сонымен қатар, әмбебап йонсондық алгебраның (яғни, йонсон шарттарын қанағаттандыратын) модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеумен байланысты. Йонсондық теория толық емес теория болғандықтан, толық теория сияқты зерттелу техникасы дамымаған, сондықтан толық емес теория үшін алынған кез келген нәтиже жаңашылықтың белгісі болып табылады. Модельдер теориясы жағынан йонсондық теориялар кейінгі кезде пайда болған бағыт және нәтижелері классикалық теория модельден әрқашанда жалпылама болып есептелінеді. Бекітілген йонсондық теорияның тілін байытуға бағытталған сұрақтардың шешімін іздеу йонсондық теориялардың мәселелерімен байланысты. Берілген йонсондық теорияың сигнатурасын бір орынды предикатпен байытқанда бұл теорияның йонсондық қасиетінің сақталмайтындығын көрсететін мысалдар бар екені белгілі.

Мұралы йонсондық теорияның сипаттамасын беру мәселесі әлі де шешімін таппаған мәселе болып табылады. Бұл мәселенің өзектілігін келесі маңызды контр-мысал растайды: алгебралық тұйық өрістің элементарлы теориясы бір орынды предикатпен байытқаннан кейін йонсондық теория болмайды. Осыған байланысты, предикатпен байытуда централды типтердің модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу мұралы йонсондық теорияларды сипаттау үшін маңызды модельді-теоретикалық есеп болып табылады.

Диссертациялық жұмыста мұрагерлік ұғымының модельді-теориялық қасиеттерін зерттеу есебі централды типтер көмегімен теорияларда ғана емес, сонымен қатар спектрлерде де қарастырылады. Йонсондық спектр ұғымы өзінің экзистенциалды тұйық модельдерінің барлық кластарының синтаксистік және семантикалық инварианттарын құрайды. Берілген спектрдің косемантикалық класын зерттеуге өту арқылы бір және сол семантикалық модельге ие йонсондық теорияларды зерттеуді бастаймыз. Ұсынылып отырған жұмыста спектр тілінің рұқсаттылығы бар байытуында мұрагерлік қасиеті осы спектр үшін сақталады ма деген мәселе туындайды, сондықтан осы есепті теория үшін шеше отырып спектр үшін одан да күрделі сұрақты қарастыра аламыз.

Сонымен қатар, жұмыстағы тағы бір өзекті, зерттеуіміздің бастамасы десек те болатын йонсондық семантикалық қосардың қасиеттерін айқындау еді. Осыған дейін элементарлы қосарлардың толық екенін біліп келдік. Енді осы қосарларды рұқсаттылығы бар байытуда қарастырсақ, толықтығын сақтайды ма немесе йонсондық теория бола ма деген сұрақтың жауабын алатын боламыз.

**Жұмыстың негізгі мақсаты мен ғылыми жаңалығы**

**Зерттеудің негізгі мақсаты.** Диссертациялық зерттеудің негізгі мақсаты – байытуда рұқсаттылығы бар берілген мұралы йонсондық теориялардың, қосарлардың сондай ақ спектрлердің централды типтерінің синтактистік және семантикалық қасиеттерін сипаттау. Біз стабильділікті байыту нұсқасында типтердің анықталғандығын сақтайтын тілдің байытуда рұқсаттылығы бар сигнатурасында жұмыс жасаймыз. Еске түсіре кетсек, йонсондық теорияны мұралы деп атаймыз, егер ол бекітілген рұқсаттылығы бар байытуда йонсондық теория болып қалса, яғни теория йонсондылығын сақтаса. Теориялардың, фрагменттердің, спектрлер және олардың модель кластарының тұйықтық, толықтық, модельді толықтық, экзистенциалды жай, категорлылық, модельді үйлесімділік, модельді компаньон, экзистенциалды шекті бүркеу қасиеті, қатты минималдылық сияқты ұғымдарға қатысты синтаксистік және семантикалық қасиеттері сәйкес байытулардағы централды типтер тілінде зерттелетін болады.

**Зерттеу міндеттері:** Осы жұмыстың мазмұны мынадай есептерді зерттеу болып табылады: рұқсат етілген байытулардағы арнайы ішкі жиындардың фрагменттерінің кейбір модельді-теоретикалық қасиеттерін алу; модулярлы дөңес йонсондық және -сөйлемдер үшін толық теориялар үшін -әлбеттілік критерийін алу; рұқсат етілген байытулардағы бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялардың үшін кейбір модельді-теоретикалық қасиеттеріне қатысты нәтижесін алу; арнайы йонсондық геометрияны анықтайтын, тұйықталу операторы берілген семантикалық модельдердің арнайы ішкі жиындар аясында орбиталды типтер мен қатты минималды жиындардың қасиеттерін алу; йонсондық спектр үшін семантикалық қосарлардың эквиваленттілігінің критерийін алу; арнайы ішкі жиындар йонсондық мұралы теорияның централды типінің орбитасынан алынған жағдайда семантикалық модельдегі -қатты минималдық типтерге қатысты нәтижелерін алу; стабильді әрі мұралы теориялардың кейбір модельді-теоретикалық қасиеттерін алу; -стабильділік пен классикалық стабильділікті байланыстыратын стабильділіктің жалпыламасы йонсондық спектр үшін дәлелдеу; семантикалық қосар мен экзистенциалды шекті бүркеу қасиетінің стабильді кемел йонсондық спектр үшін негізгі қасиеттерді алу.

**Зерттеу объектісі.** Зерттеу нысаны байытуда рұқсаттылығы бар йонсондық теориялар, сонымен қатар, -стабильді әрі мұралы йонсондық теориялар мен олардың модельдер кластары болып табылады.

**Зерттеу әдістері.** Йонсондық теорияны оқу барысында зерттеудің ең маңызды құралына семантикалық әдіс жатады, яғни: йонсондық теория центрінің элементарлы қасиеті сол теорияның өзіне «тасымалданады». Сонымен қатар йонсондық теорияның семантикалық моделінің элементарлы теориясы аналогиялық түрде позитивті робинсондық теория, және йонсондық теорияның инварианты болады, барлық йонсондық теорияның сол семантикалық моделі өзара элементарлы эквивалентті. Соңғы уақытта физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ешкеев А.Р. бастаған Қарағанды модельдер теориясы мектебі йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа әдістеріне қол жеткізді және олардың бірегейі – бұл рұқсаттылығы бар байытудағы централды типтердің жұмыс техникасын қолдану. Централды типтер әдісін қолданудың мәні - қарастырылып отырған теорияның тілін тұрақтылар және предикаттармен байыту. Және де толық емес теориялар жағдайында модельдер теориясының классикалық тәсілі жұмыс істемейді, сондықтан да диссертациялық жұмысты зерттеуде семантикалық тәсілі де қолданылды.

**Ғылыми жаңалығы.** Диссертациялық жұмыста стабильділікпен байланысты йонсондық теорияларды қарастырамыз. Осыған дейін элементарлы қосарлар толық екені дәлелденіп келді, әрі қарай жұмысымызды толық емес теория үшін, яғни йонсондық қосарларды рұқсат етілген байытуларда қарастырамыз.

**Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңыздылығы.** Бұл диссертациялық жұмыстың ғылыми және қолданбалы маңыздылығы модельдер теориясы мен әмбебап сияқты теоретикалық ғылымдарында, сонымен қатар математика мен информатиканың әртүрлі іргелес класстарының қосымшаларында қызығушылық тудырады. Мысалы, жасанды интелект әртүрлі пәндік салалардың онтологияларын ресімдеу міндеті деректер қорымен жұмыс істеуде өте маңызды.

**Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер.** Диссертациялық зерттеудің келесі негізгі нәтижелері қорғауға ұсынылады:

1) рұқсат етілген байытулардағы арнайы ішкі жиындардың фрагменттерінің кейбір модельді-теоретикалық қасиеттері алынды;

2) модулярлы дөңес йонсондық және -сөйлемдер үшін толық теориялар үшін -әлбеттілік критерийі алынды;

3) рұқсат етілген байытулардағы бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялардың үшін кейбір модельді-теоретикалық қасиеттеріне қатысты нәтиже алынды;

4) арнайы йонсондық геометрияны анықтайтын, тұйықталу операторы берілген семантикалық модельдердің арнайы ішкі жиындар аясында орбиталды типтер мен қатты минималды жиындардың қасиеттері алынды;

5) йонсондық спектр үшін семантикалық қосарлардың косеманттылығының критерийі алынды;

6) арнайы ішкі жиындар йонсондық мұралы теорияның централды типінің орбитасынан алынған жағдайда семантикалық модельдегі -қатты минималдық типтерге қатысты нәтижелер алынды;

7) стабильді әрі мұралы теориялардың кейбір модельді-теоретикалық қасиеттері алынды;

8) -стабильділік пен классикалық стабильділікті байланыстыратын стабильділіктің жалпыламасы йонсондық спектр үшін дәлелденді;

9) семантикалық қосар мен экзистенциалды шекті бүркеу қасиетінің стабильді кемел йонсондық спектр үшін негізгі қасиеттері алынды.

**Сенімділік пен негізділік.** Жұмыста қолданылған әдістердің конструктивтілігі зерттеудің сенімділігі мен негізділігін қамтамасыз етеді. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде құрылған және олардың дәлелдеулері берілген.

**Жұмысты апробациялау.** Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда баяндалып, талқыланды:

− Logic Colloquium 2023: European Summer Meeting of the Association for Stmbolic Logic (ASL) (5-9 маусым 2023 ж., Милан университеті, Милан қ., Италия);

− 16th Asian Logic Conference (17-21 маусым 2019 ж., Назарбаев университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан Республикасы);

− Мальцев оқулары халықаралық конференциясы (19-22 қараша 2018 ж., Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей)

− Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (3-5 сәуір 2019 ж., Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

− Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (6-8 сәуір 2022 ж., Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

− Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (16-19 және 22 сәуір 2024 ж., Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан Республикасы);

− «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференциясы (16-19 қазан 2019 ж., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан Республикасы);

− «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (12–13 маусым, 2019 ж., Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды қ., Қазақстан Республикасы).

− Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің Қолданбалы математика семинары («Математикалық логика» лабораториясы).

**Жарияланымдар.**

*Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланым:*

1. Model-theoretic properties of semantic pairs and e.f.c.p. in Jonsson spectrum // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. -№4(112). – P.185-193.

*Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғарғы білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдардағы жарияланымдар:*

1. Companions of fragments in admissible enrichments // Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. – 2018. -№4(92). – P.105-111.

2. Рұқсаттығы бар байытулардағы йонсондық теориялардың категорлылығы // Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. – 2019. - №2(66). – 40–46 б.

3. The -minimal sets in the hereditary theories // Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. – 2019. -№2(94). – P.92-98.

*Халықаралық конференциялар материалдарындағы жарияланымдар:*

1. Некоторые свойства допустимого обогащения йонсоновских теорий // Мальцев оқулары халықаралық конференциясы (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, – 2018. -Б. 194).

2. Enrichment of hybrids // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: Математика және математикалық модельдеу институты, – 2019.

– Б 24-25).

3. Свойства категоричности и стабильности гибридов для наследственных теорий // «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференциясы (Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, – 2019. – Б. 175-176 ).

4. -қатты минималды анықталған жиындардың қасиеттері // Профессор Рамазанов Мұрат Ыбырайұлының 70 жылдық мерейтойына орайластырылған «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды: академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, – 2019. – Б. 10).

5. Strongly minimal central types of the class  which has essential geometric base // 16th Asian Logic Conference (Нұр-Сұлтан: Назарбаев университеті, – 2019. – Б. 40-41).

6. Теория -прекрасных пар в допустимом обогащении // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: Математика және математикалық модельдеу институты, – 2022. – Б 29-30).

7. The central type of a semantic pair // Logic Colloquium 2023: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (Милан: Милан университеті, – 2023. – Б. 184).

8. Свойства немультиразмерности для класса семантических пар // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: Математика және математикалық модельдеу институты, – 2024. – Б 222).

Диссертацияның негізгі нәтижелері 12 жұмыста жарияланды: 1 мақала – Scopus базасында индекстелетін журналда [18], 3 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда [19-21] және 8 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды [22-29].

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда бірлескен авторлардың әрқайсысының үлесі тең болып табылады.

**Диссертация құрылымы.** 64 беттен тұратын диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, екі бөлім, қорытынды, пайдаланылған дереккөздер тізімі. Анықтамалар мен тұжырымдардың нөмірленуі үш индекстен тұрады: бірінші индекс – бөлім нөмірі, екіншісі – параграф нөмірі, үшінші – осы параграфтағы анықтаманың немесе тұжырымның меншікті нөмірі.

**Жұмыстың қысқаша мазмұны.** Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында байытуда рұқсаттылығы бар мұралы йонсондық теориялардың кейбір модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылады. Сонымен қатар, алатын нәтижелерімізге қажетті йонсондық теориялар және модельдер кластары туралы алғашқы деректер, анықтамалар және нәтижелер қарастырылған.

Осы бірінші тараудағы алғашқы параграфы «Кемел йонсондық теориялар мен йонсондық спектр» деп аталады және бұл параграфта зерттеу нәтижелерін алу үшін қажетті анықтамалар мен теоремалар баяндалған.

*Анықтама 1.1.1* [1, с. 80]. теориясы *йонсондық* деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. теориясы ең құрығанда бір шексіз модельге ие болса;

2. теориясы индуктивті, яғни теориясы -сөйлемдер жиынына эквивалентті болса;

3. теориясы үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса ;

4. теориясы амальгама қасиетіне ие болса .

*Анықтама 1.1.2* [2, p.196]*.* сигнатурасындағы алгебралық жүйелердің класы *йонсондық* деп аталады, егер ол қандай да бір кардиналында келесі Йонсон шарттарын қанағаттандырса:

1. класы мейлінше үлкен қуаттағы жүйелерді қамтиды (яғни, кез келген кардиналы үшін болатындай табылады);

2. класы абстрактылы;

3. егер болса, онда алгебралық жүйелері -ға изоморфты енгізілетіндей осы кластан табылады;

4. егер -изоморфизм және болса, онда , болатындай , изоморфизмі табылады;

5. класынан алынған алгебралық жүйелердің кез келген өспелі тізбесінің бірігуі қайтадан осы класына тиісті;

6µ. егер , --ның ішкі жиыны, болса, онда және болатындай , табылады.

*Анықтама 1.1.3* [30]*.* Айталық, болсын. – теориясының моделі болсын делік. Онда моделі теориясы үшін

--*әмбебап* болады, егер теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы әрбір моделі моделіне изоморфты енгізілсе;

--*біртекті* болады, егер теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы моделінің ішкі модельдері болатын және модельдері бойынша және моделінің моделінің ішкі моделі болатын кеңейтілуі үшін изоморфизмі бойынша теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы моделінің моделінің ішкі моделі болатын кеңейтілуі және изоморфизмін жалғастыратын изоморфизмі табылса.

теориясы үшін біртекті-әмбебап модель қуаттағы теориясы үшін -біртекті-әмбебап моделі болады, мұндағы .

*Анықтама 1.1.4* [30, p. 529]*.* йонсондық теориясының моделі теориясының *семантикалық моделі* деп аталады, егер ол - біртекті-әмбебап болса.

*Факт 1.1.1* [30, p. 529]. Әрбір йонсондық теориясы қуаты болатын -біртекті-әмбебап модельге ие болады. Керісінше, егер теориясы индуктивті, шексіз моделге және -біртекті-әмбебап модельге ие болса, онда теориясы йонсондық теория деп аталады.

*Факт 1.1.2* [30, p. 529].

1. Айталық, теориясы йонсондық болсын. теориясының -біртекті-әмбебап және екі моделі элементарлы эквивалентті болады.

2. Егер теориясында қуаты болатын -біртекті-әмбебап моделі табылса, онда ол изоморфизмге дейінгі дәлдіктегі жалғыз модель болады. Сонымен қатар, –біртекті моделі, яғни теориясының модельдері болып табылатын қуаты қуатынан қатаң түрде аз моделінің және ішкі модельдерінің арасындағы изоморфизм моделіндегі автоморфизмге дейін жалғасады.

*Анықтама 1.1.4* [30, p. 529]*.* йонсондық теориясының моделі теориясының *семантикалық моделі* деп аталады, егер ол -біртекті-әмбебап болса.

*Лемма 1.1.1* [31, с. 25]*.* йонсондық теориясының семантикалық моделі -*экзистенциалды тұйық* болып табылады.

*Анықтама 1.1.6* [31, с. 25]*.* йонсондық теориясының *семантикалық толықтыруы (центрі)* деп теориясының семантикалық моделінің элементарлы теориясын атаймыз, яғни .

*Анықтама 1.1.7* [31, с. 26]*.* йонсондық теориясы *кемел* деп аталады, егер теориясының әрбір семантикалық моделі теориясының -қаныққан моделі болса.

*Теорема* *1.1.1* [31, с. 27]. Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы кемел теория болады;

2. – теориясының модельді компаньоны.

*Анықтама 1.1.9* [31, с. 95]*.* теориясы *дөңес* деп аталады, егер кез келген моделі үшін және теориясының модельдері болып табылатын моделінің ішкі структураларының кез келген жиынтығы үшін қиылысуы теориясының моделі болса.

*Теорема 1.1.8* [31, с. 32]*.* Айталық, йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. модельді толық;

2. толық.

Айталық, – қандай да бір сигнатура, ал – сигнатурадағы барлық формулалар жиыны, басқаша айтсақ, осы сигнатураның тілі болсын. моделі сигнатурасындағы кез келген модель болсын, яғни . моделінің *йонсондық спектрі* деп мына жиынды айтамыз:

*Анықтама 1.1.13 (Т.Г.Мустафин)* [31, с. 40].теориясы теориясына косемантты дейміз, егер , яғни ортақ семантикалық модельге ие болса, мұндағы - теориясының семантикалық моделі, .

*Анықтама 1.1.14* [31, с. 41]*.* және модельдері *косемантты*  деп аталады, егер орындалатындай кез келген йонсондық теориясы үшін орындалатындай теориясымен косемантты теориясы табылса. Және керісінше орындалса.

*Анықтама 1.1.16* [32]*.*  класын *кемел* деп атаймыз (әрі қарай, ), егер әрбір класы кемел болып табылса, класы кемел деп аталады, егер қаныққан модель болса.

Әрі қарай, бұл тараудың келесі параграфы йонсондық стабильділік ұғымына арналады.

Айталық, – йонсондық теория, ал – теориясымен үйлесімді аясындағы әрбір шекті үшін алынатын барлық экзистенциалды -толық типтер жиыны.

*Анықтама 1.2.1* [31, с. 66]*.* йонсондық теориясын -стабильді дейміз, егер кез келген -экзистенциалды тұйық моделі және осы модельдің кез келген ішкі жиыныны үшін болса.

Ал төменгі нәтиже стабильділік ұғымын жалпылайды, яғни йонсондық спектр үшін анықтадық.

*Теорема 1.2.1* [18, p. 186]*.* Айталық, – кемел -толық йонсондық теория және болсын. – оның семантикалық моделі болсын, және моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделі, ал болсын. йонсондық класы --стабильді болады сонда тек сонда, егер йонсондық кластың центрі классикалық мағынада -стабильді болса.

Үшінші параграфта рұқсаттылығы бар байыту мен централдық тип туралы алғашқы түсініктер келтіріледі.

*Анықтама 1.3.1* [21, p. 93]*.* Айталық, теориясы йонсондық теориясының байытуы болсын, , - қандайда бір унарлы предикаттық символ, - тұрақты символ болсын. *рұқсат етілген* деп аталады, егер осы байытудағы кез келген -тип - стабильділік аясында анықталған болса, мұндағы - тілінің ішкі жиыны, ал -тип дегеніміз осы типтен алынған әрбір формула -ге тиісті болатынын білдіреді.

*Анықтама 1.3.2* [21, p. 93]. Йонсондық теория *мұралы* деп аталады, егер кез келген оның рұқсат етілген байытуында теория йонсондықты сақтаса.

Централды типті келесі алгоритм бойынша енгіземіз:

1. сигнатурасын байытамыз, яғни .

2. Соған сәйкес байытылған теорияны жазамыз , мұндағы дегеніміз символын интерпретациялау сигнатура тіліндегі экзистенциалды тұйық ішкі моделі болып табылатын фактыны айқындайтын шексіз сөйлемдер жиыны және бұл модель жиынының анықталған тұйықталуы болып табылады.

3. символының интерпретациясы сигнатурасындағы теңдеуінің шешімі болып табылады.

4. теориясының барлық толықтыруларын сигнатурасында қарастырамыз. теориясы йонсондық болғандықтан теориясы йонсондық теория болып табылады, сондықтан да оның центрі (Анықтама 1.1.6) көрсетілген теориясының толықтыруларының бірі болып табылады.

5. сигнатурасын сигнатурасына дейін шектейміз.

6. Шектеген жағдайда тұрақтысы жаңа сигнатураға тиісті болмайды.

7. Бірінші ретті логика заңы бойынша тұрақты символды кез келген айнымалыға ауыстырамыз, мысалы .

8. Осыдан теориясы рұқсаттылығы бар байытудағы толық 1-тип болып табылады және оны арқылы белгілейміз.

Әрі қарай, бұл тараудың келесі параграфы бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің алғашқы геометриясындағы қатты минималды жиындарға, сонымен қатар елеулі типтерінің геометриясына арналады.

*Анықтама 1.4*.*2* [33]*.*Егер йонсон алгеометриясы (алғашқы геометрия) деп аталса, онда йонсон тәуелсіз деп аталады, егер барлық , сонымен қатар -базис болады барлық үшін егер -тәуелсіз және болса.

*Теорема 1.4.1* [33, p. 90]*.* Айталық, -алгеометриясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті болады:

1) модулярлы болады.

2) Егер тұйық және құр емес жиын, және болса, онда орындалатындай табылады.

3) Егер тұйық және құр емес жиын, және болса, онда орындалатындай және табылады.

*Анықтама 1.4.6* [34].Айталық, болсын. жиыны жиынының -Йонсон *ішкі жиыны* деп атаймыз, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) жиыны -анықталған жиын болады (бұл алынған формулалардың шешімі жиынындағы шешімдері жиыны боатындығын білдіреді, мұндағы , яғни формулалар типі болады, мысалы және тағы басқалары);

2) , , мұндағы – жиынындағы алгеометрияны анықтайтын тұйықтау операторы (мысалы, немесе ).

Айталық, – аясындағы формулалары -ға тиісті барлық толық 1-типтер жиыны.

*,* болсын делік.

*Анықтама 1.4.7* [21, p. 93]. типі *елеулі* деп аталады, егер болатындай кез келген жиыны үшін теориясында тек жалғыз типі табылса, және типі типінің форкинг қылмайтын кеңейтілуі болады.

*Анықтама 1.4.8* [21, p. 93]. Айталық, , және , мұндағы теориясы мұралы йонсондық теория. қатынасы болатындай кез келген моделі үшін -да типінің жүзеге асырылуынан -да типінің жүзеге асырылуы шығатынын білдіреді. Ал қатынасы кез келген моделі үшін жиыны және қатынастарына ие болатынын білдіреді. жиынын арқылы, ал жиынын арқылы белгілейміз. деп жазамыз, егер болса. типтерін *тәуелсіз* деп атаймыз, егер кез келген моделі үшін не , не орындалмаса. Егер мен типтері тәуелсіз болса, онда осы типтердің кластары мен тәуелсіз.

*Анықтама 1.4.9* [21, p. 94]. жиыны үшін *база* деп аталады, егер:

1) үшін мен тәуелсіз болса;

2) кез келген және , үшін болатындай табылады.

теориясының базасы үшін де база болып табылады (егер ол бар болса). теориясының базасы елеулі деп аталады, егер кез келген үшін елеулі типі табылса.

йонсондық теориясындағы елеулі типтер базасын *геометриялық* деп атаймыз, егер келесі шарттар орындалса:

1. , мұндағы және – -геометрия.

2. Геометрия мағынасында қатты минималды централды типті тудыратын тәуелсіздік ұғымы – -геометрия тәуелсіздік ұғымымен сәйкес келеді (Қатты минималдылық, алғашқы геометрия және елеулі типтер базасын құрайтын централды типтер, сонымен семантикалық модельдің шешімі болатын централды типтердің орбитасы ұғымдары база ұғымының арасындағы сәйкестік).

*Анықтама 1.4.11* [21, p. 94]. Айталық, – теориясындағы экзистенциалды тұйық модель және алгебралық емес -формула болсын.

1. жиыны моделінде -минималды деп аталады, егер барлық -формулалар үшін қиылысуы жиынында не шекті не жиынының толықтауышында шекті болса.

2. -формуласы -қатты минималды деп аталады, егер формуласы моделінің барлық экзистенциалды кеңейтулерінде -минималды жиынды анықтаса.

3. -қатты минималды -формулалардан құрылған -дағы алгебралық емес типтер -қатты минималды деп аталады.

4. йонсондық теориясы -қатты минималды деп аталады, егер кез келген оның экзистенциалды тұйық моделі -қатты минималды болса.

*Теорема 1.4.4* [21, p. 96]. Кез келген , егер тіліндегі формула болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. – -қатты минималды жиын, мұндағы ;

2. әрбір экзистенциалды тұйықмоделі үшінжиынымоделінде-минималды жиын болады;

3. жиыны моделінде-минималды болады.

*Теорема 1.4.5* [21, p. 97]*.* Әрбір үшін , егер  – -қатты минималды алгебралық емес тип болса, онда – -қатты алгебралық емес типтер болады.

Бірінші тараудың бесінші параграфы йонсондық теорияның әлбеттілік қасиеттерін зерделейді.

*Теорема 1.5.1* [20, б. 44]*.* Айталық, модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті;

2. -әлбетті.

*Теорема 1.5.4* [20, б. 45]*.* Айталық, шарты орындалатын модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті,

2. -дан алынған кез келген саналымды модельдің -да алгебралық жай модельді кеңейтуі болады.

Келесі параграф йонсондық теориялар үшін форкингтің аксиоматикалық түрде берілуін қамтиды.

Айталық, – қандайда бір йонсондық теориясының қаныққан семантикалық моделінің барлық йонсондық ішкі жиындарының класы болсын (яғни, ∃-қаныққан дегеніміз экзистенциалды типтерге қатысты қаныққан дегенді білдіреді, ал ∃-тип берілген модельдің кез келген ішкі жиынында жүзеге асады). – барлық экзистенциалды типтер класы (толық болу шарт емес), қандай да бір бинарлық қатынас болсын. Келесі (йонсондық форкинг қылмайтын) құрайтын аксиомалар шартын жазайық:

*Аксиома 1*. Егер және — изоморфты енгізу болса, онда .

*Аксиома 2*. Егер және болса, онда .

*Аксиома 3*. Егер және болса, онда болады сонда тек сонда, егер және .

*Аксиома 4*. Егер , және , онда және болатындай табылады.

*Аксиома 5*. Егер , және болса, онда болатындай кардиналы табылады.

*Аксиома 6*. Кез келген және әрбір үшін кардиналы табылады, егер болса, онда және болатындай табылады.



*Аксиома 7*. Егер болса, онда .

*Теорема 1.6.2* [35]. Айталық теориясы -сөйлемдер үшін толық кемел йонсондық теория болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. қатынасы теориясына қатысты 1-7 аксиомаларын қанағаттандырады;

2. стабильді және барлық , үшін типі аясында форкинг қылмайды (С.Шеллахтың классикалық мағынасында [36]).

Диссертациялық жұмыстың екінші тарауы йонсондық қосарларды зерттеуге арналған.

Бұл тараудың бірінші параграфы мұралы теориялар үшін -стабильділік қасиеттерін зерттеуде алынған нәтижелер келтірілген.

*Анықтама 2.1.1* [37]. 1. Йонсондық теориясы йонсонды --стабильді (әрі қарай, --стабильді) деп аталады, егер қуаты -ден аспайтын кез келген жиыны үшін орындалса.

2. йонсондық теориясы ---стабильді деп аталады, егер қандай да бір үшін теориясы ---стабильді болса.

*Теорема 2.3.2* [37, с. 205]. – кемел -толық йонсондық теория болсын. Онда келесідей шарттар эквивалентті:

1) теориясының центрі --стабильді ([38] мағынасында);

2) теориясы ---стабильді.

*Теорема 2.3.4* [24, с. 175]*.* Айталық, *,*  теориялары бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялар болсын. . – теориясының семантикалық моделі, – теориясының семантикалық моделі, , , және болсын делік.

Егер теориясы --стабильді теория, ал теориясы ---стабильді теория болса, онда теориясы ---стабильді.

*Теорема 2.3.5* [24, с. 176]*.* Айталық, *,*  теориялары -әлбетті -толық теориялар болса, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - -әлбетті;

2) - -әлбетті;

3) - -әлбетті.

*Теорема 2.3.5* [23, p. 26]*.* Айталық, -йонсондық теория, , - теориясының семантикалық моделі, , , болсын. Егер *,*  теориялары -стабильді теориялар болса, онда – -стабильді болады.

Екінші параграф йонсондық семантикалық қосарлардың модельді-теоретикалық қасиеттері зерттеледі.

*Анықтама 2.2.1* [28, p. 184]*.* қосары экзистенциалды тұйық қосар деп аталады, егер моделі моделінің экзистенциалды тұйық моделі болса.

*Анықтама 2.2.2* [28, p. 184]*.* экзистенциалды тұйық қосары семантикалық қосар деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) моделі -қаныққан болады, мұндағы, -қаныққан экзистенциалды типтерге дейін шектелген дегенді білдіреді;

2) кез келген кортежі үшін мағынасында аясындағы әрбір -типі моделінде жүзеге асады.

*Теорема 2.2.2* [18, p. 189]*.*

болсын делік. класының йонсондық спектрін қарастырайық:

болсын. -толық және -стабильді класс, ал оның семантикалық моделі болсын делік. Ал, класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын. және семантикалық қосарлар ал, менәрқайсынан алынған кортеждер болсын. Ондаболады, егер олардың централды типтері класының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

Үшінші параграфында йонсондық спектрлерді зерттеу аясында йонсондық семантикалық қосарлар мен йонсондық экзистенциалды шекті бүркеу қасиеттері қарастырылады.

*Анықтама 2.4.2* [28, p. 184].

1) формуласы экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне ие болады (e.f.c.p.), егер айтарлықтай үлкен натурал саны үшін орындалатындай табылса, және әрбір үшін орындалса.

2) йонсондық теориясы экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (e.f.c.p.) ие болады, егер экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (e.f.c.p.) ие экзистенциалды формуласы табылса.

*Теорема 2.4.1* [18, p. 189]*.* Айталық, класы мұралы -толық кемел және --стабильді класс. болсын делік. Онда келесі шарттар эквивалентті:

*1.* класы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*;*

2. Кез келген *-*қаныққан модель семантикалық қосар болып табылады;

3*.*  модельдерінен алынған жәнекортеждері бірдей централды типке ие болады сонда тек сонда, егер мағынасындағы аясындағы типтері теориясының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

4. класындағы әрбір модель семантикалық қосарға изоморфты енгізілген.

*Теорема 2.3.2* [18, p. 189]. Егеркласы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмаса және *-*стабильді класс болса*,* ондакласы *--*стабильді және *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*.*

Екінші тараудың төртінші параграфы көп өлшемді емес йонсондық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттейді.

*Анықтама 2.4.2* [29, с. 222]. Айталық, типі аясындағы толық -тип, ал жиыны семантикалық жиынының ішкі йонсондық жиыны болсын. типін аясында -стационарлы деп атаймыз, егер

1) типі аясында форкинг қылмайтын болса;

2) типі аясында форкинг қылмайтын жалғыз қайшылықсыз кеңейтілуі бар болса.

*Анықтама 2.4.3* [29, с. 222]*.* 1) Егер , типтері аясындағы толық -тип болса, типі типіне әлсіз -ортогоналды деп аталады, сонда тек сонда, егер бірігуі аясындағы толық -тип болса.

2) Айталық, типі әрі -стационарлы тип және типі де -толық әрі -стационарлы тип болсын. Онда типі типіне -ортогональ болады, егер кез келген үшін орындалса, дегеніміз -қаныққан модельдің универсумы және типі типіне әлсіз -ортогоналды болады, мұндағы , типтері сәйкесінше аясындағы мен типтерінің -форкинг қылмайтын кеңейтулері.

*Анықтама 2.4.4* [29, с. 222]*.* Айталық, жиыны семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиыны болсын, мұндағы қандай да бір йонсондық теория болсын. -толық типі -көп өлшемді деп аталады, егер типі аясындағы қандайда бір толық -типке ортогоналды болса. Егер теориясы -көп өлшемді типке ие болса, онда теориясы -көп өлшемді теория деп аталады. Басқаша, теориясы -көп өлшемді емес деп аталады.

*Теорема 2.4.2* [29, с. 222]*.* Айталық,

болсын. -толық және -стабильді класс, ал оның семантикалық моделі болсын делік. Ал, класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) көп өлшемді емес (классикалық мағынада [36, p. 286]);

2) -көп өлшемді емес.

Автор есептің қойылуына және диссертацияның барлық кезеңдерінде берген құнды кеңестері мен көмектері үшін отандық ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ешкеев Айбат Рафхатовичке шын жүректен алғысын білдіреді. Сонымен қатар, шетелдік ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Судоплатов Сергей Владимировичке пайдалы кеңестері мен көрсеткен қолдауы үшін алғысын айтады.

**1. Байытуда рұқсаттылығы бар мұралы ЙОНСОНДЫҚ теориялардың модельді теоретикалық қасиеттері**

**1.1 Кемел йонсондық теориялар мен йонсондық спектр**

Кемел йонсондық теорияларды қарастырайық. Алдымен йонсондық теорияларға тоқталайық.

Бірінші ретті саналымды тіл берілсін.

*Анықтама 1.1.1* [1, с. 80]. теориясы йонсондық деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. теориясы ең құрығанда бір шексіз модельге ие болса;

2. теориясы индуктивті, яғни теориясы -сөйлемдер жиынына эквивалентті болса;

3. теориясы үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса ;

4. теориясы амальгама қасиетіне ие болса .

Қандай да бір сигнатурадағы алгебралық жүйенің йонсондық класын Йонсон өзінің [2, p.196] жұмысында келесі түрде анықтады:

*Анықтама 1.1.2.* сигнатурасындағы алгебралық жүйелердің класы йонсондық деп аталады, егер ол қандай да бір кардиналында келесі Йонсон шарттарын қанағаттандырса:

1. класы мейлінше үлкен қуаттағы жүйелерді қамтиды (яғни, кез келген кардиналы үшін болатындай табылады);

2. класы абстрактылы;

3. егер болса, онда алгебралық жүйелері -ға изоморфты енгізілетіндей осы кластан табылады;

4. егер -изоморфизм және болса, онда , болатындай , изоморфизмі табылады;

5. класынан алынған алгебралық жүйелердің кез келген өспелі тізбесінің бірігуі қайтадан осы класына тиісті;

6µ. егер , --ның ішкі жиыны, болса, онда және болатындай , табылады.

Семантикалық инвариант ретінде маңызды рөл атқаратын семантикалық модельді анықтайық. Мұндай модель кез келген йонсондық теориясы үшін әрқашан да табылады. Бастапқыда семантикалық модель ұғымы біртектіліктің басқа ұғымын ұйғарды, бірақ семантикалық модельдің бар болуын дәлелдеу үшін *ZF* жиындар теориясының аксиоматикасында қатаң жетімсіз кардиналдың бар болуы туралы аксиоманы қосу қажет болды. Бұл аксиоманы жою үшін семантикалық модельдің біртектілігінің анықтамасын қолайлы нұсқаға өзгерту қажет болды. Бұл [30, p. 529] жұмысында Е.Т. Мұстафин дәлелдеді. Сондай-ақ әмбебап модель ұғымы өзгермейді. Еске түсірейік:

Бірінші ретті саналымды тіліндегі теориясын қарастырайық.

*Анықтама 1.1.3* [30, p. 529]*.* Айталық, болсын. – теориясының моделі болсын делік. Онда моделі теориясы үшін

--әмбебап болады, егер теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы әрбір моделі моделіне изоморфты енгізілсе;

--біртекті болады, егер теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы моделінің ішкі модельдері болатын және модельдері бойынша және моделінің моделінің ішкі моделі болатын кеңейтілуі үшін изоморфизмі бойынша теориясының қуатынан қатаң аз қуаттағы моделінің моделінің ішкі моделі болатын кеңейтілуі және изоморфизмін жалғастыратын изоморфизмі табылса.

теориясы үшін біртекті-әмбебап модель қуаттағы теориясы үшін -біртекті-әмбебап моделі болады, мұндағы .

*Факт 1.1.1* [30, p. 529]. Әрбір йонсондық теориясы қуаты болатын -біртекті-әмбебап модельге ие болады. Керісінше, егер теориясы индуктивті, шексіз моделге және -біртекті-әмбебап модельге ие болса, онда теориясы йонсондық теория деп аталады.

*Факт 1.1.2* [30, p. 529].

1. Айталық, теориясы йонсондық болсын. теориясының -біртекті-әмбебап және екі моделі элементарлы эквивалентті болады.
2. Егер теориясында қуаты болатын -біртекті-әмбебап моделі табылса, онда ол изоморфизмге дейінгі дәлдіктегі жалғыз модель болады. Сонымен қатар, -біртекті моделі, яғни теориясының модельдері болып табылатын қуаты қуаттан қатаң түрде аз моделінің және ішкі модельдерінің арасындағы изоморфизм моделіндегі автоморфизмге дейін жалғасады.

Біртектілік пен әмбебаптылық анықтамалар аясындағы нәтижелердің дұрыстығына көз жеткізейік:

*Анықтама 1.1.4* [30, p. 529]*.* йонсондық теориясының моделі теориясының семантикалық моделі деп аталады, егер ол -біртекті-әмбебап болса.

Модельдер теориясындағы маңызды ұғым – экзистенциалды тұйық модельге тоқталайық.

Экзистенциалды тұйық модельдерді сипаттау индуктивті теорияларды зерттеудің қарқынды әрекеттерінің бірі болды. Осындай модельдерді сипаттайтын классикалық нәтижелерді [39, 40] көре аламыз. Және де осы жерден атап кететін жайт, А.Робинсон [41] экзистенциалды тұйық өрістер алгебралық тұйық және аксиоматизацияланатын класс құрайтынын алғаш рет байқады. Мұндай жағдайда алынған теориялардағы әрбір формула қандай да бір экзистенциалды формулаға тең болады.

*Анықтама 1.1.5* [31, с. 25]*.* теориясының кез келген моделі және моделінің ішінен тұрақтылармен алынған кез келген экзистенциалды формуласы үшін орындалса, яғни, моделі моделінің ішкі моделі және болатындай шарт орындалған жағдайда теориясының моделі -*экзистенциалды тұйық* деп аталады.

*Лемма 1.1.1* [31, с. 25]*.* йонсондық теориясының семантикалық моделі -экзистенциалды тұйық болып табылады.

*Дәлелдеуі.* Айталық, моделі қуатына ие болсын. Ал, дегеніміз қуатындағы моделінің кеңейтуі болсын делік (факт 1.1.1 бойынша анықталған). моделінің -әмбебаптылық күші бойынша моделі моделіне изоморфты енгізіледі. Айталық, және болсын, онда болады. Факт 1.1.2 бойынша және модельдері элементарлы эквивалентті. Онда . Сонымен, моделі -экзистенциалды тұйық болады.

*Теорема 1.1.1* [42, p. 363]. Айталық, бірінші ретті тіл және теориясы тілінің теориясы болсын. теориясы -ке ие және модельдері теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын. Онда -дің әрбір -сөйлемі -да ақиқат, сонымен бірге -да да ақиқат болады.

*Анықтама 1.1.6* [31, с. 25]*.* йонсондық теориясының семантикалық толықтыруы (центрі) деп теориясының семантикалық моделінің элементарлы теориясын атаймыз, яғни .

Осы ұғымға қатысты келесі лемма орындалады:

*Лемма 1.1.2* [37, с. 165]*.*Айталық, йонсондық теория, ал оның центрі болсын. Онда мен өзара модельді үйлесімді болады.

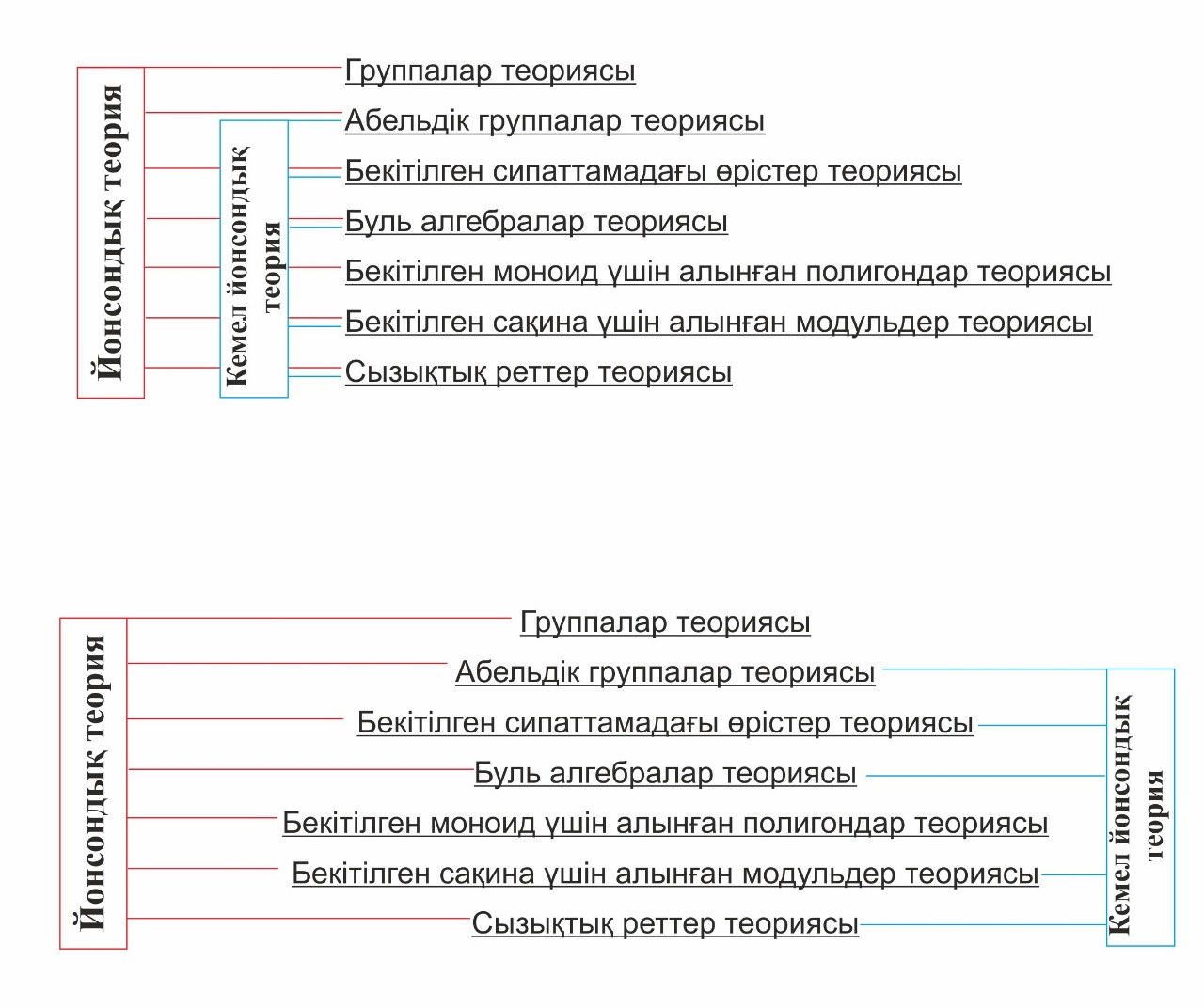
*Дәлелдеуі.* Айталық, йонсондық теория болсын, онда оның әрбір моделі теориясының семантикалық моделіне изоморфты енгізіледі, мұндағы . семантикалық моделі теориясының да моделі болып табылады. болғандықтан орындалады. Сондықтан теориясының әрбір моделі теориясының да моделі болып табылады. Осыдан мен өзара үйлесімділігі шығады.

*Факт 1.1.3* [37, с. 166]*.* Айталық, йонсондық теория болсын. Егер модельді толық және болса, онда теориясы үшін -біртекті-әмбебап модельдері -қаныққан болады; егер модельді толық емес болса, онда ешбір модель -қаныққан болмайды.

Кез келген индуктивті теория үшін экзистенциалды тұйық модельдер класы құр емес және йонсондық теориялардың класы индуктивті теориялардың ішкі класы болғандықтан, экзистенциалды тұйық модельдер класының жоғарыдағы сипаттамасын йонсондық теориялардың қосымша атрибуттарына байланысты нақтылауға болады. Осы факторлардың бірі – семантикалық модельдің өз қуатында қаныққан болуы. Мұндай қасиетке ие йонсондық теориялар кемел деп аталады. Осындай теориялардың ерекшеліктерімен танысып кетсек.

*Анықтама 1.1.7* [31, с. 26]*.* йонсондық теориясы *кемел* деп аталады, егер теориясының әрбір семантикалық моделі теориясының -қаныққан моделі болса.

Кез келген йонсондық теория кемел йонсондық теория болмайды, керісінше кез келген йонсондық теория кемел бола алады, оны төмендегі мысалдардан да анық көруге болады.

Сурет 1.1.1. Йонсондық теория мысалдары

Келесі теорема кемел йонсондық теориялардың критерийі болып табылады.

*Теорема* *1.1.2* [31, с. 27]. Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы кемел теория болады;

2. – теориясының модельді компаньоны.

Сонымен қатар келесіні анық байқауға болады:

Йонсондық теорияның кемелділігі модельді толық болғанға эквивалентті.

*Теорема 1.1.3* [37, с. 165]*.*Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы кемел теория болады;

2. – теориясының модельді компаньоны;

3.

4.

мұндағы, теориясының -экзистенциалды тұйық моделі, , – теориясының модельдерінің генеретикалық классы (Робинсонның шекті форсинг мағынасында).

Йонсондық теорияның компаньондары қасиеттерін зерттеуге кірісейік.

*Анықтама 1.1.8* [37, с. 165].Айталық, йонсондық теория болсын. йонсондық теориясының компаньоны деп, сол сигнатураға тиісті теориясын атаймыз, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. ;

2. кез келген йонсондық теория үшін, егер болса, онда болады;

3. .

*Теорема 1.1.4* [37, с. 164].Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы – кемел;

2. – -аксиоматизацияланған.

*Теорема 1.1.5* [37, с. 165].Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы – кемел;

2. .

*Теорема 1.1.6* [37, с. 165].Айталық, йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы – кемел;

2. – йонсондық теория;

3. – йонсондық теория;

4. – йонсондық теория, мұндағы .

5. – толық теория;

6. – толық теория.

мұндағы, – Кайзер қабықшасы (максималды теория, теориясымен өзара модельді үйлесімді),

*Лемма 1.1.4* [37, с. 165].Егер йонсондық теорияның компаньоны және теориясының модельді компаньоны болса, онда , мұндағы, – йонсондық теориясының модельді компаньоны.

*Лемма 1.1.5* [37, с. 166]*.*Айталық, және йонсондық теориялар болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1. және өзара модельді үйлесімді;

2. .

*Дәлелдеуі.* Егер және өзара модельді үйлесімді болса, онда . Осыдан теңдігі шығады. Керісінше, егер онда болады. Компаньонның анықтамасы бойынша, және болады. Сәйкесінше,. Онда, және өзара модельді үйлесімді.

*Лемма 1.1.6* [37, с. 166]*.*Айталық, және йонсондық теориялар болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. және өзара модельді үйлесімді;

2.;

3. ;

4. ;

5. .

*Анықтама 1.1.9* [31, с. 95]*.* теориясы *дөңес* деп аталады, егер кез келген моделі үшін және теориясының модельдері болып табылатын моделінің ішкі структураларының кез келген жиынтығы үшін қиылысуы теориясының моделі болса.

*Анықтама 1.1.10* [42]*.*

1. дегеніміз -дан алынған әрбір формуласы үшін, егер болса, онда болатынын білдіреді.

2. дегеніміз және білдіреді, яғни .

*Анықтама 1.1.11* [42, р. 293]. моделі теориясының -nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер моделі теориясының саналымды моделі болса және теориясының әрбір моделі үшін әрбір және барлық үшін егер орындалса, онда үшін орындалатындай қандай да бір табылады.

моделі теориясының -nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер моделі теориясының саналымды моделі болса және теориясының әрбір моделі үшін әрбір және барлық үшін егер орындалса, онда үшін орындалатындай қандай да бір табылады.

*Теорема 1.1.7* [42, р. 305]. Айталық, теориясы экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын және моделі теориясының саналымды моделі болсын. Онда және орындалады, мұндағы:

1. моделі -атомдық модель,

2. nice,

3. моделі экзистенциалды тұйық және -nice.

*Теорема 1.1.8* [42, р. 302]. Айталық, теориясы экзистенциалды сөйлемдер үшін толық болсын. Онда теориясының кез келген саналымды екі -атомдық моделі изоморфты болады.

*Теорема 1.1.9* [31, с. 32]*.* Айталық, йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. модельді толық;

2. толық.

Әрі қарай негізгі нәтижелерді қандай да бір бекітілген йонсондық спектр үшін қарастырамыз. Бұған дейін де йонсондық теориялар ұғымын жалпылайтын йонсондық спектрге қатысты біршама нәтижелер алынып келді.

Йонсондық спектр ұғымын алғаш рет Ешкеев А.Р. [43] енгізді.

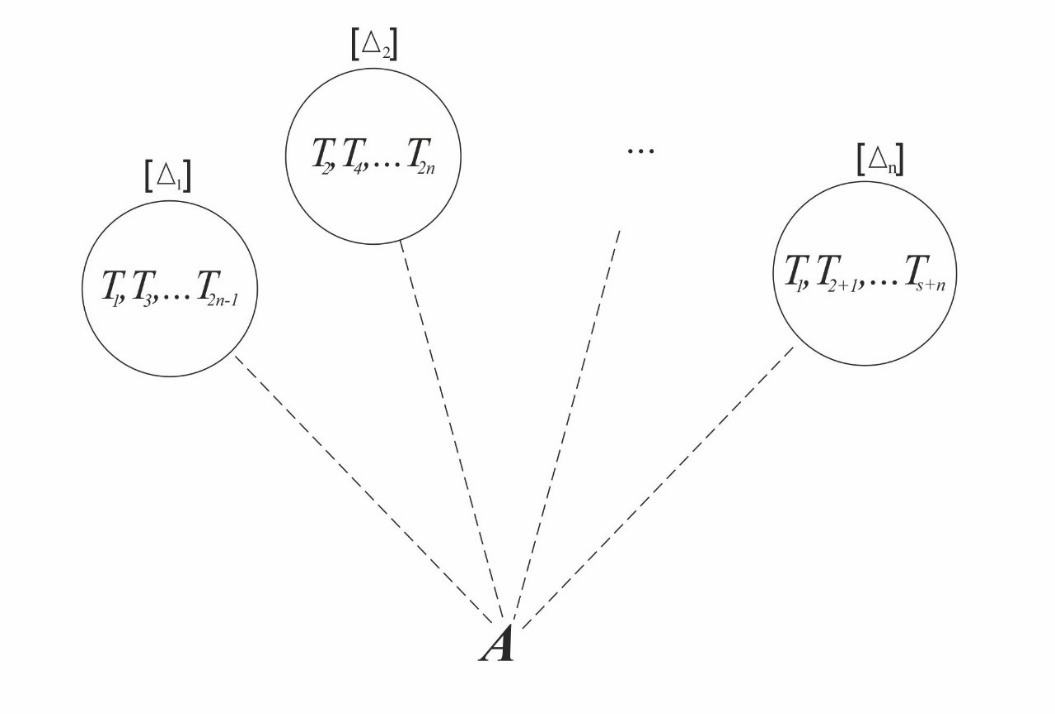
Айталық, – қандай да бір сигнатура, ал – сигнатурадағы барлық формулалар жиыны, басқаша айтсақ, осы сигнатураның тілі болсын. моделі сигнатурасындағы кез келген модель болсын, яғни . моделінің *йонсондық спектрі* деп мына жиынды айтамыз:

Жиындағы косеманттылық қатынасы эквиваленттілік қатынас болып табылады. Онда - моделінің йонсондық спектрінің қатынасы бойынша фактор жиыны болады (Сурет 1.1.2).

Сонымен - моделінің йонсондық спектрі, бұл ұғым арқылы йонсондық теориядағы модельдерді ажырата аламыз.

*Анықтама 1.1.12 (Т.Г.Мустафин)* [31, с. 40].теориясы теориясына косемантты дейміз, егер , яғни ортақ семантикалық моделге ие болса, мұндағы - теориясының семантикалық моделі, .

*Анықтама 1.1.13* [31, с. 41]*.* және модельдері косемантты деп аталады, егер орындалатындай кез келген йонсондық теориясы үшін орындалатындай теориясымен косемантты теориясы табылса. Және керісінше орындалса.



*Сурет 1.1.2. Йонсондық спектр*

*Анықтама 1.1.14* [39, с. 41]*.* және модельдерін йонсондық эквивалентті деп атаймыз, егер кез келген йонсондық теориясы үшін сонда тек сонда, егер . Белгіленуі: .

Кез келген және модельдері үшін, келесі орындалады:

Айталық*,*  болсын. Осы кластағы әрбір теориясы семантикалық моделіне ие болғандықтан, онда класының семантикалық моделін теориясының семантикалық моделі деп атаймыз: . йонсондық класының центрі элементарлы теориясы болады, йонсондық кластың семантикалық моделі болғандықтан, яғни кез келген үшін және орындалады. арқылы класының барлық тұйық модельдер класын белгілейміз. Байқасақ, болғандықтан ең болмағанда әрбір үшін теңдігін аламыз.

*Анықтама 1.1.16* [32, p. 166]*.*  класын кемел деп атаймыз (әрі қарай, ), егер әрбір класы кемел болып табылса, класы *кемел* деп аталады, егер қаныққан модель болса.

**1.2 Йонсондық стабильділік және оның кейбір жалпыламасы**

Қарап отырсақ, модельдер теориясындағы кез келген ұғым тек қажеттіліктен пайда болған. Сол сияқты С.Шелах тотальді трансцендентті теорияларды стабильді теорияларға дейін жалпылады [44]. Яғни, қандай да бір шексіз қуаты үшін теорияларда қуаттындағы параметрлер (кортеждер) жиыны аясындағы толық 1-типтер жиынының қуаты осы қуатынан аспайды. Стабильді теориялар үшін маңызды қасиеттердің бірі – типтердің анықталғандығы. Бұл дегеніміз кез келген модельдері және параметрлері -нен алынған кез келген формуласы үшін болатындай параметрлері -нен алынған формуласы табылатындығын білдіреді.

Айталық, – йонсондық теория, ал – теориясымен үйлесімді аясындағы әрбір шекті үшін алынатын барлық экзистенциалды -толық типтер жиыны болсын.

*Анықтама 1.2.1* [31, с. 66]*.* йонсондық теориясын -стабильді дейміз, егер кез келген -экзистенциалды тұйық моделі және осы модельдің кез келген ішкі жиыныны үшін орындалса.

Өз кезінде профессор А.Р.Ешкеев [35, с. 120] кемел йонсондық теориялар үшін -стабильділік пен классикалық стабильділік ұғымдарын байланыстыратын нәтижені алды.

*Теорема 1.2.1* [35, с.121]*.* Айталық, теориясы экзистенциалды сөйлемдер үшін толық кемел йонсондық теория болсын. онда келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -стабильді;

2) теориясының центрі, яғни теориясы -стабильді.

Ал төменгі нәтиже стабильділік ұғымын жалпылайды, яғни йонсондық спектр үшін анықтаймыз.

*Теорема 1.2.2* [18, p. 186]*.* Айталық, – кемел -толық йонсондық теория және болсын. – оның семантикалық моделі болсын, және моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделі, ал болсын. йонсондық класы -стабильді болады сонда тек сонда, егер йонсондық кластың центрі классикалық мағынада -стабильді болса.

*Дәлелдеуі.* Бұл жағдайда тек кемел йонсондық спектрімен жұмыс жасаймыз. Айталық, және – эквиваленттік класының дистрибутивті торлары, ал болсын.

йонсондық класын стабильді деп атаймыз, егер әрбір осы кластағы теория стабильді болса.

Егер болса, онда , мұндағы, және экзистенциалды формулалар торлары. Экзистенциалды сөйлемдер үшін толық класы дегеніміз, егер осы класындағы әрбір теория экзистенциалды сөйлемдер үшін толық болса, осыдан шығатыны . класы кемел, яғни 1.1.3 және 1.1.9 теоремалары бойынша модельді толық, орындалады сонда тек сонда, егер .

Айталық, йонсондық класы -стабильді болсын. Бұл класынан стабильді болатын теория табылса, онда анықтама бойынша әрбір моделі үшін әрбір ішкі жиыны үшін егер болса, онда орындалатынын білдіреді.

Йонсондық кластың центрі -стабильді емес деп тұжырымдайық. Онда табылады, 1.1.3 теоремасы бойынша болатындай табылады. Әрбір формуласы үшін, мұндағы , -ді және қасиеттерін қанағаттандыратын -ға алмастырайық. алмастырудан кейінгі болсын делік. Онда және . Бұл класының -стабильділігіне қарама-қайшы.

**1.3 Рұқсаттылығы бар байыту туралы түсінік және централды тип**

Енді рұқсаттылығы бар байытуларды қарастырайық. Байыту рұқсаттылығы бар байыту деп аталады, егер ол типтердің анықталатындығын кез келген экзистенциалды тұйық кеңейтілуде сақтаса. байытуы – рұқсаттылығы бар байыту.

Рұқсаттылығы бар байытуды стабильді теориялар үшін қарастырайық. Кез келген теориялар үшін стабильділік бар жағдайда кез келген тип анықталған болатыны белгілі.

Йонсондық теорияны байытқанда амальгама қасиеті сақталмайды, яғни йонсондық теория болмайды. Бұл жағдайдан шығудың екі жолы бар:

*Бірінші жолы – йонсондық теорияның модулярлы болуы.*

Бұл жағдайда йонсондық теорияның семантикалық моделінің ішкі жиынымен жұмыс жасаймыз. Мұнда , , ал болады. Көріп отырғанымыздай, алғашқы геометриямен жұмыс жасаймыз.

Сызықтық алгебраның көптеген іргелі ұғымдары — тұйықталу, тәуелсіздік, ішкі кеңістік, базис, өлшемділік — алғашқы геометрияның жалпы шеңберінде қолжетімді екені бәрімізге айқын. Йонсондық теория үшін де айтарлықтай маңызды орны бар. [33, p. 89-90] жұмысында йонсондық алғашқы геометрияның алғышарт ұғымдарына тоқталамыз, себебі зерттеу жұмысының нәтижелерінде, қатты минималды жиындармен жұмыс жасауда қолданылады.

*Анықтама 1.3*.*1.*Айталық, жиыны нақты анықталған йонсондық теорияның семантикалық моделінің *Jonsson* ішкі жиыны және операторы жиыны қуаттылығындағы оператор болсын. йонсон алгеометриясы (алғашқы геометриясы) деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

1. егер болса, онда ;

2. егер болса, онда ;

3. алмасу. , және болса, онда ;

4. шекті сипаттамасы. Егер және онда орындалатындай шекті табылады.

тұйық деп атаймыз, егер орындалса.

*Анықтама 1.3*.*2* [33, p. 90]*.*Егер йонсон алгеометриясы (алғашқы геометрия) деп аталса, онда йонсон тәуелсіз деп аталады, егер барлық , сонымен қатар -базис болады барлық үшін егер -тәуелсіз және болса.

*Лемма 1.3.1* [33, p. 90]*.* Егер -алгеометриясы болса, , және әрбір үшін -базис деп аталса, онда .

-ді -тің -өлшемділігі деп атаймыз, және жазамыз.

Егер болса, локализациясын қарастырамыз.

*Лемма 1.3.2* [33, p. 90]*.* Егер -алгеометриясы болса, онда да -алгеометрия болады.

*Анықтама 1.3.3* [33, p. 90]*.* -алгеометриясын -геометрия деп атаймыз, егер және барлық болса.

Егер -алгеометриясы болса, онда -геометриясын нақты түрде анықтай аламыз. Айталық, болсын. берілген қатынасын -де қарастырамыз сонда тек сонда егер . - эквиваленттік қатынас. Айталық, - болсын. тұйықтауын -да келесідей анықтаймыз: .

*Лемма 1.3.3.*Егер -алгеометриясы болса, онда -алгеометрия болады.

*Анықтама 1.3.4.*Айталық, – алгеометриясы болсын. тривиалды болады дейміз, егер кез келген үшін орындалса.

*Анықтама 1.3.5.* алгеометриясын модулярлы деп атаймыз, егер кез келген шекті-өлшемді тұйық үшін келесі теңдік орындалса:

Егер болса, онда теориясының Йонсон теориясы модулярлы деп аталады.

*Теорема 1.3.1* [33, p. 90]*.* Айталық, – алгеометриясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті болады:

1) модулярлы болады.

2) Егер тұйық және құр емес жиын, және болса, онда орындалатындай табылады.

3) Егер тұйық және құр емес жиын, және болса, онда орындалатындай және табылады.

*Анықтама 1.3.6* [34].Айталық, болсын. жиыны жиынының -Йонсон ішкі жиыны деп атаймыз, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) жиыны -анықталған жиын болады (бұл алынған формулалардың шешімі жиынындағы шешімдері жиыны болатындығын білдіреді, мұндағы , яғни формулалар типі болады, мысалы және тағы басқалары);

2) , , мұндағы - жиынындағы алгеометрияны анықтайтын тұйықтау операторы (мысалы, немесе ).

*Екінші жағдай – йонсондық теорияның мұралы болуы*

*Анықтама 1.3.7* [20, p. 93]. Айталық, - йонсондық теориясының байытуы болсын, , - қандайда бір унарлы предикаттық символ, - тұрақты символ болсын. рұқсат етілген деп аталады, егер осы байытудағы кез келген -тип - стабильділік аясында анықталған болса, мұндағы - тілінің ішкі жиыны, ал -тип дегеніміз осы типтен алынған әрбір формула -ге тиісті болатынын білдіреді.

Келесі анықтама ұғымның тек қажеттілігін көрсетеді, ал жеткілікті шарты осы күнге дейін анықталмаған. Анықтаманы берейік.

*Анықтама 1.3.8* [20, p.93]*.* Йонсондық теория мұралы деп аталады, егер кез келген оның рұқсат етілген байытуында теория йонсондықты сақтаса.

Әрі қарай рұқсаттылығы бар байытумен тығыз байланысты ұғымның біріне тоқталайық. «Централды тип» ұғымын алғаш рет 2008 жылы ф.-м.ғ.д., профессор Ешкеев А.Р. енгізді [45]. Централды типті келесі алгоритм бойынша енгіземіз:

1. сигнатурасын байытамыз, яғни .

2. Соған сәйкес байытылған теорияны жазамыз:

мұндағы дегеніміз символын интерпретациялау сигнатура тіліндегі экзистенциалды тұйық ішкі моделі болып табылатын фактыны айқындайтын шексіз сөйлемдер жиыны және бұл модель жиынының анықталған тұйықталуы болып табылады.

3. символының интерпретациясы сигнатурасындағы теңдеуінің шешімі болып табылады.

4. теориясының барлық толықтыруларын сигнатурасында қарастырамыз. теориясы йонсондық болғандықтан теориясы йонсондық теория болып табылады, сондықтан да оның центрі (Анықтама 1.1.6) көрсетілген теориясының толықтыруларының бірі болып табылады.

5. сигнатурасын сигнатурасына дейін шектейміз.

6. Шектеген жағдайда тұрақтысы жаңа сигнатураға тиісті болмайды.

7. Бірінші ретті логика заңы бойынша тұрақты символды кез келген айнымалыға ауыстырамыз, мысалы .

8. Осыдан теориясы рұқсаттылығы бар байытудағы толық 1-тип болып табылады және оны арқылы белгілейміз.

Централды типтерді енгізуде жасалған рұқсат етілген байытуды арқылы белгілейік.

Келесі кезекте централды типтер үшін орбиталды типтер ұғымын қолданамыз. Яғни, Т.Ғ. Мұстафин жұмысындағы орбиталды типтерді централды орбиталды типтер үшін қайта анықталған [34, с. 59]. Бұл жұмыста йонсондық теориялар үшін таза қосарлар тілінде нәтижелер алынған. таза қосарының тілінде кейбір маңызды модельді-теоретикалық ұғымының анықтамасын берейік, мұндағы – йонсондық теорияның семантикалық моделінің қандай да бір ішкі жиыны, ал – семантикалық модельдің автоморфизмдер группасы.

Айталық, – кез келген таза қосар, болсын.

1. . болатыны анық.

2. егер болса, онда . Егер болса, онда жазбасын қолданамыз. дегеніміз -тің орбитасы.

3. Егер болса, онда .

4. .

5. Бірдей ұзындықтағы шекті тізбектердің (кортеждердің) тізбегін аясында ажыратылмайтын деп атаймыз, егер:

а) барлық үшін ;

б) кез келген үшін индекстері болатындай тізбегі үшін , болатындай табылады.

6. Егер – индекстердің сызықтық реттелген жиыны болса, онда тізбегін аясында ажыратылмайтын деп атаймыз, егер болатындай кез келген үшін тізбегі аясында ажыратылмайтын тізбек болып табылса.

7. Бірдей ұзындықтағы тізбектер жиынын аясында ажыратылмайтын деп атаймыз, егер:

а) , болғанда;

б) болатындай кез келген үшін және кез келген биекциясы үшін болатындай табылады.

8. Егер , болса, онда аталады:

а) аясында ажыратылатын, егер орындалатындай табылады, бірақ , ;

б) аясында қатаң ажыратылатын, егер болатындай және кез келген үшін орындалатындай аясында осындай ажыратылмайтын шексіз тізбегі табылады;

в) аясында тармақталатын, егер болатындай табылса және кез келген үшін қатынасынан типі аясында қатаң ажыратылатын болса.

9. ішкі жиыны – қаныққан деп аталады, егер , .

10. таза қосарын – стабильді деп атаймыз, егер *.*

11. Айталық, болсын.

Индукция бойынша ранг функциясын анықтайық:

а) барлық үшін ;

б) егер – шектік ординал болса, онда болады сонда тек сонда, егер барлық үшін;

в) егер болса, онда болады сонда тек сонда, егер болса және және орындалатындай табылады;

г) ;

д) барлық ординалдары үшін .

12. Егер болса, онда теңдігі – қаныққан болатындай табылатынын білдіреді.

13. . Егер болса, онда .

14. Егер , , болса, онда .

15. аясында кортежі -дан туындалған тізбегін Морли тізбегі деп атаймыз, егер барлық үшін болса.

16. ортогональ дерлік деп атаймыз (белгіленуі ), егер .

17. ортогональ дерлік деп атаймыз (белгіленуі ), егер барлық үшін болса.

18. , ортогоналды деп аталады, егер .

19. , ортогоналды деп аталады (белгіленуі ), егер .

20. регулярлы деп аталады, егер .

**1.4 Бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің алғашқы және елеулі типтер геометриясындағы қатты минималды жиындар**

Айталық, – аясындағы формулалары -ға тиісті барлық толық 1-типтер жиыны.

*,* болсын делік.

*Анықтама 1.4.7* [21, p. 93]. типі елеулі деп аталады, егер болатындай кез келген жиыны үшін теориясында тек жалғыз типі табылса, және типі типінің форкинг қылмайтын кеңейтілуі болады.

*Анықтама 1.4.8* [21, p. 93]. Айталық, , және , мұндағы теориясы мұралы йонсондық теория. қатынасы болатындай кез келген моделі үшін -да типінің жүзеге асырылуынан -да типінің жүзеге асырылуы шығатынын білдіреді. Ал қатынасы кез келген моделі үшін жиыны және қатынастарына ие болатынын білдіреді. жиынын арқылы, ал жиынын арқылы белгілейміз. деп жазамыз, егер болса. типтерін тәуелсіз деп атаймыз, егер кез келген моделі үшін не , не орындалмаса. Егер мен типтері тәуелсіз болса, онда осы типтердің кластары мен тәуелсіз.

Келесі анықтама жоғарыда қарастырылған типтердің ішінде базис ұғымын береді.

*Анықтама 1.4.9* [21, p. 94]. жиыны үшін база деп аталады, егер:

1) үшін мен тәуелсіз болса;

2) кез келген және , үшін болатындай табылады.

теориясының базасы үшін де база болып табылады (егер ол бар болса). теориясының базасы елеулі деп аталады, егер кез келген үшін елеулі типі табылса.

йонсондық теориясындағы елеулі типтер базасын геометриялық деп атаймыз, егер келесі шарттар орындалса:

1. , мұндағы және – -геометрия.

2. Геометрия мағынасында қатты минималды централды типті тудыратын тәуелсіздік ұғымы – -геометрия тәуелсіздік ұғымымен сәйкес келеді (Қатты минималдылық, алғашқы геометрия және елеулі типтер базасын құрайтын централды типтер, сонымен семантикалық модельдің шешімі болатын централды типтердің орбитасы ұғымдары база ұғымының арасындағы сәйкестік).

Қатты минималдылық ұғымымен байланысты модельдер теориясының аппараты толық теориялар үшін жеткілікті түрде зерттелген. Сондықтан жаңағы айтылған аппараттардан қатты минималдылықпен байланысты ұғымдарды йонсондық теорияның семантикалық моделінің бекітілген формулалы ішкі жиындарына көшіре отырып, семантикалық модель өзінің қуаттылығында қаныққан, яғни қарастырылып отырған теория кемел болу керек деп шарт қоямыз.

*Анықтама 1.4.11* [21, p. 94]. Айталық, – теориясындағы экзистенциалды тұйық модель және алгебралық емес -формула болсын.

1. жиыны моделінде -минималды деп аталады, егер барлық -формулалар үшін қиылысуы жиынында не шекті не жиынының толықтауышында шекті болса.

2. -формуласы -қатты минималды деп аталады, егер формуласы моделінің барлық экзистенциалды кеңейтулерінде -минималды жиынды анықтаса.

3. -қатты минималды -формулалардан құрылған -дағы алгебралық емес типтер -қатты минималды деп аталады.

4. йонсондық теориясы -қатты минималды деп аталады, егер кез келген оның экзистенциалды тұйық моделі -қатты минималды болса.

Абелдік группалар және алгебралық тұйық өрістер (ACF) қатты минималды болады.

Қатты минималды теориялар саналымсыз әлбеттілікті анықтайды. *Т* теориясы қатты минималды болады, егер формуласы қатты минималды болса.

Әлбетте, қатты минималдылық анықталған биекцияда сақталады, егер *А* және *В* модельдерінде анықталған ішкі жиындар және анықталса, сәйкесінше сонымен *А* және *В* арасында анықталған өзара бір мәнді сәйкестік табылады, егер мен қатты минималды болса.

семантикалық моделінің -қатты минималды ішкі жиындарын ерекшелейтін қарастырылып отырған централды типтердің орбитасынан тұратын елеулі геометриялық базаны қарастырайық. Айталық, орбиталды централды типтер геометрия мағынасындағы базаны құрасын, мұндағы, , семантикалық моделінің -қатты минималды ішкі жиындарының тұйықтамасы. Осы жағдайлар негізінде келесі нәтижені аламыз:

Айталық, теориясы жоғарыдағы байытуындағы -толық мұралы теория, ал оның семантикалық моделі болсын және болсын делік.

*Теорема 1.4.4* Кез келген , егер тіліндегі формула болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. – -қатты минималды жиын, мұндағы ;

2. әрбір экзистенциалды тұйықмоделі үшінжиынымоделінде-минималды жиын болады;

3. жиыны моделінде-минималды болады.

*Дәлелдеуі.*  тривиалды екенін анықтамадан көруге болады.

. Алдымен моделі семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық моделі болатынын атап кеткен жөн. Бұл шартты дәлелдеу үшін семантикалық моделінің -қаныққан болатынын көрсету жеткілікті (-қаныққандылық дегеніміз -типтерге қатысты қаныққандылықты білдіреді). Теорема шарты бойынша жиыны моделінде-минималды болады, онда жиыны моделінде-қатты минималды болады. Сонымен қатар, теориясы кемел болғандықтан семантикалық моделі -қаныққан болатынын білеміз. Ал егер теориясы кемел болмаса, теориясы да кемел болмайды, бірақ жиыны моделінде-минималды болады, ол дегеніміз модельде -типтің саналымды санынан аспайды. Онда оның -саналымды моделі бар. Қарама-қарсы ұйғарайық, моделі семантикалық моделінің элементарлы кеңейтілуі болсын делік және және екеуі де шексіз болатындай параметрлері моделінен алынған формуласы табылады. (Бұл жерде әрбір модель семантикалық моделінің элементарлы ішкі структурасы болады деген ұйғарымнан уақытша бас тартамыз). Айталық, кортежі формуласының параметрлері болсын. Бұл жағдайда 1.4.3 теорема бойынша . Онда -қаныққан болғандықтан моделінде болатындай кортежі табылады. Бұл және шексіз болатынды білдіреді, ол жиынын -минималды болатынына қарама-қайшы келеді.

класын және (Кайзер қабықшасының аналогын) қарастырайық, мұндағы . Бұл теорияның йонсондық болатынын анық. Айталық, теориясы байытудағы Кайзер қабықшасының байытуы болсын. Онда оның центрі мен централды типі сәйкесінше мен . Және де барлық йонсондық теориялар ие болатын централды типтерді арқылы белгілейміз. Ал класының семантикалық моделінің элементарлы теориясы болсын, оны арқылы белгілейік, онда оның сәйкесінше байытуын, центрін және централды типін , және арқылы белгілейік. Сонымен, әрбір йонсондық теориясы үшін централды типтердің класын қарастыра аламыз, оны арқылы белгілейік. Сонымен қатар, мән беретін жайт, . Кемел йонсондық теориялар үшін бір кластағы йонсондық теориялардың централды типтері өзара тең болады. Осыған байланысты келесі нәтижені қарастырайық:

*Теорема 1.4.5.* Әрбір үшін , егер – -қатты минималды алгебралық емес тип болса, онда – -қатты алгебралық емес типтер болады.

*Дәлелдеуі.* Дәлелдеуі 1.4.4 теоремасынан шығады.

**1.5 Йонсондық теорияның әлбеттілік қасиеттері**

Жалпы модельдер теориясынан модельдің толықтығы мен ω-әлбеттілік ұғымдарын байланыстыратын Д.Сарациноның нәтижесі белгілі. Және де, Д.Сарацино теоремасы ω-әлбетті болып табылатын толық теориялар үшін модельді компаньон табылуы туралы теорема болып табылады. Сол теореманы еске түсірейік:

*Теорема 1.5.1* [2, с. 164]. Егер саналымды тіл және толық -әлбетті теория болса, онда теориясы –әлбетті модель компаньонына ие болады.

Айталық, теориясы бірінші ретті тілдегі сигнатурасындағы кез келген йонсондық теория болсын. Ал моделі теориясындағы семантикалық модель болсын. жиыны теориясындағы ішкі жиыны болсын делік, мұндағы , , сонымен қатар .

.

Қарастырылып отырған сөйлемдер жиыны йонсондық теория, жалпы айтқанда толық емес болатыны анық. Йонсондықтың болмауының себебі кейбір жағдайларда амальгаманың жоқ болуы, онда йонсондық теорияны предикатпен байытуының контр-мысалы табылады. Модулярлық жағдайда амальгама болады. Сондықтан келешекте қарастырылатын теориялар модулярлы болады. Айталық, йонсондық теориясының центрі және болсын, мұндағы теориясының семантикалық моделі.

Әрі қарай, жоғарыда көрсетілген йонсондық теория сигнатурасының байытуы аясында саналымды және саналымды емес әлбеттілік туралы нәтижелерді көрсетеміз. Байытусыз жай йонсондық теорияға қатысты ұқсас алғашқы нәтижелерді автордың [31, с. 53] жұмысынан көре аламыз.

*Теорема 1.5.2* [20, б. 44].Айталық, модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті;

2. -әлбетті.

*Дәлелдеуі.* . Айталық, -әлбетті болсын. Онда 1.5.1 теорема бойынша, -әлбетті болғандықтан оның модельді компаньоны бар болады. және , және модельді үйлесімділігі бойынша, теориясымен модельді үйлесімді, осыдан теориясының модельді компаньоны екені шығады, дербес жағдайда, модельді толық. модельді толықтығы бойынша тіліндегі кез келген формула қандайда бір экзистенциалды формулаға эквивалентті. Онда Робинсонның модельді компаньон жалғыздығы туралы теоремасы және йонсондық теория кемелдігінің критерийі бойынша орындалады. Яғни, -әлбетті болғандықтан, оның саналымды жалғыз моделі саналымды-қаныққан және -ға тиісті болады. Себебі, . 1.1.2-теорема бойынша және -да изоморфизмге дейінгі дәлдіктегі яғни -атомдық болатын жалғыз саналымды моделі бар болады. Осыдан, модельді толықтығы бойынша, моделі теориясының -атомдық моделі болады. Кез келген үшін теориясының -толықтылығы бойынша , мұндағы - бос айнымалыдан тұратын теориясындағы экзистенциалды формулалар торы. Онда моделі теориясындағы -атомдық модель болады. 1.1.4-теорема бойынша моделі nice модель. Айталық, , болсын. моделін теориясында -атомдық болатынын көрсетейік. Индукция бойынша дәлелденеді. теориясының -толықтылығы бойынша теориясы -толық, яғни (индукция базасы).

болсын деп ұйғарайық, мұндағы – моделінен моделіндегі изоморфты енгізуі. Бұл изоморфты енгізу келесідей жағдайда табылады, -атомдық болатын моделі алгебралық жай болып табылады, яғни теориясының кез келген моделіне изоморфты енгізіледі. Бұл жағдай [19, p.109] жұмысынан шығады. Сонымен, моделі теориясының nice моделі болып табылады және кез келген үшін орындалатындай табылады. Айталық, болсын. Осыдан, , яғни экзистенциалды формулаларға қатысты элементарлы кеңейтуі болып табылады. Осымен, моделі теориясының -атомдық моделі болатындығы шығады. Керісінше жағдайда, моделі -ға тиісті болғандықтан, моделі теориясының -атомдық моделі болмайды. Яғни осыдан (теорема 1.1.5) шығады. моделінің еріктілігінен теориясы -әлбеттілігі шығады.

. Айталық, теориясы -әлбетті болсын. теориясы -әлбетті болмасын деп ұйғарайық, онда теориясының изоморфты емес саналымды және модельдері табылады. Бірақ, болса, онда . Осыдан және модельдері тиесілі екендігі шығады. теориясының - әлбеттілігіне қарама қайшы келдік.

Келесі нәтиже 1.4.4. теореманы дәлелдеу үшін қолданылатын ұғымдарды анықтайық.

*Анықтама 1.5.1*[33, р. 292]. формуласы теориясына қатысты -формула деп аталады, егер және орындалатындай және экзистенциалды формулалар табылса.

*Анықтама 1.5.2* [33, р. 307]*.* теориясы шартын рұқсат етеді, егер теориясымен үйлесімді кез келген экзистенциалды формулалар үшін орындалатындай теориясымен үйлесімді формуласы табылса.

*Анықтама 1.5.3* [33, р. 312]. теориясының саналымды модель саналымды алгебралық әмбебап болады, егер оған берілген теорияның барлық саналымды модельдері изоморфты түрде енгізілсе.

*Теорема 1.5.3* [33, р. 315]*.* Айталық, теориясы саналымды алгебралық әмбебап моделі бар экзистенциалды сөйлемдер үшін толық әмбебап теория болсын. Онда теориясы -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие болады.

*Теорема 1.5.4* [33, р. 309]*.* Айталық, теориясы экзистенциалды сөйлемдер үшін толық шартын рұқсат ететін -теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. теориясы алгебралық жай модельге ие,
2. теориясы -атомдық модельге ие,
3. теориясы -атомдық модельге ие,
4. теориясы -nice алгебралық жай модельдерге ие,
5. теориясы жалғыз алгебралық жай модельдерге ие.

*Теорема 1.5.5* [20, б. 45]*.* Айталық, шарты орындалатын модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті,

2. -дан алынған кез келген саналымды модельдің -да алгебралық жай модельді кеңейтуі болады.

*Дәлелдеуі:* Егер -әлбетті болса, онда саналымсыз әлбеттілік туралы Морли теоремасы бойынша кемел болады. Онда йонсондық теориясының кемелділігінің критерийіне сәйкес теориясы модельді толық және . Егер теориясы модельді толық болса, онда кез келген изоморфты енгізу элементарлы болып табылады. теориясы толық теория болғандықтан, 1.2.8- теореманы қолданып, қалаған нәтижемізді аламыз.

. теориясындағы семантикалық моделі бойынша (-йонсондық теория болғандықтан бар болады), моделі -әмбебап модель болады. Оның қуаты, жалпы айтқанда, саналымдыдан үлкенірек, сондықтан оның саналымды элементар ішкі моделін қарастырамыз. экзистенциалды тұйық болғандықтан, оның элементар ішкі моделі де экзистенциалды тұйық болады. Бұдан шығатыны – саналымды алгебралық әмбебап модель. Осыдан, 1.1.7-теоремасынан теориясы алгебралық жай модельге ие болады.-ді индукция бойынша анықтаймыз, яғни және модельдерінің алгебралық жай кеңейтуі болады. Онда, айталық, болсын. және деп ұйғарайық. болатынын көрсету үшін -ны саналымды модельдер тізбегіне жіктейік. йонсондық теориясына сәйкес бұл тұжырымның орындалуын [10] жұмысынан көруге болады. Содан жиынын жиынына бейнелейтіні (-батуы) белгілі.  – теориясының кейбір моделі, ал – жалғыз ғана -алгебралық жай және шарт пен құрылымына қатысты позитивті экзистенциалды тұйық модель болғандықтан, онда саналымсыз қуатты бір ғана моделі бар, демек теориясының семантикалық моделі қанық, яғни – йонсондық теориясы кемел. Осыдан шығатыны . Сондықтан – -әлбетті.

**1.6 Йонсондық теориялардағы форкингтің аксиоматикалық түрде берілуі**

Стабильді теориялар үшін форкинг ұғымы басты назардағы ұғым болып есептелінеді. Сол себепті форкингті аксиоматикалық түрде сипаттаймыз. Форкингтің классикалық ұғымы Шелахқа тиесілі [36, p. 85].

*Анықтама 1.6.1* [36, p. 85]. формулалар жиыны қандай да бір натурал саны үшін -үйлесімсіз деп аталады, егер қуатындағы әрбір шекті қуатындағы шекті ішкі жиыны үйлесімсіз болып табылса, яғни

әрбір үшін.

*Анықтама 1.6.2* дербес типі жиын аясында қатысты бөлінеді дейміз, егер төмендегі шарттар орындалатындай формуласы мен тізбегі табылса:

1. ;

2. барлық үшін ;

3. -үйлесімді болып табылады.

дербес типі аясында бөлінеді, егер қандай да бір -ға қатысты аясында бөлінсе.

*Анықтама* 1.6.3 типі (толық болу шарт емес) теориясындағы аясында форкинг қылады, егер төменгі шарттар орындадатындай формулалары табылса:

1. ;

2. әрбір үшін аясында бөлінеді.

Айталық, – қандайда бір йонсондық теориясының қаныққан семантикалық моделінің барлық йонсондық ішкі жиындарының класы болсын (яғни, ∃-қаныққан дегеніміз экзистенциалды типтерге қатысты қаныққан дегенді білдіреді, ал ∃-тип берілген модельдің кез келген ішкі жиынында жүзеге асады). – барлық экзистенциалды типтер класы (толық болу шарт емес), қандай да бір бинарлық қатынас болсын. Келесі (йонсондық форкинг қылмайтын) құрайтын аксиомалар шартын жазайық:

*Аксиома 1*. Егер және — изоморфты енгізу болса, онда .

*Аксиома 2*. Егер және болса, онда .

*Аксиома 3*. Егер және болса, онда болады сонда тек сонда, егер және .

*Аксиома 4*. Егер , және , онда және болатындай табылады.

*Аксиома 5*. Егер , және болса, онда болатындай кардиналы табылады.

*Аксиома 6*. Кез келген және әрбір үшін кардиналы табылады, егер болса, онда және болатындай табылады.



*Аксиома 7*. Егер болса, онда .

*Теорема 1.6.1* [36, р.173]. Айталық, – шексіз жиын, , – – элементтен тұратын жиынының барлық ішкі жиындар жиынтығы болсын. Егер , , үшін болса, онда қандай да бір үшін болатындай шексіз ішкі жиыны табылады.

*Лемма 1.6.1*. Айталық, – стабильді теория, – қуаттылығында қаныққан модель болсын, типтері аясында форкинг қылмайтын болсын делік. Егер болса, онда болатындай жиынына теңбе-тең элементарлы мономорфизмі табылады, мұндағы – сәйкесінше типтерін анықтайтын схемалар.

Келесі нәтиже арқылы жоғарыда көрсетілген йонсондық теорияларға форкингтің барлық қасиеттерін толық теория үшін қолдануға болатынын көрсетеді.

*Теорема 1.6.2* [35, с. 124]. Айталық теориясы -сөйлемдер үшін толық кемел йонсондық теория болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. қатынасы теориясына қатысты 1-7 аксиомаларын қанағаттандырады;

2. стабильді және барлық , үшін типі аясында форкинг қылмайды (С.Шеллахтың классикалық мағынасында [36, p. 85]).

*Дәлелдеуі.* 1)2) импликациясын дәлелдейік. Айталық, , мұндағы – 1-7 аксиомаларын қанағаттандыратын кардиналдар. Әрі қарай, теориясының -стабильді екенін көрсетейік. Онда 1.3.1-теорема бойынша теориясы -стабильді екенін аламыз. орындалатыны анық. Айталық болсын. Егер болса, онда 7-аксиома бойынша және 6-аксиома бойынша және болатындай табылады. Онда 3-аксиома бойынша орындалады. өрнегін арқылы белгілейміз. 5-аксиома бойынша орындалады. Осыдан шығатыны



Яғни, осыдан теориясының -стабильді екенін көреміз және 1.3.1-теорема бойынша теориясы -стабильді болады.

Айталық, болсын. Ендеше типінің аясында форкинг қылмайтынын көрсетейік. болсын делік. Онда 4-аксиома бойынша және болатындай табылады. типінің аясында форкинг қылмайтынын дәлелдейік (онда 2-аксиома бойынша типі аясында форкинг қылмайды). Керісінше тұжырымдайық. Онда 1.6.1 анықтамасы бойынша теориясының кемелділігінен болатындай экзистенциалды формулалардың шекті жиыны табылады және әрбір формуласы аясында бөлінеді. Айталық, болсын, мұндағы – формулаларының ең болмағанда біреуіне енетін тұрақтылар жиыны. 4-аксиома бойынша және болатындай табылады. болатыны анық. Осыдан табылатыны шығады. 9-теореманы, компактілік теоремасын және формуласының аясында бөлінетіндігін қолдана отырып, тізбегі және , болатындай жиынына теңбе-тең элементарлы мономормизмі және қандай да бір үшін -үйлесімсіз жиыны табылатынын көрсете аламыз.

Айталық, , болсын. 1-аксиома бойынша 4-аксиома бойынша және болатындай табылады. Яғни, .

жиыны -үйлесімсіз болғандықтан аламыз. 5-аксиомаға қарама-қайшылық алдық. Осыдан шығатыны типінің аясында форкинг қылмайтыны шығады.

Тұжырымды кері қарай дәлелдейік. Айталық, типі аясында форкинг қылмайды делік. теориясы кемел болғандықтан теориясы модельді толық (1.1.2 теорема), онда тек экзистенциалды типтермен жұмыс жасау және теориясының -қаныққан экзистенциалды тұйық модельдерін қарастыру жеткілікті. болатынын дәлелдейік. Айталық, және – теориясының -қаныққан моделі болсын. , типі аясында форкинг қылмайды. 7-аксиома бойынша және 5-аксиома бойынша және болатындай табылады. Жоғарыда көрсетілгендей, формуласынан типінің аясында форкинг қылмайтыны шығады. 1.6.1-лемма бойынша болатындай жиынына теңбе-тең моделінің автоморфизмі табылады. Онда 1-аксиома бойынша және 2-аксиома бойынша орындалады, сонымен 1)2) импликациясы дәлелденді.

2)1) импликациясы [46] еңбегіндегі сәйкес ұғымдардың йонсондық мағынасындағы жалпылауы туралы 19.1 теоремасының дәлелдеуінен шығады.

**2. ЙОНСОНДЫҚ қосарлар туралы жалпы мәлімет**

**2.1 Мұралы теориялар үшін йонсондық -стабильділік қасиеттері**

Модельдер теориясында стабильді теориялар аясында қосарлар теориясы зерттеледі. Жалпы толық теориялардың қасиеттері берілген теорияның қосарлар теориясының қасиеттерімен байланысы туралы сұрақтарды француз математигі Б. Пуаза [47] еңбегінде зерттей бастады. Бұл жұмыста Б. Пуаза элементарлы ішкі структураларымен ерекшеленетін структураның жалпы түрін қарастырды. Яғни, элементарлы қосарлардың толық болуы шарттарын тапты. Әрі қарай осы сұрақтарды зерттеу [48] жұмыстарында жалғасты. Бұл жұмысында Бускарен осы сұрақтарды шешуде әр түрлі стабильді теориялар класында болуы керек деп тұжырымдады. Ол элементарлы қосар теорияларының толық болуының бірнеше қажетті және жеткілікті шарттарын стабильді және суперстабильді теориялар үшін келтірді. Ласкардың [49] еңбегінде элементарлы қосарлар эквивалентті болатын -стабильді теориялар саналымсыз әлбетті болу керек делінген. А.Т. Нұртазиннің [50] жұмысында саналымсыз әлбетті теориялар класы үшін элементарлы теориялардың толық болуы туралы сұрақтың шешімін көрсетті. [51] еңбегінде Т.Ғ.Мұстафин -стабильділік ұғымын енгізеді және классикалық мағынадағы -стабильділіктің белгілі фактысын жалпылайтын қасиеттердің қатарын келтірді. Дербес жағдайда, элементарлы қосарлар ұғымымен байланысты -стабильділік ұғымы зерттеледі. [38, с. 88-100] еңбегінде кез келген суперстабильді теориялар үшін стабильділіктің сипаттамасы алынды, яғни классикалық мағынада стабильділікті анықтай отырып, теориясының кейбір моделінің әрбір жиынымен бірге сигнатурасындағы толықтыруларының жиынын қарастырды. , мұнда } және - жаңа тұрақты символ. [51, с. 114] еңбегінде тұрақты символының орнына басқа жаңа сигнатура белгілерін қарастыру ұсынылды. Сонымен бірге стабильділіктің жаңа түрлері пайда болады, олардың бірі -стабильділік негізгі сигнатураға жаңа бір орынды предикат символын қосу арқылы алынады, ол өзінің элементарлық ішкі моделі ретінде түсіндіріледі. Дәл осы жұмыста, атап айтқанда, -стабильділіктің -стабильді теориялар бойынша классификациясы алынды. [52] жұмысында Е.А.Палютин -стабильді теориялар ұғымын енгізді. Бұл ұғымның -стабильділіктен өзгешелігі – үзіліссіздік шартының қосылуы, яғни тривиалды жағдайда келесі маңызды дербес жағдайлар орындалады: стабильділік, -стабильділік және т.б. Осы нәтиженің салдары ретінде алдыңғы бөлімде айтылған стабильді теориялардағы типтердің анықталғандығынан бөлек Т.Нұрмағамбетов пен Б.Пуазаның -модельдер аясындағы типтер үшін [53] жасалған -стабильді теориялардың -жиындар аясындағы типтердің анықталғандығын айтуға болады.

1990 жылы бірінші рет болған кеңес-француз коллоквиумында қатысушының баяндамасына қатысты келесі сұрақты айтты: «Егер теориясы - *-*стабильді болса, онда ол әрдайым *-*стабильді болады ма?» Бұл сұраққа Э.Бускарен бұл сұрақты нақтырақ былай жауап берді:

1. -стабильді, суперстабильді теория, бірақ -стабильді емес теория табылады;

2. -стабильді, суперстабильді емес теория, бірақ стабильді теория табылады.

Осы Т.Ғ.Мұстафиннің сұрағының аясында А.Р.Ешкеевтің толық емес индуктивті теориялар класы үшін [35, с. 126] және [37, с. 204-206] еңбектерінде бірқатар нәтижелерді көруге болады. Және де, бұл жұмыста сол нәтижелерді йонсондық спектр үшін қарастыратын боламыз.

Айталық, теориясы сигнатурасындағы кез келген йонсондық теория, ал – моделінің ішкі жиыны, – бір орынды предикаттық символ болсын.

сигнатурасында келесі (жалпы айтқанда, толық емес) теорияны қарастырайық: , мұндағы – символының интерпретациясы сигнатурасында экзистенциалды тұйық ішкі модель болады деген фактыны айқындайтын шексіз сөйлемдер жиыны. арқылы теориясының барлық -толықтыруларының жиынын белгілейміз. Айталық, – кез келген кардинал болсын.

*Анықтама 2.1.1* [37, с. 205]. 1. Йонсондық теориясы йонсондық --стабильді (әрі қарай, ---стабильді) деп аталады, егер қуаты -ден аспайтын кез келген жиыны үшін орындалса.

2. йонсондық теориясы --стабильді деп аталады, егер қандай да бір үшін теориясы ---стабильді болса.

Айталық, мен модельдері йонсондық теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын және енгізілуі орындалсын. және моделіндегі бір орынды предикаттық символының интерпретациясы моделі болсын делік.

*Анықтама 2.1.2* [37, с. 204]. моделін теориясының йонсондық элементарлы қосары деп атаймыз. Йонсондық элементарлы қосарлар теориясын дейміз. Ал, бұл теория – теориясының барлық йонсондық барлық йонсондық қосарлар жиынының класынан алынған теория.

*Лемма 2.1.1* [37, с. 204].Егер – кемел йонсондық теория болса, онда – кемел теория болып табылады.

*Дәлелдеуі*. анықтамасы бойынша теориясының өзінің қуатындағы қаныққан семантикалық моделіне ие болатынын көрсетсек жеткілікті. Осындай модель ретінде йонсондық теориясының семантикалық моделін аламыз. ішкі жиыны және семантикалық моделіндегі бір орынды предикатық символына байланысты өз қуатында қаныққан болады.

*Теорема 2.1.1* [37, с. 205]. – кемел -толық йонсондық теория болсын. Онда келесідей шарттар эквивалентті:

1) теориясының центрі --стабильді ([38, с. 89] мағынасында);

2) теориясы --стабильді.

*Дәлелдеуі*. импликациясы тривиалды, себебі егер барлық толықтырулары -ден аспайтындықтан -толықтырулары -ден аспайды.

импликациясын дәлелдейік. Айталық, теориясы ---стабильді болсын. Бұл сигнатурасындағы теориясының Кайзер қабықшасына сәйкес келуіне тең. теориясының кемелділік шарты бойынша және (1.1.3-теорема). 2.1.1-лемма бойынша кемел йонсондық теория болады. Айталық, теориясыда -ден аспайтын -толықтырулар болсын делік. теориясының жаңа сигнатурасындағы центрі келесі формулаға тең болады:

теориясының барлық толықтырулары -ден аспайтынын көрсету керек. Сонда теориясы --стабильді теория болады ([52, с. 89] мағынасында).

Жаңа сигнатурада теориясының неге толық емес екендігін түсіндіре кетейік. Тұрақты шаманы қосуда елеусіз кеңейтілуді аламыз, бірақ моделінің экзистенциалды тұйық ішкі модельдерінің типтер санын өзгертпейді. предикатын жүзеге асыруда маңызды роль атқарады. Бұл жағдайда предикаттық символының жүзеге асуын моделінің элементарлы ішкі моделі атқарады. йонсондық теориясының семантикалық моделі экзистенциалды тұйық модель болғандықтан моделінің предикаттық символы екенінен болатыны шығады [54].

Жаңа сигнатурада теориясының кез келген толықтыруын қарастырайық. анықтайтын болатындай -дан моделі табылады, мұндағы – семантикалық моделінің предикаттық символының интерпретациясы. 2.1.1-лемма бойынша теориясы йонсондық теория болады. Яғни, 1.1.9-теорема бойынша теориясы модельді толық болғандықтан теориясындағы кез келген формула осы теориядағы қандайда бір экзистенциалды формулаға эквивалентті болады. Онда теориясының -толықтығы бойынша 2) шартындағы теориясының толықтырулар саны -ден аспайды. Осылайша теорема дәлелденді.

Осы нәтиженің және 2.1.1-лемманың салдары ретінде келесі тұжырымды көрсетуге болады.

*Салдар 2.1.1* [35, с. 127]*.* Айталық, теориясы саналымсыз әлбетті -толық йонсондық теория болсын. Онда келесідей шарттар эквивалентті:

1. йонсондық элементарлы қосарлар теориясы -толық теория болады;

2. теориясының центрінің элементарлы қосарлар теориясы толық болады ([50, с. 130] мағынасында).

Теория экзистенциалды сөйлемдер үшін толық болғандықтан үйлесімді енгізу қасиетіне ие болады, бірақ керісінше дұрыс болмайды [55]. 2.1.1-теорема мен 2.1.1-салдар бойынша -толықтық шартын алып тастауға болмайды. Осыған байланысты өзара элементарлы эквивалентті емес континуум экзистенциалды тұйық группалар табылады [15, p. 35], ал группалар теориясы йонсондық болып табылады, қорытындылай келе 2.1.1-теорема шартынан кемелділік талабынан бас тартпаймыз.

2.1.1 -теореманың йонсондық спектрлер үшін жалпыламасын тұжырымдайық:

*Теорема 2.1.2.* Айталық, – кемел -толық йонсондық теория және болсын. – оның семантикалық моделі болсын, және моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделі, ал болсын. йонсондық класы ---стабильді болады сонда тек сонда, егер йонсондық кластың центрі классикалық мағынада --стабильді болса.

*Дәлелдеуі*. Ең алдымен, йонсондық класс стабильді дегенді қайта анықтап алайық. Йонсондық класс стабильді болады, егер сол кластағы әрбір теория стабильді болса. Онда жоғарыдағы 2.1.1-теоремадағы бойынша йонсондық класы центрінің --стабильділігінен йонсондық класының ---стабильділігі шығатыны тривиалды.

Ал керісінше жағдайда, йонсондық класының ---стабильді болады, егер класындағы жоғарыда келтірген теореманың дәлелдеуінде айтқандай әрбір теориясының барлық толықтырулары -ден аспайды. Яғни, – --стабильді болады.

Жоғарыда келтірілген мәліметтер негізінде негізгі нәтижелерімізді қарастырайық. Келесі нәтижелер тікелей --стабильділік пен гибридтерге қатысты болғандықтан, алдымен гибридтерге қысқаша тоқталайық. Жалпы гибридтер йонсондық теориялар үшін жаңа ұғым. Осы ұғым туралы алғаш [56] еңбегінде жарық көріп, [57-61] жұмыстарында модельді-теоретикалық қасиеттері зерттелінді. Сол жұмыстардан алынған гибрид туралы қысқаша мәлімет келтірейік. Алгебралық құрылым амалының мәнін анықтайық.

Айталық, болсын, мұндағы бірігу, қиылысу, декарттық көбейтінді, қосынды, - тура қосынды, фильтрлік және ультрафильтрлік көбейтінді.

болсын делік, мұндағы теориясының семантикалық моделі, теориясының семантикалық моделі.

Келесі анықтама екі йонсондық теория үшін бірінші типті гибридті береді.

*Анықтама 2.1.3* [56, p. 101]*.* йонсондық теорияларының гибриді деп теориясын айтамыз, егер ол теория йонсондық болса. Сонымен қатар, алгебралық құрылымы теорияларының семантикалық гибриді деп аталады.

*Факт 2.1.1.* теориясы йонсондық болуы үшінболуы жеткілікті.

*Теорема 2.1.4.* Айталық, *,*  теориялары бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялар болсын. . - теориясының семантикалық моделі, - теориясының семантикалық моделі, , , және болсын делік.

Егер теориясы --стабильді теория, ал теориясы ---стабильді теория болса, онда теориясы ---стабильді болады.

*Дәлелдеу.* сигнатурасын қарастырайық. Онда *,* йонсондық теориялары теорема шарты бойынша мұралы теория болғандықтан рұқсаттылығы бар байытудағы теориялары *,* йонсондық теория болады. Шарт бойынша бұл екі теория косемантты, яғни семантикалық модельдері бірдей. Олай болса . 2.1.1 теоремасы бойынша центрлері --стабильді, яғни қуаты -ден аспайтын жиыны үшін орындалады.

Сигнатурада теорияларының кез келген толықтыруларын қарастырайық. анықтайтын , болатындай -дан модельдері табылады. Жоғарыда айтылғандай, қарастырылып отырған теориялар косемантты болғандықтан модельдері семантикалық модельге изоморфты енгізілген, яғни ішкі модельдері болып табылады. Ендеше көбейтіндісі де изоморфты енгізілген. Яғни, теориясы ---стабильді болады.

*Теорема 2.1.5. ,* және теориялары үшін 2.1.4-теоремасыныңшарты орындалсын делік. Айталық, *,*  теориялары -әлбетті -толық теориялар болса, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - -әлбетті;

2) - -әлбетті;

3) - -әлбетті.

*Дәлелдеуі.* импликациясын дәлелдейік. 1.5.2 теоремасы бойынша теориясы -әлбетті болғандықтан теориясы да -әлбетті болады, сәйкесінше теориясы -әлбетті болғандықтан теориясы да -әлбетті болып табылады. Теорема шарты бойынша *,*  теориялары мұралы йонсондық теориялар, ендеше және теориялары йонсондық теория. Онда *,* теорияларына дейінгі толықтыруларын қарастырайық. Толықтырулар саны 2.1.1 теореманың 2) шартындағыдай -ден аспайды, яғни . Осыдан теориялардың -әлбеттілігін аламыз.

дәлелдеуіне көшейік. Теорема шарты бойынша , және . *,* теориялары косемантты, яғни . Ендеше, және модельдері семантикалық модельдің ішкі экзистенциалды тұйық модельдері. Сонымен қатар алдыңғы импликациядан көргеніміздей *,* теориялары -әлбетті, осыдан және модельдерінің изоморфты екендігін аламыз. Яғни, теориясы -әлбетті болады. 1.5.2 теоремасы бойынша теориясы да -әлбетті болады.

*Теорема 2.1.6.* Айталық, -йонсондық теория, , - теориясының семантикалық моделі, , , болсын. Егер *,*  теориялары --стабильді теориялар болса, онда - --стабильді болады.

*Дәлелдеуі*. 2.1.4 теоремасы бойынша дәлелденеді. Сол теоремадағы гибрид болуы үшін және фрагменттермен жұмыс жасаймыз. Фрагменттер йонсондық теория болып табылады [62]. болады.

**2.2 Йонсондық семантикалық қосар**

Бұл параграфта Бруно Пуазаның [47, p. 239-249] еңбегіндегі негізгі нәтижелерін баяндап кетсек. Стабильді теорияның мысалдарының бірі – алгебралық тұйық өрістердің теориясы; стабильді теорияның тағы бір мысалы – теориясы, яғни структуралары алгебралық тұйық ішкі өрістері болатын және өзінің меншікті алгебралық ішкі өрістерінің бірін интерпретациялайтын унарлы предикатты символ қосылған теория болып табылады. Айтылған жұмыс және теорияларының арасындағы байланыстарды нақтылауға арналған. Ол үшін толық стабильді теорияны және осы теорияның моделі мен осы модельдің элементарлы ішкі моделін интерпретациялайтын унарлы предикатты символы бар моделінен құралған структураларын қарастырып, ол структураларды берілген теорияның қосары деп атайды. Осындай () қосарларын әсем дейді, егер, біріншіден, моделі - қаныққан, ал екіншіден, элементтері моделінен алынған ұзындығы *n* болатын әрбір кортежі үшін аясындағы және де теориясы мағынасындағы кез келген тип моделінде жүзеге асса. Сонымен қатар, бұл жұмыста осы әсем қосарлардың эквиваленттілігі туралы негізгі нәтиже алынады. Оны болашақта диссертациялық жұмыстың нәтижелерін дәлелдеу барысында қолданамыз.

Толық теориясының фундаменталды реті теориясындағы модельдеріндегі толық типтерді салыстыру әдісі болып табылады.

*Анықтама 2.1.1* [47, p. 240]. Айталық, , , болсын. типі формуласына өкілдік жасайды, егер ;

Егер , ал тіліндегі формулаға тиісті болса, онда типі формуласына өкілдік жасайды дейміз, егер ; басқаша жағдайда типі формуласына өкілдік жасамайды дейміз.

*Анықтама 2.1.2* [49, p. 332]. Айталық, , және болсын. орындалады дейміз, егер барлық және үшін орындалып, орындалатындай табылса.

Егер , ал , (фундаменталды рет мағынасында) болса, онда өкілдік жасайтын кез келген формулаға типі де өкілдік жасайды. Егер және типтері бірдей формулаларға өкілдік жасаса, онда олар эквивалентті болады.

теориясы стабильді болады сонда тек сонда, егер теориясындағы кез келген моделі және барлық үшін анықталған болса.

Айталық, болсын. типі анықталған деп аталады, егер сонда тек сонда, егер .

Егер , және типі ішінде анықталған болса, мұндағы , онда бейнелеуін әрбір формуласына типін анықтайтын формуласына сәйкес қойсақ, ішіндегі схема, яғни типін анықтайтын схема деп атайды. Осы схема арқылы жаңа тіл жасай аламыз:

Айталық, – теориясының семантикалық моделі, ал , модельдері семантикалық моделінің ішкі экзистенциалды тұйық модельдері болсын.

*Анықтама 2.2.1.* қосары экзистенциалды тұйық қосар деп аталады, егер моделі моделінің экзистенциалды тұйық моделі болса.

*Анықтама 2.2.2.* экзистенциалды тұйық қосары семантикалық қосар деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) моделі -қаныққан болады, мұндағы, -қаныққан экзистенциалды типтерге дейін шектелген дегенді білдіреді;

2) кез келген кортежі үшін мағынасында аясындағы әрбір -типі моделінде жүзеге асады.

Бұл жерде атап кететін жайт, бұл анықтама [48] жұмысындағы әсем қосарларды жалпылайды, бірақ әлсіздеу, себебі анықтамада кортеждер саны шекті және 1.13 анықтама бойынша семантикалық модельдің қуаты , ал, ол -не жетпейді: , .

теориясын осындай семантикалық қосарлардың теориясы деп аламыз, яғни келесі теорема егер стабильді, - толық теория болса, онда екі қосар элементарлы эквивалентті болады.

*Теорема 2.2.1*[48].Айталық стабильді болсын; және – екі әсем қосары, және – әр қайсынан алынған кортеждер болсын. Онда және кортеждері бірдей типке ие болады, егер ( мағынасындағы) барлық типтер аясындағы және аясындағы теориясының фундаменталды реті бойынша эквивалентті.

Жоғарыда айтылған ұғымдар мен тұжырымдар негізінде мұралы стабильді йонсондық теориялар үшін семантикалық қосарлардың йонсондық спектрлер үшін эквиваленттілік критерийі алынды:

*Теорема 2.2.2.* Айталық,

болсын. класының йонсондық спектрін қарастырайық:

болсын. -толық және -стабильді клас, ал оның семантикалық моделі болсын делік. Ал, класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын.

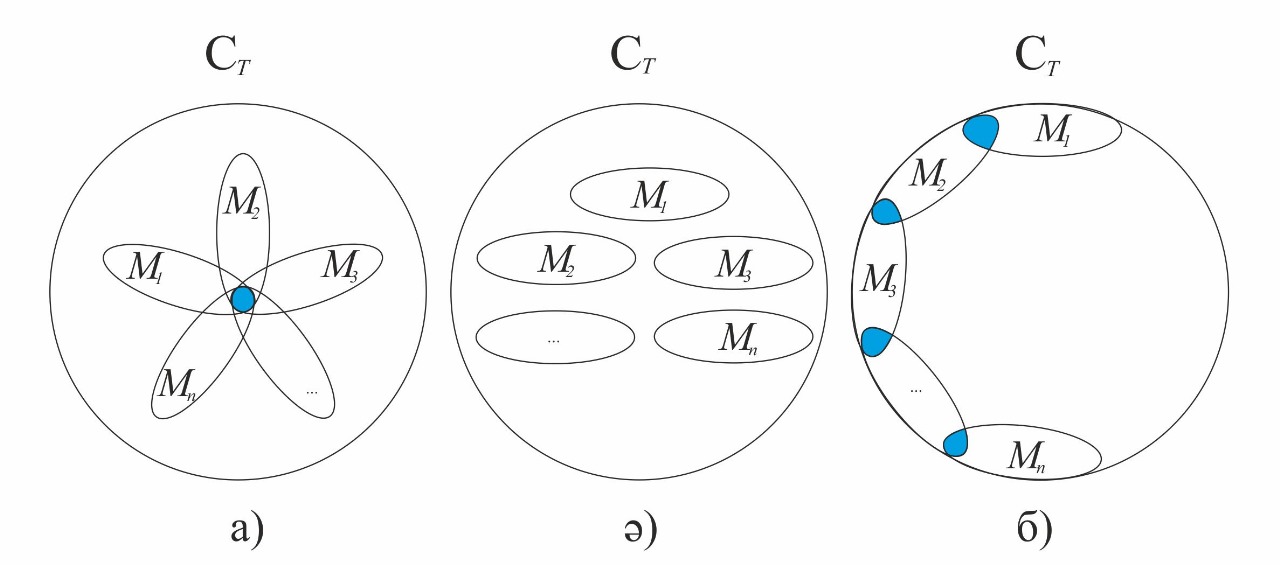
и семантикалық қосарлар ал, менәрқайсынан алынған кортеждер болсын. Ондаболады, егер олардың централды типтері класының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

*Дәлелдеуі.*

Әрбір семантикалық қосарды рұқсаттылығы бар байытуда қарастырайық:

Осыдан келесі дәлелді аламыз:

Байқағанымыздай екі семантикалық қосарлар үшін централды типтерге өкілдік жасайтын формула да ақиқат.



Сурет 2.2.1. Семантикалық қосарлар

Жоғарыда көрсетілген жағдайлар бойынша талдау жасайық. а) суреті бойынша семантикалық моделінің ішкі структураларының кез келген жиынтығы үшін қиылысуы берілген теорияның моделі болады. Яғни теория дөңес болады Бұл тривиалды жағдай. ә) және б) суретінде қанша қосар сонша теория, оны байыту арқылы централды типке айналдырамыз да типтен елеулі база жасаймыз.

Жалпы осындай семантикалық қосарлар класы қанша болады деген сұрақ туындайды. Осы сұрақ жауап ретінде [63] жұмысындағы мына формуланы келтіреміз:

Кластар саны біртекті модельдер санына сәйкес келеді. Біртекті модельдер саны -қа тең.

**2.3 Йонсондық шекті бүркеу қасиеті**

Шелахтың жұмысынан [36, p. 62-70] бастау алған шекті бүркеу қасиетін (f.c.p.) қарастырамыз. Өз еңбектерінде Шелах келесіні көрсетеді: стабильді теориялар f.c.p. қасиетіне ие, бірақ бұл жұмысымыз үшін маңызы жоқ, себебі тек стабильді теориялармен жұмыс жасаймыз. Алдымен Шелахтың еңбектеріндегі f.c.p.анықтамасына тоқталсақ. Алдымен, келесі шартты белгілеулерді енгізейік. арқылы формулалар жиынын белгілейміз. -формула немесе -формула бұл немесе түріндегі формулалар, мұндағы , -ті параметрлер тізбегі ретінде қарастырады, әдетте, формулаларға қандай да бір қойып формуласын алып жатады. Кей жағдайда сол бір формулаларды -формула деп қарастырамыз, мұнда мәні өзгеріп отырады.-формула бұл қандай да бір үшін алынған -формула.

типі моделіндегі жиынының аясындағы -тип болып табылады, егер:

1) бұл түріндегі формулалар жиыны, мұндағы , және не , не -ге тиісті болады.

2) типі моделімен қайшылықсыз болады, яғни типі моделінде шекті орындалған болады, әрбір шекті үшін .

*Анықтама 2.3.1* [36, p. 62].

1) формуласы шекті бүркеу қасиетіне ие болады (f.c.p.), егер айтарлықтай үлкен натурал саны үшін

орындалатындай табылса, және әрбір үшін

орындалса.

2) теориясы шекті жабу қасиетіне (f.c.p.) ие болады, егер шекті бүркеу қасиетіне (f.c.p.) ие формуласы табылса.

Жұмыстың өзектілігінде айтып кеткендей, толық теориядағы кез келген ұғымды йонсондық теорияға көшіре аламыз.

*Анықтама 2.4.2* [28, p. 184].

1) формуласы экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне ие болады (e.f.c.p.), егер айтарлықтай үлкен натурал саны үшін орындалатындай табылса, және әрбір үшін орындалса.

2) йонсондық теориясы экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (e.f.c.p.) ие болады, егер экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (e.f.c.p.) ие экзистенциалды формуласы табылса.

Осы шекті бүркеу қасиетіне ие теорияны рұқсаттылығы бар байыту арқылы централды типтерді алайық. Онда экзистенциалды шекті бүркеу қасиетін қанағаттандыратын централды типті келесі түрде жаза аламыз:

Централды тип матрицасының әр жолы -қима болады. Қанша формула сонша қима болады.

Мысалы, =3, =1, болса, онда типтің экзистенциалды бүркеу қасиеті ретінде келесі матрицаны алуға болады:

*Теорема 2.3.1* [18, p. 189]*.* Айталық, класы мұралы -толық кемел және --стабильді класс. болсын делік. Онда келесі шарттар эквивалентті:

*1.* класы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*;*

2. Кез келген *-*қаныққан модель семантикалық қосар болып табылады;

3*.*  модельдерінен алынған жәнекортеждері бірдей централды типке ие болады сонда тек сонда, егер мағынасындағы аясындағы типтері теориясының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

4. класындағы әрбір модель семантикалық қосарға изоморфты енгізілген.

*Дәлелдеуі.* . [47, p. 243] жұмысындағы 6-теорема арқылы дәлелденеді.

. 2.2.2 теореманың салдары ретінде шығады, яғни кез келген жеткілікті түрде қаныққан модель семантикалық қосар болып табылады.

. Централды типтері теориясының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса, 2.2.2 теорема бойынша оның әр кластағы семантикалық қосарлары эквивалентті болады, және де әрбір модель семантикалық қосарға изоморфты енгізіледі.

. Егер де изоморфты модельдер табылса, әлбетті теориялармен жұмыс жасаймыз. Ол деген стабильді теориялар, ал стабильді теориялар *(е.f.c.p.)* ие болмайды.

*Теорема 2.3.2* [18, p. 189]. Егеркласы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмаса және *-*стабильді класс болса*,* ондакласы *--*стабильді және *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*.*

*Дәлелдеуі.* 2.3.1 теоремасынан шығады.

**2.4. Көп өлшемді емес йонсондық теориялар**

Кейбір белгілі анықтамаларды еске түсірейік. Егер сигнатура көрсетілмесе, онда сигнатурасында жұмыс істейміз. Кейбір жиыны үшін болса,онда типі көп өлшемді деп аталады. Егер теориясында көп өлшемді тип болса, онда көп өлшемді теория деп аталады. Керісінше жағдайда, теориясы көп өлшемді емес немесе шектеулі өлшем теориясы деп аталады. Келесі теореманы дәлелдейміз.

*Теорема 2.4.1* [38, p. 189]*.* теориясы суперстабильді теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті болады:

а) теориясы көп өлшемді емес;

б) теориясы - суперстабильді;

в) теориясы - стабильді.

Дәлелдеу. Әлбетте, а) - дан в) - ға келесідей болады. а)-дан б) және в)-дан – а) болатынын көрсетейік. Сонымен, теориясы көпөлшемді емес теория болсын. Алдымен келесі тұжырымды дәлелдейік

*Лемма 2.4.1.* Айталық, , және , бұл жерде модельдері - қаныққан. – бұл -нен алынған қос-қостан алынған ортогоналды регулярлы типтердің жиыны болсын делік, и . Егер кез келген үшін болса, онда және модельдер қосарлары сигнатурасында элементарлы эквивалентті болады.

*Дәлелдеу*. Айталық, , және болсын. болатындай элементі табылатынын көрсетейік. бойынша индукция арқылы дәлелдейік. болсын делік. теориясы көп өлшемді емес болғандықтан, моделі аясында – жай және – минималды болады, мұндағы - моделіндегі типінің базисі, . Лемма 2.4.1 шарты бойынша егер болса, онда . Айталық, болсын, онда кез келген үшін элементі аясында -жай модель болатындай шекті жиындар табылсын (сонымен қатар барлық – құр жиындар). . Лемма 2.4.1 шарты бойынша кез келген орындалатындай кез келген үшін ішкі жиындары табылады. Онда моделіне тепе-тең және кез келген үшін жиынын жиынына биективті бейнелейтін изоморфизмі табылады. моделін болатындай моделін таңдап алуға болатыны анық. Енді орнына алуға болатыны түсінікті.

Бұл тұжырымдар симметриялы, яғни кез келген элементі үшін болатындай элементін табуға болатыны анық.

және элементтері үшін келесі теңдік орындалады деп ұйғарайық

Мақсатымыз болатындай элементін табу. Айталық, моделі аясында – жай модель. Айталық, болсын, онда , мұндағы ,. Теория суперстабильді болғандықтан кез келген үшін орындалады. Осыдан шығатыны, кез келген үшін , мұндағы – аясындағы типінің мұрагері, ал – типінің бейнесі, ол да типінің мұрагері, бірақ моделіндегі мұрагеріболып табылады. Шынында да, бұл бәрімізге белгілі және формулаларынан шығады. Осы формуладан барлық үшін . – моделінің бейнесі болғандықтан, барлық үшін орындалады. Сонымен, қайтадан лемма шартына келеміз, бірақ модельдердің орнына модельдері болады. Онда элементі үшін орындалатындай элементін аламыз (индукция базисіндей). Енді болатынын анықтау қиын емес. Бірақ , және қажетті теңдікті аламыз. Симметриялылық бойынша кез келген элементі үшін болатындай элементін таба аламыз.

Енді және модельдерін сигнатурасында элементарлы эквивалентті болатынын көрсету қалды.

Айталық, осыдан кейін және - сигнатурадағы кез келген формула және элементтері үшін орындалсын делік. Индукцией по числу кванторлар саныарқылы индукция бойынша орындалатындай формуласын көрсетеміз. формуласын (1) арқылы белгілейік. болсын делік. Онда . Егер , онда дәлелдеуі симметриялы.

Айталық, болсын. Бұл орындалатынын білдіреді, осыдан элементі табылады. Жоғарыда дәлелденгендей болатындай элементі табылады. Индукциядағы ұйғарым бойынша , яғни және . болғанда сигнатурасында және модельдердің элементарлы эквиваленттілігін алатынымыз айқын болды. 2.4.1 леммасы дәлелденді.

2.4.1 теоремасын дәлелдеуді жалғастырамыз, а) б) жағдайын қарастырамыз.

Ол үшін тағы бір тұжырым қажет болады, оны келесі лемма түрінде берейік.

*Лемма 2.4.2*. Айталық, , және болсын. Онда келесі қасиеттерді қанағаттандыратын -қаныққан модельдері табылады:

а) ;

б)

в) қосары қосарына элементарлы эквивалентті, ал қосары сигнатурасында қосарына элементарлы эквивалентті.

*Дәлелдеуі.* [64] еңбегі бойынша әрбір қосардың теориясы суперстабильді болады, сондықтан сигнатурасында және болатындайқуаттылығындағы қаныққан және модельдері табылады, мұндағы сигнатурасындағы элементарлы кеңейтуді білдіреді. модельдері сигнатурасындағы қуатындағы қаныққан модельдер екені анық. Яғни, және , мұндағы сигнатурасында элементарлы эквиваленттілікті білдіреді. болғандықтан -ға тепе-тең изоморфизмі табылады. , , болсын делік, мұндағы – -ға жалғасатын моделінің автоморфизмі Осыдан табылған модельдер 2.4.2. леммасының нәтижесін қанағаттандырады. Сонымен 2.4.1. теоремасының а) б) пунктерінің дәлелдемесін қорытындыладық.

Лемма 2.4.2. бойынша кез келген толықтыруы үшін және – толықтыруының моделі болатындай – қаныққан модельдер қосары табылады. Сонымен қатар, егер , және болса, онда не , не орындалады, бірақ табылады. Осыдан кейін 2.4.1. теоремасының дәлелдеуінің в) а) шартына өтеміз.

*Анықтама 2.4.1.* а) сигнатурасының формуласы -тәуелсіздік қасиетіне ие деп айтамыз, егер кез келген кардиналы үшін -де келесі екі шарт орындалатындай кортеждер жиыны табылса:

1) барлық үшін ;

2) кез келген ішкі жиыны үшін келесі формулалар жиыны үйлесімді:

.

б) теориясы -тәуелсіздік қасиетіне ие деп айтамыз, егер -тәуелсіздік қасиетіне ие формуласы табылса.

*Лемма 2.4.3.* Егер теориясы -тәуелсіздік қасиетіне ие болса, онда -стабильді емес теория болып табылады.

*Дәлелдеуі.* Айталық, – кез келген кардинал және - формуласы – тәуелсіздік қасиетіне ие болатынын көрсететін кортеждер жиыны болсын. Кез келген үшін болатындай модельдер қосары табылады және - формулалар жиынынң моделі. - қуаттылығында қаныққан модель деп санауға болады. Лемма 2.4.1. дәлеледеуіндегідей барлық үшін барлық модельдері қандайда бір моделіне сәйкес және тең. Яғни, кез келген үшін – моделі қосар болатындай моделі табылады. Егер және болса, онда мен қосарлары сигнатурасында элементарлы эквивалентті болмайтыны анық. Сонымен, . Лемма дәлелденді.

Әрі қарай, Шелах [36, p. 306] енгізген ранг функциясын қолданамыз. Суперстабильді теориядағы әрбір тип белгілі бір рангке ( мағынасында) ие болатынын есімізге түсірейік.

*Лемма 2.4.4.* Айталық, - – қаныққан модель, және болсын. Ал, стационар тип, , және типі -ға ортоганалды болсын делік. арқылы аясындағы – жай модельді белгілейік, мұндағы - типінің мұрагері. Егер қандай да бір элементі үшін орындалса, онда болады.

*Дәлелдеуі.* Ұйғарайық, және . болғандықтан болады және осыдан шығатыны,

.

Онда, белгілі болғандай, типі аясында форкинг қылмайды. Бірақ бұл типі -ға ортогоналды болатынына қарама-қайшы болады, себебі, .

*Лемма 2.4.5.* Айталық, – барлық стационарлы көп өлшемді типтердің ішіндегі минималды рангтегі тип болсын ( мағынасында) , және тәуелсіз болсын делік. Егер – және -дан құралатын кез келген – қаныққан модель болса, және – рангіндегі формула болса, онда формуласы -да орындалмайды. ( - аясындағы жай модель, мұндағы - типінің форкинг қылмайтын кеңейтілуі).

*Дәлелдеуі.* Айталық, және болсын. Онда так как типі құр жиынға ортогоналды болғандықтан типі кортежіне ортогоналды (бұл – ортогоналдылық теориясындағы негізгі нәтиже). теориясының суперстабильділігі және мен модельдерінің – қаныққандылығынан және регулярлы болатындай табылады. типі аясында форкинг қылмайтындай табылатыны анық, мұнда - стационарлы тип. Сонымен қатар, және бұдан шығатыны типі -ға ортогоналды, яғни стационарлы регулярлы көп өлшемді тип болып табылады. 2.4.4. леммасы бойынша . Бірақ таңдауына қарама-қайшы келеді.

Осымен 2.4.1. теоремасының дәлелдеуіне де келіп қалдық. Сонымен – көп өлшемді теория және – барлық стационарлы көп өлшемді типтердің ішіндегі минималды рангтегі тип болсын делік. Осындай рангтегі кез келген формуласын таңдаймыз. – тәуелсіздік қасиетіне ие формуласын анықтаймыз. Айталық, қандайда бір кардинал болсын. және кез келген үшін және типтері ортогоналды болатындай тәуелсіз жиынын таңдау қиын емес, мұндағы – типінің көшірмесі.

– құралатын кез келген – қаныққан модель болсын делік. - форкинг қылмайтын кеңейтілуі (жалғыз) болатындай тәуелсіз жиынын таңдап аламыз. Кез келген үшін – аясында – жай модель болып табылатын модель болсын.

Айталық, болсын. . Бұл формуласын -тәуелсіздік қасиетіне ие болатынын көрсетеді. 2.4.1. теорема дәлелденді.

[64, p. 219-223] жұмысында -стабильділіктің суперстабильді теориялар үшін тағы бір келесідей сипаттамасы берілді.

*Теорема 2.4.2* [64, p. 219].Айталық, суперстабильді теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

а) жиыны -дан тәуелсіз қуатына ие болады,

б) теориясы – суперстабильді болып табылады;

в) теориясы – стабильді болып табылады;

г) теориясы тәуелсіздік қасиетіне ие;

д) теориясы көп өлшемді емес болып табылады.

Яғни, осы теоремадан суперстабильді теориялар үшін теориялардың -стабильділігі мен -суперстабильділігі көп өлшемділік ұғымдары сәйкес келеді.

Жоғарыдағы дәлелдеулерімен келтірілген 2.4.1. теорема толық теориялар үшін орындалған. Әрі қарай, осы нәтижені жалпылау мақсатында йонсондық спектрлер үшін диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижесіне көшейік. Алдымен қажетті анықтамаларға тоқталамыз.

*Анықтама 2.4.2.* Айталық, типі аясындағы толық -тип, ал жиыны семантикалық жиынының ішкі йонсондық жиыны болсын. типін аясында -стационарлы деп атаймыз, егер

1) типі аясында форкинг қылмайтын болса;

2) типі аясында форкинг қылмайтын жалғыз қайшылықсыз кеңейтілуі бар болса.

*Анықтама 2.4.3.* 1) Егер , типтері аясындағы толық -тип болса, типі типіне әлсіз - ортогоналды деп аталады, сонда тек сонда, егер бірігуі аясындағы толық -тип болса.

2) Айталық, типі әрі -стационарлы тип және типі де -толық әрі -стационарлы тип болсын. Онда типі типіне -ортогональ болады, егер кез келген үшін орындалса, дегеніміз -қаныққан модельдің универсумы және типі типіне әлсіз -ортогоналды болады, мұндағы , типтері сәйкесінше аясындағы мен типтерінің -форкинг қылмайтын кеңейтулері.

*Анықтама 2.4.4.* Айталық, жиыны семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиыны болсын, мұндағы қандай да бір йонсондық теория болсын. -толық типі -көп өлшемді деп аталады, егер типі аясындағы қандайда бір толық -типке ортогоналды болса. Егер теориясы -көп өлшемді типке ие болса, онда теориясы -көп өлшемді теория деп аталады. Басқаша, теориясы -көп өлшемді емес деп аталады.

*Теорема 2.4.2.* Айталық,

болсын. -толық және -стабильді класс, ал оның семантикалық моделі болсын делік. Ал, класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) көп өлшемді емес (классикалық мағынада);

2) -көп өлшемді емес.

*Дәлелдеуі.* 2)1) импликациясын дәлелдейік. Айталық, -көп өлшемді емес класс. Яғни, бұл кластағы әрбір теория -көп өлшемді емес. Теория -көп өлшемді емес болса, -көп өлшемді ортогоналды -типі табылады, мұндағы – семантикалық моделінің -йонсондық жиыны. Теорема шарты бойынша -толық және -стабильді класс, бұл Морли рангінің жағдайымен сәйукс келеді. Ал Морли рангі форкингтің өлшемі болып табылады. Және де класындағы теориялар толық емес болғандықтан, Линденбаум теоремасы бойынша кластағы әр теорияны максималдыға дейін, яғни толық теорияларға дейін кеңейтуге болады.

1)2) дәлелдеу тривиалды болады.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Орындалған жұмыстарды қорыта келе келесідей тұжырымға келеміз: жұмыс өзінің мазмұны бойынша модельдер теориясының «Шығыс» деген шартты атқа ие бөліміне тиесілі. Қарастырылып отырған диссертация қазіргі заманғы модельдер теориясының йонсондық теорияны зерттеу аясындағы мәселені баяндайды.

Бұл жұмыста рұқсаттылығы бар байытудағы мұралы теориялардың кейбір қасиеттерін тұжырымдайтын негізгі нәтижелер және де осы нәтижелерді алуда қолданылатын негізгі ұғымдар туралы айтылды. Осы нәтижелерді жеке-жеке қарастыру мақсатында, тарау алты параграфқа бөлінді, сәйкесінше әр параграфта кемел йонсондық теориялар, йонсондық стабильділік және оның кейбір жалпыламасы, йонсондық алғашқы геометрия рұқсаттылығы бар байыту туралы түсінік және централды тип, йонсондық теорияның әлбеттілік қасиеттері, йонсондық спектр, йонсондық қатты минималдылық қасиеттері туралы нақтырақ қарастырылды.

Сонымен қатар диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелерін көрсеттік, атап айтсақ рұқсаттылығы бар йонсондық қосарлардың қасиеттерін қарастырды. Бұл тарау төрт параграфтан тұрады. Әр параграфта, сәйкесінше, йонсондық шекті бүркеу қасиеті, йонсондық семантикалық қосар, мұралы теориялар үшін йонсондық -стабильділік қасиеттері туралы тұжырымдамалар мен олардың дәлелдемелері берілді.

Диссертациялық зерттеудің аясында келесідей нәтижелерге қол жеткіздік:

- модулярлы дөңес йонсондық және -сөйлемдер үшін толық теориялар үшін -әлбеттілік қасиеттері алынды:

*Теорема 1.5.1* [20, б. 44]*.* Айталық, модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті;

2. -әлбетті.

*Теорема 1.5.4* [20, б. 45]*.* Айталық, шарты орындалатын модулярлы, дөңес йонсондық теориясы экзистенциалды -сөйлемдер үшін толық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. -әлбетті,

2. -дан алынған кез келген саналымды модельдің -да алгебралық жай модельді кеңейтуі болады.

*Теорема 2.3.5* [24, с. 176]*.* Айталық, *,*  теориялары -әлбетті -толық теориялар болса, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - -әлбетті;

2) - -әлбетті;

3) - -әлбетті.

- рұқсат етілген байытулардағы бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялардың үшін кейбір модельді-теоретикалық қасиеттеріне қатысты нәтиже алынды:

*Теорема 2.1.4* [24, с. 175]*.* Айталық, *,*  теориялары бір сигнатурадан тұратын мұралы йонсондық теориялар болсын. . – теориясының семантикалық моделі, – теориясының семантикалық моделі, , , және болсын делік.

Егер теориясы --стабильді теория, ал теориясы ---стабильді теория болса, онда теориясы ---стабильді.

- арнайы йонсондық геометрияны анықтайтын, тұйықталу операторы берілген семантикалық модельдердің арнайы ішкі жиындар аясында орбиталдық типтер мен қатты минималды жиындардың қасиеттері алынды:

*Теорема 1.4.4* [21, p. 96]. Кез келген , егер тіліндегі формула болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. – -қатты минималды жиын, мұндағы ;

2. әрбір экзистенциалды тұйықмоделі үшінжиынымоделінде-минималды жиын болады;

3. жиыны моделінде-минималды болады.

*Теорема 1.4.5* [21, p. 97]*.* Әрбір үшін , егер  – -қатты минималды алгебралық емес тип болса, онда – -қатты алгебралық емес типтер болады.

- йонсондық спектр үшін семантикалық қосарлардың эквиваленттігінің критерийі алынды:

*Теорема 2.2.2* [18, p. 189]*.*

болсын делік. класының йонсондық спектрін қарастырайық:

болсын. -толық және -стабильді класс, ал оның семантикалық моделі болсын делік. Ал, класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын. и семантикалық қосарлар ал, менәрқайсынан алынған кортеждер болсын. Ондаболады, егер олардың централды типтері класының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

- стабильді әрі мұралы теориялардың кейбір модельді-теоретикалық қасиеттері алынды:

*Теорема 2.3.5* [23, p. 26]*.* Айталық, -йонсондық теория, , - теориясының семантикалық моделі, , , болсын. Егер *,*  теориялары -стабильді теориялар болса, онда – -стабильді болады.

- -стабильділік пен классикалық стабильділікті байланыстыратын стабильділіктің жалпыламасы йонсондық спектр үшін дәлелденді:

*Теорема 1.2.1* [18, p. 186]*.* Айталық, – кемел -толық йонсондық теория және болсын. – оның семантикалық моделі болсын, және моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделі, ал болсын. йонсондық класы --стабильді болады сонда тек сонда, егер йонсондық кластың центрі классикалық мағынада -стабильді болса.

- семантикалық қосар мен экзистенциалды шекті бүркеу қасиетінің және көп өлшемділіктің стабильді кемел йонсондық спектр үшін негізгі қасиеттері алынды.

*Теорема 2.4.1* [18, p. 189]*.* Айталық, класы мұралы -толық кемел және --стабильді класс. болсын делік. Онда келесі шарттар эквивалентті:

*1.* класы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*;*

2. Кез келген *-*қаныққан модель семантикалық қосар болып табылады;

3*.*  модельдерінен алынған жәнекортеждері бірдей централды типке ие болады сонда тек сонда, егер мағынасындағы аясындағы типтері теориясының фундаменталды реті бойынша эквивалентті болса.

4. класындағы әрбір модель семантикалық қосарға изоморфты енгізілген.

*Теорема 2.3.2* [18, p. 189]. Егеркласы *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмаса және *-*стабильді класс болса*,* ондакласы *--*стабильді және *экзистенциалды шекті бүркеу қасиетіне (е.f.c.p.)* ие болмайды*.*

*Теорема 2.4.2* [29, с. 222]*.* класы класының рұқсаттылығы бар байытудағы класы және оның центрі болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) көп өлшемді емес (классикалық мағынада [36, p. 286]);

2) -көп өлшемді емес.

Қорыта келе, мұралы йонсондық теорияның сипаттамасын беру мәселесі әлі де шешімін таппаған мәселе болып табылады. Сондықтан да жұмыс әрі қарай да өз жалғасын табады.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Кейслер Х.Дж., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – 667 с.

2. Справочная книга по математической логике: в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайса; пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 392 с.

3. Jonsson B. Universal relational systems // Math. Scand. – 1956. – Vol. 4. – P. 193-208.

4. Jonsson B. Homogeneous universal relational systems // Math. Scand. – 1960. – Vol. 8. – P. 137-142.

5. Morley M., Vaught R. Homogeneous universal models // Math. Scand. – 1962. – Vol. 11 – P. 37-57.

6. Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra, Amsterdam, 1963.

7. Cherlin G.L. The model-companion of a class of structures // The Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol. 37, №3. – P. 546-556.

8. Mустафин T.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно йонсоновскиx теоpий булевыx алгебp // Mатематические тpуды. – Новосибиpск, 1998. – Т. 1. – №1.– C. 135-197.

9. Wood C. Forcing for infinitary languages. – Z. math. Logik Grundl. Math., 1972, 18, p. 385-402.

10. Ершов Ю.Л. Об элементарных теориях максимальных полей. – ДАН СССР, 1965, 165, с. 1390-1393.

11. Jonsson B. Extensions of relational structures. – In: The Theory of Models/Ed. J.W. Addison, L. Henkin and A. Tarski. Amsterdam: North-Holland, 1965, p. 146-157.

12. Keisler H.J. Forcing and the omitting types theorem – In: Studies in Model Theory/ Ed. M. Morley. Buffalo (N. Y.): Math. Assoc. Amer., 1973, p. 96-133.

13. Lindstrom P. On model-completeness. – Theoria, 1964, 30, p. 183-196.

14. Macintyre A. On algebraically closed division rings. – 1971.

15. Macintyre A. On algebraically closed groups. – Ann. Math., 1972, 96, p. 53-97.

16. Morley M. Categoricity in power. – Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 114, p. 514-538.

17. Sacks G. Saturated Model Theory. – N.Y.: Benjamin, 1972.

18. Model-theoretic properties of semantic pairs and e.f.c.p. in Jonsson spectrum // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. -№4(112). – P.185-193.

19. Companions of fragments in admissible enrichments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2018. -№4(92). – P.105-111.

20. Рұқсаттығы бар байытулардағы йонсондық теориялардың категорлылығы // Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінің хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. – 2019. - №2(66). – 40–46 б.

21. The J-minimal sets in the hereditary theories // Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. -№2(94). – P.92-98.

22. Некоторые свойства допустимого обогащения йонсоновских теорий // Мальцевские чтения: Тезисы докладов международной конференции (19-22 ноября 2018 г.) – Новосибирск, 2018. – С.194.

23. Enrichment of hybrids // Problems of modelling progress in electrical contacts: Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop, посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина (3-5 апреля). – Алматы, 2019. – С. 25-26.

24. Свойства категоричности и стабильности гибридов для наследственных теорий // «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019): Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal» (16-19 октября) – Нур-Султан, 2019. – С. 175-176.

25. -қатты минималды анықталған жиындардың қасиеттері // Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері: Халықаралық ғылыми конференцияның материалдары, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Рамазанов Мұрат Ыбырайұлының 70 жылдық мерейтойына орайластырылған (12–13 маусым, 2019 ж.) –Қарағанды, 2019. – 10 б.

26. Strongly minimal central types of the class which has essential geometric base // 16th Asian Logic Conference (17-21 June). –Nur-Sultan, 2019. – P.40-41.

27. Теория J-прекрасных пар в допустимом обогащении // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Институт математики и математического моделирования. –Алматы, 2022. – С. 29–30.

28. The central type of a semantic pair // Logic Colloquium 2023: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) University of Milan. –Italy, June 5-9, 2023. –P. 184.

29. Свойства немультиразмерности для класса семантических пар // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, Институт математики и математического моделирования. –Алматы, – 2024. – С. 222.

30. Mustafin Y.T. Quelques proprietes des theories de Jonsson. // The Journal of Symbolic Logic. – 2002. – Vol. 67, №2, – P. 528 - 536.

31. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. – Караганда: КарГУ, 2009. – 250 с.

32. Yeshkeyev A.R. Model-theoretical questions of the Jonsson spectrum / A.R. Yeshkeyev // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. — 2020. — No. 2(98). — P. 165–173.

33. Kassymetova M.T. Pregeometry on the subset of Jonsson theory’s semantic model // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – Караганда, 2018. – №2(90). – P. 88-92.

34. Ешкеев А.Р. Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестник Карагандинского университета. – Серия «Математика». – Караганда, 2014. – №2(74). – С. 53-62.

35. Ешкеев А.Р. О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях. Фундаментальная и прикладная математика:, Вып.8, МГУ,ЦНИТ, 2008.- C.117-128.

36. Shelah S. Classification theory and the number of non-isomorphic models // Studies in logic and the foundations of mathematics. – 1990. – Vol.92. – 740 p.

37. Ешкеев А.Р., Касыметова M.T. Йонсоновские теории и их классы моделей. -Караганда: Издательство КарГУ, 2016. – 370 с.

38. Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А. О -стабильности полных теорий // Структурные свойства алгебраических систем. Сборник научных трудов. -Караганда: Издательство КарГУ, 1990, -125 с. -С. 88-100.

39. Hodges W. Model Theory. – Cambridge University Press, 1993. – 772 p.

40. Simmons H. Existentially closed structures // The Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol.37, №2. – P. 293-310.

41. Robinson A. On the Metamathematics of Algebra / Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1951.

42. Baldwin J.T. Kueker D.W. Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. –1981. – Vol. 20. – P. 289-330.

43. Yeshkeyev A.R, Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. – Vol. 13. – P. 861-874.

44. S. Shelah. Stable theories // Israel J. Math. – 1969. – P. 187-202.

45. Ешкеев А.Р. Некоторые свойства центральных типов йонсоновских

теорий // http://old.math.nsc.ru/conference/malmeet/08/Abstracts. 10.08.2022

46. Мустафин Т. Г. Число моделей теорий. — Караганда, 1983.

47. Poizat B. Paires de structures stables // J. Symb. Logic. - 1983. V. 48. Р. 239 – 249.

48. Bouscaren Е. Elementary paires of models // Annals of Pure and Applied Logic. 1989. V.45(1989). P. 129-137.

49. Lascar D., Poizat B. An introduction to forking // J. Symb. Logic. 1979. V. 44. Р. 330 -350.

50. Нуртазин А.Т. Об элементарных парах в несчетно-категоричной теории // Труды советско-французского коллоквиума по теории моделей. Сборник научных трудов. – Караганда: Изд. КарГУ, 1990. – 214 с. – С.126-146.

51. Мустафин Т. Г. Новые понятия стабильности теорий // Тр. советско-французского коллоквиума по теории моделей. – Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. – С. 112-125.

52. Палютин Е. А. -стабильные теории // Алгебра и логика. – 2003. – Т.  42, № 2. – С. 194-210.

53. Нурмагамбетов Т., Пуаза Б. О числе элементарных пар над множествами // Исследования в теории алгебраических систем. – Караганда: Изд-во КарГУ, 1995. – С. 73-82.

54. Мустафин Т. Г. Обобщённые условия Йонсона и описание обобщённо-йонсоновских теорий булевых алгебр // Мат. тр. – 1998. – Т. 1, № 2. – C. 135-197.

55. Kueker D. W. Core structures for theories // Fund. Math. – 1975. – Vol. 89.

P. 154-171.

56. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Properties of hybrids of Jonsson theories. // Bulletin of the Karaganda University. – 2018. – Vol. 92, Issue 4. – P. 99-104.

57. Yeshkeyev A.R., Issaeva A.K., Mussina N.M. The atomic definable subsets of semantic model // Bulletin of the Karaganda University. – 2019. – Vol. 94, Issue 2. – P. 84-91.

58. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Small models of hybrids for special subclasses of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. – 2019. – Vol. 95, Issue 3. – P. 68-73.

59. Мусина Н.М. Йонсондық теориялардың гибридтерiнiң кейбір мысалдары және қасиеттері // Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. – 2019. – №66(2). – С. 72-77.

60. Kassymetova M.T., Mussina N.M. Geometry of strongly minimal hybrids of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. – 2023. – Vol. 111, Issue 3. – P. 165-180.

61. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. The hybrids of ∆- P J theories // Bulletin of the Karaganda University. – 2020. – Vol. 98, Issue 2. – P. 174-180.

62. Yeshkeyev A.R., Shamataeva N.K., Kasymetova M.T. Companions and cosemanticness of fragments existentially prime convex Jonsson theory // Education and science without borders. – V 7. – 13(1). – Prague, Czech Republic, 2016. – P.131-135.

63. Yeshkeyev A.R., Omarova M.T. An essential base of the central types of the convex theory // Bulletin of the Karaganda University. – 2021. – Vol. 101, Issue 1. – P. 119-126.

64. Bouscaren Е. Dimensional order property and pairs of models // Annals of Pure and Applied Logic. 1989. V.41(1989). P. 205-231.