Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова

УДК 510.67 На правах рукописи

ЯРУЛЛИНА АЛИНА РАШИДОВНА

Совершенные йонсоновские полигоны и их фрагменты

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор-исследователь

А.Р. Ешкеев

Зарубежный научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор

С.В. Судоплатов

(Россия)

Республика Казахстан

Караганда, 2024

**СОДЕРЖАНИЕ**

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**…………………………………….……3

**ВВЕДЕНИЕ**……………………………………………………………………......4

1 **ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНО ПОЗИТИВНЫЕ МУСТАФИНСКИЕ ТЕОРИИ ПОЛИГОНОВ НАД ГРУППОЙ**……………………………………………………12

1.1 Необходимые понятия из классической теории моделей…………………..12

1.2 Необходимые понятия из позитивной теории моделей…………………….18

1.3 Экзистенциально позитивные мустафинские теории и их свойства………20

1.4 Позитивный йонсоновский спектр ∃PM-теорий фиксированного класса моделей теории полигонов над группой……………………………………………...25

2 **РОБИНСОНОВСКИЙ СПЕКТР СЕМАНТИЧЕСКОГО ЙОНСОНОВСКОГО КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ УНАРОВ**……………………32

2.1 Семантическое йонсоновское квазимногообразие универсалов унаров…32

2.2 Робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских унаров……………………………………………………………….36

2.3 О вопросах категоричности универсальных унаров рассмотренных с позиции семантического йонсоновского квазимногообразия………………………39

2.4 О вопросах категоричности неориентированных графов рассмотренных с позиции семантического йонсоновского квазимногообразия ……………………..45

2.5 Йонсоновские экзистенциально замкнутые унары расширенной сигнатуры………………………………………………………………………………49

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**…………………………………………………………………55

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**………………………...58

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
| $σ$ | *–* сигнатура |
| $L$ | – язык данной сигнатуры |
| $A,B,C…$  | – структуры сигнатуры, модели теорий |
| $T\_{1},T\_{2},T\_{3}…$ | – теории языка  |
| $ϕ,φ,ψ$  | – формулы языка |
| $$U$$ | – универсальная область |
| $$T\_{Π}\_{1},T\_{Π}\_{2},T\_{Π}\_{3}…$$ | – теории полигонов над группой |
| $$T\_{U}\_{1},T\_{U}\_{2},T\_{U}\_{3}…$$ | – теории унаров |
| $$T\_{G}\_{1},T\_{G}\_{2},T\_{G}\_{3}$$ | – теории графов |
| $$T\_{∀\_{1}},T\_{∀\_{2}},T\_{∀\_{3}}…$$ | – универсалы унаров |
| $$T\_{∇\_{1}},T\_{∇\_{2}},T\_{∇\_{3}}…$$ | – примитивы унаров |
| $$T\_{1}^{\*},T\_{2}^{\*},T\_{3}^{\*}…$$ | – центры йонсоновских теорий |
| $$C\_{T\_{1}},C\_{T\_{2}},C\_{T\_{3}}…$$ | – cемантические модели йонсоновских теорий |
| $$\left[T\_{1}\right],\left[T\_{2}\right],[T\_{3}]…$$ | – классы теорий языка |
| $$⋈$$ | – отношение косемантичности |
| $$PSp(K)$$ | – позитивный спектр класса моделей $K$ фиксированной сигнатуры |
| $$JSp(K)$$ | – йонсоновский спектр класса моделей $K$ фиксированной сигнатуры |
| $$RSp(K)$$ | – робинсоновский спектр класса моделей $K$ фиксированной сигнатуры |
| $$JC$$ | – семантическое йонсоновское квазимногообразие |
| $$\overbar{T}\_{∀\_{1}},\overbar{T}\_{∀\_{2}},\overbar{T}\_{∀\_{3}}…$$ | – универсалы унаров в расширенной сигнатуре |
| $$\overbar{T}\_{∇\_{1}},\overbar{T}\_{∇\_{2}},\overbar{T}\_{∇\_{3}}…$$ | – примитивы унаров в расширенной сигнатуре |

**ВВЕДЕНИЕ**

**Общее описание работы.** Теория моделей является одним из важных разделов фундаментальной математики, и представляет интерес для изучения современными исследователями, более того, по последним полученным результатам прослеживается положительная динамика ее развития и становится несомненно, что эта дисциплина будет играть важную роль в будущем математических наук. Необходимо, что классическая теория моделей вводит понятия, в большей степени основанные на рассмотрении полных теорий.

Каждый математик работает со структурами какого-либо рода - будь то модули, группы, кольца, поля, решетки, частичные порядки, банаховы алгебры или что-то еще. Тридцать или сорок лет назад основатели теории моделей были особенно заинтересованы в классах, специализированных некоторых множество аксиом в логике предикатов первого порядка – это включало в себя абелевые группы, но не банаховы алгебры или примитивные группы. Сейчас теоретико-моделисты обладают более разнообразным вкусом, однако многие из наших техник работают лучше всего на классах, аксиоматизируемых логикой первого порядка.

Йонсоновские теории формируют подкласс индуктивных теорий и, в силу их определения, являются не полными. Однако, они выделяют достаточно широкий класс классических алгебр, к примеру, можно привести такие естественные алгебры как поля фиксированной характеристики, булевы алгебры, полигоны над моноидом, группы, абелевы группы, и так далее.

Йонсоновские теории как объект исследования были рассмотрены в работах Бьерна Йонсона [1] и Майкла Дарвина Морли, Роберта Лоусона Вота [2]. В середине 80-х годов 20 столетия, работы профессора Толенды Гарифовича Мустафина выделяют новое направление, задающее начальную стадию изучения такого объекта как йонсоновские теории. Именно профессор Толенды Гарифович Мустафин сформулировал определение особого подкласса йонсоновских теорий, который он назвал «совершенными йонсоновскими теориями». Ключевой метод, который разработал и применял Т.Г. Мустафин, а также активно используется его последователями, заключается в следующем: исследование характеристик йонсоновских теорий через анализ их центрального пополнения (центра) и последующее перенесение выявленных свойств на исходную теорию. Заслуживает внимания тот факт, что центр йонсоновской теории является полной теорией, так как он был определен как элементарная теория семантической модели данной теории. Однако, немаловажным фактом, который необходимо отметить, является то, что, признанные эксперты в области теории моделей, Евгений Андреевич Палютин и Бруно Пуаза, после ознакомления с докладом Руслана Маратовича Оспанова, представленным на «5-м казахско-французском коллоквиуме по теории моделей», где обсуждалось определение семантической модели, подчеркнули необходимость корректировки недостатка определения, связанного с использованием аксиомы о сильно недостижимом кардинале и предложили внести соответствующие изменения. Реализация этого замечания нашла отражение в исследовании Ерулана Толендыевича Мустафина [3], где он пересмотрел определение $κ$-однородности и, соответственно, предложил новое определение семантической модели произвольной йонсоновской теорий. Обновленное определение совершенства йонсоновской теории было представлено в исследовании [4], где основные результаты, ранее изложенные в работе [5], были переосмыслены и представлены заново с учетом новой формулировки.

Подводя итог, отметим, что рассмотренные выше результаты по своей сути принадлежат к направлению, известному как «восточная» теория моделей. Т.Г. Мустафин в работе [6], описал обобщенные йонсоновские теории булевых алгебр. В дальнейшем при изучении йонсоновских теория были определены некоторые новые классы позитивных йонсоновских теорий [7-9].

Обратим внимание, что изучение любой алгебраической системы тесно связано с изучением теории, которая выводит предложения, верные на ней, что несомненно связывается одновременное изучение семантических и синтаксических свойств объекта. Поскольку мы работаем в рамках йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, неполны, нам необходимо в первую очередь вспомнить результаты, полученные для полной теории унаров. Напомним, что унар – это структура сигнатуры, содержащей единственный унарный функциональный символ.

Ю.Е. Шишмарев получил фундаментальные результаты в этой области. В 1972, Ю.Е. Шишмарев [10] доказал три теоремы, связанные с полной теорией унаров с бесконечными моделями. Автор определил условия, которые должны быть выполнены для ограниченной теории, чтобы она была категоричной в счетной и несчетной мощности и для неограниченной теориия, чтобы она была категоричной в несчетной мощности. В работе [11], А.А. Иванов заключил, что элементарная теория унаров разрешима. В работе [12], А.А. Иванов получил результаты о сильно ультраоднородном унаре; этот результат связан с определением критерия допускания элиминации кванторов в полной теории унаров, в элементарной теории унаров, также как и с фактом о том, что каждая полная ограниченная или не ограниченная теория унаров, которая имеет бесконечные модели, не конечно аксиоматизируема. А.Н. Ряскин, в работе [13], посчитал число моделей полных теорий унаров и, в работе [14], получил свойства конечной оболочки для полной теории унаров.

В работе [15], Лео Маркус получил критерий для случая, когда модель $M$ языка $L\_{1}$ минимальная и состоит из простых или не простых компонентов. $L\_{1}$ состоит их унарного функционального символа и предикатного символа (равенство). Основная теорема работы [15] базируется на критерии, описанном выше, и утверждает, что, если $T^{1}$ имеет минимальную модель, которая не является простой, тогда $T^{1}$ имеет $2^{ℵ^{0}}$ неизоморфных минимальных моделей. В работе [16], автор получил значимые результаты об отношениях между двумя компонентами, то есть, условия эквивалентности и критерий дизъюнктного объединения.

Изучение йонсоновских теорий унаров начинается с работ профессора Т.Г. Мустафина.

Характеристика семантической модели унаров была получена в работе [17] авторами Ешкеевым А.Р. и Мустафиным Т.Г. В работе [18], было доказано, что йонсоновская теория унаров совершенна.

Стоит заметить, что для того, чтобы описать некоторый класс частных алгебраических систем, определенных в соответствующем теоретико-модельном языке, может не существовать характеристики в соответствующем языке.

С другой стороны, важно заметить, что теория всех унаров – йонсоновская теория полигонов над циклическим моноидом. В частном случае, можно рассмотреть модели такой теории в форме алгебраической системы $\left\{M; f\right\}\_{\left\{f\in M\right\}}$, то есть $M× M\rightarrow M$, где $M$ – это циклический моноид.

$f\_{e}\left(a\right)=a $ для $e\in M$ и для всех $a\in M$;

$f\_{\left\{αβ\right\}}\left(a\right) = f\_{α}\left(f\_{β}\left(a\right)\right)$ для всех $a\in M$ и всех $α,$ $β\in M$.

Укажем, что под понятием циклического моноида будем. Понимать всякий гомоморфный образ свободного моноида с единственным порождающим элементом. Тривиально, любой циклический моноид изоморфен циклической группе, либо получен путем внешнего включения нейтрального элемента к циклической полугруппе.

Условия, при которых мы называем циклический полигон свободным, плоским или проективным, описаны в работе [19].

**Актуальность темы исследования.** Изучение полигонов над циклическим моноидом (унаров), полигонов над группой и теорий неориентированных графов, до проведённого диссертационного исследования, производилось в рамках рассмотрения их полных теорий. Поскольку исследование йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, неполны, уточняет и обобщает имеющиеся результаты классической теории моделей, актуальность данной работы не вызывает сомнений. При проведении исследования были изучены теории вышеперечисленных алгебраических систем в рамках такой новой тематики, как позитивная теория моделей, что вносит несомненный вклад не только в развитие определения теоретико-модельного аппарата йонсоновских теорий, но и в определение аппарат позитивных йонсоновских теорий, тематики слабо исследованной. Более того, полученные результаты связаны с описанием свойств и более подробным рассмотрением таких новых понятий как йонсоновский и робинсоновский спектр, а также семантическое йонсоновское квазимногообразие.

**Цель работы.** Основной целью диссертационной работы является исследование теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий полигонов, а также классов их моделей. Под йонсоновскими теориями полигонов понимаем: экзистенциально позитивные мустафинские теории полигонов над группой и их позитивный спектр; робинсоновские теории универсалов унаров и робинсоновские теории неориентированных графов, их робинсоновские спектры, построенные от семантических йонсоновских квазимногообразий соответствующих алгебраических систем; йонсоновские теории примитивов ($∀∃$-следствий) унаров в новой сигнатуре, обогащенной унарным предикатным символом, выделяющим экзистенциально замкнутую модель, и символами констант.

**Объект и предмет исследования.** Совершенные йонсоновские теории полигонов над группой, совершенные йонсоновские теории полигонов над циклическим моноидом и классы их моделей.

**Методика исследования.** В процессе исследования был использован семантический метод, который характеризуется переносом свойств йонсоновской теории на ее центр. Помимо этого, были применены методологии изучения из классической теории моделей и универсальной алгебры.

**Научная новизна.** Как следует из вышеперечисленного, проблема описания йонсоновских теорий алгебраических систем, что является основополагающей задачей тематики диссертационной работы, является актуальной. При исследовании данной проблемы были использованы новые понятия йонсоновского, в частности робинсоновского, спектра и йонсоновского семантического квазимногообразия. Более того, основной результат первого раздела исследования связан как с йонсоновскими теориями позитивного йонсоновского спектра, так и с не йонсоновскими. Ранее подобные случаи рассмотрены не были.

**Задачи исследования:**

1. Найти критерий косемантичности семантических моделей классов йонсоновских $∃PM$-теорий полигонов над группой множества $PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$.

2. Описать классы косемантичности множества $RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$ (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квзаимногообразия робинсоновских унаров) и соответствующих характеристик их семантических моделей $C\_{Δ}\in JC\_{U}$.

3. Описать классы косемантичности множества $RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$ (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квзаимногообразия робинсоновских унаров) $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров.

4. Описать йонсоновские примитивы унаров в сигнатуре, расширенной новым унарным предикатным символом $P^{1}$, выделяющим экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновского примитива унаров и символами констант.

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Работа носит теоретический характер, и ее практическая значимость оценивается прикладным значением теории моделей. Выполненное исследование является фундаментальным и вносит существенный научный вклад в развитие математических наук.

**Апробация полученных результатов.** На протяжении проведения диссертационного исследования, результаты были активно обсуждены во время участия в нескольких международных конференциях и научных семинарах, организованных для специалистов в области теории моделей и смежных дисциплин. Научные мероприятия позволили провести тщательную проверку и получить обратную связь от ведущих экспертов на результаты, полученные в ходе выполнения исследования. Перечислим более детально:

- Было произведено выступление с докладом на тему «Existentially positive Mustafin theories of S-acts over a group» [20] на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан. (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 6-8 апреля 2022 г.);

- На международной научной конференции актуальные задачи математики, механики и информатики, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина с докладом на тему «The perfect Jonsson S-acts» [21] (Карагандинский университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, 8–9 сентября 2022 г.) ;

- Выступление на третьих международных научных Таймановских чтениях на тему «Современная математика: проблемы и приложения» [22], посвященной 85-летию Кызылординского университета имени Коркыт Ата с докладом на тему «Позитивный йонсоновский спектр $∃PM$-теорий полигонов над группой» (Кызылординский университет имени Коркыт Ата, Кызылорда, 25 ноября 2022 г.);

- Результаты были апробированы в виде доклада на тему «On countable categoricity of semantic Jonsson quasivarieties of unars and graphs» [23] на традиционной международной апрельской конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 5-7 апреля 2023 г.);

- Выступление с докладом «On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars» [24] на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Алматы, 5-7 апреля 2023 г.);

- На научном семинаре «Теория моделей» им. Е.А. Палютина, Институт математики имени С.Л. Соболева (Новосибирск, Россия) совместно с Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан) с тематикой «Робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия унаров» (10 мая 2023 г.)

- На 7-м всемирном конгрессе математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023) с докладом на тему «On semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars» [25], «On semantic Jonsson quasivariety of undirected graphs» [26] (Туркестан, 20-23 сентября 2023 г.);

- «On ∆-Jonsson spectrum of ∆-PJ-theories» [27] доклад на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Механико-математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, 5-7 апреля 2024);

- Результаты были апробированы в виде докладов на тему «On quantity of equivalence classes of Robinson spectrum of unars»[28] и «On characteristic of equivalence classes of Robinson spectrum regarding their primitive» [29] на традиционной международной апрельской конференции в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Институт математики и математического моделирования, Механико-математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, Алматы, 5-7 апреля 2024);

- Выступление с докладом в период проведения 16-й международной летней школы-конференции «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (Институт математики имени С.Л. Соболева, 8-13 июля 2024 г.).

**Публикация и личный вклад автора.** Результаты проведенного диссертационного исследования нашли отражение в 14 научных публикациях. Среди них:

- 3 статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, которые индексируются в международной научной базе данных Scopus [30–32] (процентиль 46). Эти статьи содержат основные теоретические и практические выводы, сделанные в ходе исследования, и прошли экспертную оценку мирового научного сообщества.

- 1 статья, опубликованная в журнале, рекомендованном Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан [33]. Этот журнал соответствует национальным требованиям к качеству научных публикаций и является важной платформой для распространения результатов исследования среди казахстанских ученых.

- 10 работ, представленных в материалах международных научных и научно-практических конференций [20–29]. Эти материалы включают доклады, отражающие как промежуточные результаты, так и окончательные выводы исследования, что позволило автору обсудить их с международным научным сообществом и получить обратную связь.

Стоит отметить, что все публикации, выполненные в соавторстве, подготовлены при равнозначном вкладе всех участников. Это подчеркивает коллективный характер научной работы, в рамках которой каждый автор внес существенный вклад в постановку задачи, разработку методологии, анализ полученных данных и обсуждение результатов**.**

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационного исследования:

*Теорема 1.4.6.* [30, с. 179] Пусть $K\_{Π}$ – класс всех полигонов над группой, $\left[T\_{Π}\_{1}\right],\left[T\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$. Тогда

1. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы йонсоновских $∃PM$-теории, тогда $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=$ $ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right);$
2. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$– классы не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существуют такие классы йонсоновских $∃PM$-теории $\left[T'\_{Π}\_{1}\right],\left[T'\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, что $T'\_{Π}\_{i}$ – является оболочка Кайзера для$ T\_{Π}\_{i}$, где $i=1,2, C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]'}⋈\_{∃PM}$ $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]'}⇔ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$.
3. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ – класс йонсоновских $∃PM$-теории, и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – класс не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существует такая йонсоновская $∃PM$-теория $T'\_{Π}$, что $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{[T^{'}\_{Π}]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left([T'\_{Π}]^{\*}\right)$.

*Теорема 2.2.1.* [31, с. 174] Пусть $JC\_{U}$ – семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров, $\left[T\_{U}\_{i}\right]\in RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$.

1) Каждый класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ имеет характеристику.

2) Для любых произвольных характеристик существует класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ который имеет эту характеристику.

3) Два класса $\left[T\_{U}\_{1}\right],\left[T\_{U}\_{2}\right]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие характеристики равны.

*Теорема 2.3.7.* [32, с. 170] Пусть $[T\_{U}]$ – класс $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $A\in E\_{T\_{U}}$, где $A$ это модель класса $\left[T\_{U}\right]$;
2. $A$ это дизъюнктное объединение компонент с циклами одинаковой длины.

*Теорема 2.5.8.* [33, с. 24] Пусть $ \overbar{T}\_{∇} $ - йонсоновский примитив унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $ \overbar{T}\_{∇} $ - максимальный йонсоновский примитив унаров;

2) Теория$ \overbar{T}\_{∇} $ полна относительно $ ∇$.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа состоит из 62 страниц и следующих структурных элементов: введение, два раздела, заключение, список использованных источников.

**Краткое содержание основной части диссертационной работы.**

**В первом разделе** диссертационной работы отражены основные определения и теоремы классической теории моделей, а также результаты исследования, связанные с рассмотрением понятия йонсоновского спектра для фиксированного класса моделей сигнатуры полигонов над группой, в которых предполагается, что в полигонах группа функционирует в роли моноида. Понятие йонсоновского спектра оказывается особенно полезным при анализе теоретико-модельных характеристик классов алгебр, чьи теории удовлетворяют условиям совместного вложения и амальгамы. Как правило, для этого достаточно рассматривать универсально-экзистенциальные утверждения, истинные на моделях данного класса теорий. До информации, представленной в первом разделе данной диссертации, йонсоновский спектр изучался исключительно с позиции рассмотрения йонсоновских теорий. Однако изучение данного понятия позволило определить позитивный йонсоновский спектр, элементами такого спектра могут выступать теории, не являющиеся йонсоновскими. Это связано с тем, что при определении экзистенциально-позитивных мустафинских теорий, рассмотренных в данном разделе, применяются не только изоморфные вложения, но и погружения. Поэтому в формулировках свойств совместного вложения и амальгамы основное внимание уделяется именно погружениям. В итоге, полученные теории не обязательно будут йонсоновскими. Можно заметить, что вышеописанный подход к изучению йонсоновского спектра является оправданным, так как даже для теорий, которые не являются йонсоновскими, можно использовать регулярный метод для построения соответствующей йонсоновской теории, удовлетворяющей ранее установленным понятиям и результатам. При этом указанный метод в равной степени применим к экзистенциально-позитивной мустафинской теории, рассматриваемой в данной работе.

**Второй раздел** диссертационной работы посвящена изучению семантического йонсоновского квазимногообразия универсалов унаров, то есть структур сигнатуры, содержащей единственный одноместный функциональный символ и неориентированных графов сигнатуры, содержащей бинарный предикатный символ. В рамках исследования, как уже было подчеркнуто, были введены новые понятия, такие как семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров $JC\_{U}$ и его элементарная теория. Для того чтобы доказать основной результат работы, был проведен анализ робинсоновского спектра $RSp\left(JC\_{U}\right)$ и его разбиение на классы эквивалентности $[T\_{U}]$, сформированные на основе отношения косемантичности. Помимо этого, детально рассмотрены свойства и, что особенно важно, уникальные характеристики семантических моделей данных классов эквивалентности $[T\_{U}]\in RSp\left(JC\_{U}\right)$. Основной результат — это следующая теорема существования: характеристики каждого класса [$T\_{U}$], состоящего из робинсоновских теорий унаров; класса $[T\_{U}]$ для какой-либо произвольной характеристики; критерий эквивалентности двух классов $[T\_{U}\_{1}],[T\_{U}\_{2}]$. Далее были рассмотрены робинсоновские спектры $RSp\left(JC\_{U}\right)$ и $RSp\left(JC\_{G}\right)$ и их разбиение на классы эквивалентности $\left[T\_{U}\right]$ и $[T\_{G}]$ по отношению косемантичности. В результате проведенного исследования установлено следующее: робинсоновские теории унаров, обладающие счетной категоричностью, характеризуются тотальной категоричностью; аналогично, робинсоновские теории неориентированных графов, которые также являются счетно категоричными, обладают тотальной категоричностью во всех мощностях.

Вторая глава также позволяет рассмотреть теорию всех унаров и класс экзистенциально замкнутых моделей этой теории. Была рассмотрена расширенная сигнатура унаров, с помощью добавления нового символа одноместного предиката, выделяющего экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновской теории унара, и нового константного символа. Были получены некоторые результаты, касающиеся универсалов и примитивов экзистенциально замкнутых йонсоновских унаров рассматриваемой теории.

**Благодарность.** Автор диссертации выражает искреннюю и глубокую признательность уважаемому научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору Ешкееву Айбату Рафхатовичу, за его исключительно профессиональный подход, всестороннюю поддержку и неоценимый вклад в выполнение данного исследования. Его глубокие знания, ценные научные советы и высокий уровень компетентности послужили прочной основой для успешной реализации данной работы. Особенно хочу отметить его ключевую роль в постановке задачи, разработке структуры исследования и выборе методологии, что позволило четко определить цели и направления работы.

Также хочу выразить благодарность доктору физико-математических наук, профессору Судоплатову Сергею Владимировичу, за его мудрые наставления и ценные рекомендации, которые оказали существенное влияние на качество данного исследования, особенно за оказание профессиональной поддержки во время научной стажировки автора в Новосибирском академгородке.

Диссертационная работа была выполнена на кафедре алгебры, математической логики и геометрии им. профессора Т.Г. Мустафина Карагандинского университета им. академика Е.А. Букетова

.

1 Экзистенциально позитивные мустафинские теории полигонов над группой

Основной результат данного раздела относится к изучению свойств позитивного йонсоновского спектра теорий полигонов над группой и их классов моделей. Интерес в изучении теоретико-модельных аспектов теории полигонов возник относительно недавно и относится к работам В. Голд [34] и Т.Г. Мустафина $[35, 36]$. В работе [36], Т.Г. Мустафин доказал факт о том, что любая полная теория подобна в некотором смысле некоторой теории полигонов. Йонсоновские теории близко роднятся с теориями полигонов. Таким образом, в работе [37], были выведены связи между экзистенциально полной совершенной йонсоновской теорией и некоторой йонсоновской теорией полигона. В работе [37], было получено описание йонсоновских теорий полигонов над группой. Данный раздел позволяет осветить полученные результаты, обобщающие результаты из [37] как часть изучения позитивного спектра $∃PM$-теорий полигонов над группой.

1.1 Необходимые понятия из классической теории моделей

В математической логике используется язык первого порядка для описывания математических структур. К примеру, если существует необходимость изучения упорядоченных полей действительных чисел с экспоненциальной функцией, на самом деле мы рассматриваем структуру $\left(R,+,⋅,exp,<,0,1\right)$.

*Определение 1.1.1.* [38, с. 8] Сигнатура $σ$ может быть заданa с помощью следующих множеств:

1. Множеством функциональных символов $f\in F$;
2. Множеством предикатных символов $R\in R$;
3. Множеством константных символов $c\in C$.

Любые из приведенных в определении 1.1.1 множества могут быть пустыми. Текущее исследование неоднократно будет работать с сигнатурой, в которой присутствует только один единственный унарный функциональный символ, что, следовательно, приводит к выводу об отсутствии предикатных и константных символов. В качестве примеров сигнатур можно привести следующие множества символов:

1. Сигнатура колец $σ\_{r}=\{+,-,⋅,0,1\}$, где $+,-$ и $⋅$ — это бинарные функциональные символы и 0 и 1 – константы.
2. Сигнатура упорядоченных колец $σ\_{or}=σ\_{r}∪\{<\}$, где $<$ — это бинарный предикатный символ (символ отношения).
3. Сигнатура чистых множеств $σ=∅$.
4. Сигнатура графов $σ=R$, где R это символ бинарного отношения.
5. Сигнатура унаров $σ=f$, где $f$ – это символ унарной функции.

*Определение 1.1.2.* [39, с. 11] Язык $L$ сигнатуры $σ$ может быть представлен символами заданной сигнатуры $\{f, R,c\}$. То есть конечными множествами предикатных, функциональных и константных символов, а также логических символов $∨,∧,¬,\rightarrow ,\leftrightarrow $ и бесконечного множества переменных, используемых для построения языка. Языком $L$ сигнатуры $σ$ называется совокупность всех формул, которые можно сформировать, применяя символы сигнатуры σ и указанных выше множеств.

*Определение 1.1.3.* [40, с. 8] Будем представлять $L$-структуру $M$ (структуру заданного языка $L$) в виде набора $\left〈M,f^{M},R^{M},c^{M}\right〉$, где $f^{M},R^{M},c^{M}$ это соответствующие интерпретации символов сигнатуры $f,R,c$.

За исключением случаев, когда мы говорим иначе, любой из наборов определения 1.1.3 может быть пустым.

Изучим отображения, которые сохраняют интерпретации языка $L$.

*Определение 1.1.4.* [40, с. 35] Предположим, что $M$ и $N$ – $L$-структуры с носителями $M$ и $N$, соответственно. $L$-вложение $η:M\rightarrow N$ – это отображение 1-1 $η:M\rightarrow N$, такое, что сохраняются интерпретации всех символов языка $L$.

Биективное $L$-вложение называется $L$-изоморфизмом. Если $M⊆N$ и отображение является $L$-вложением, мы говорим, что $M$ – подструктура структуры $N$ или что $N$ – расширение структуры $M$. К примеру:

1. $(Z,+,0)$ – подструктура $(R,+,0)$.
2. Если $η:Z\rightarrow R$ - функция $η(x)=e^{x}$, тогда $η$ – это $L\_{g}$-вложение структуры $(Z,+,0)$ в структуру $(R,⋅,1)$.

Мощность структуры $M$ – это $|M|$, мощность носителя $M$. Если $η:M\rightarrow N$ – это вложение, тогда мощность структуры $N$ как минимум равна мощности $M$.

С помощью символов сигнатуры $σ$ и языка первого порядка $L$ создаем формулы, описывающие свойства $L$-структур. Формулы будут представлены в виде набора символов, созданных с использованием символов языка $L$, символов переменных $v\_{1},v\_{2},…$, символа равенства $=$, булевыми логическими связками $∧,∨$, и $¬$, которые читаются как "и," "или," и "не", кванторы $∃$ и $∀$, которые читаются как "существует" и "для любого", и круглые скобки ( , ).

*Определение 1.1.5* [38, с. 9] Множество $L$-термов, это самое маленькое множество $T$ такое, что:

1. $c\in T$ для всякого символа константы $c\in C$,
2. всякий символ переменных $v\_{i}\in T$ для $i=1,2,…$, и
3. если $t\_{1},…,t\_{n\_{f}}\in T$ и $f\in F$, тогда $f\left(t\_{1},…,t\_{n\_{f}}\right)\in T$.

Например, $\left(v\_{1},-\left(v\_{3},1\right)\right),⋅\left(+\left(v\_{1},v\_{2}\right),+\left(v\_{3},1\right)\right)$ и $+(1,+(1,+(1,1)))$ - $L\_{r}$-термы (термы языка колец). Для простоты обычно записываем эти термы в более стандартном обозначении $v\_{1}\left(v\_{3}-1\right),\left(v\_{1}+v\_{2}\right)\left(v\_{3}+1\right)$, и $1+(1+(1+1$. В $L\_{r}$-структуре $(Z,+,⋅,0,1)$, под термом $1+(1+(1+1))$ подразумевается элемент 4, когда $\left(v\_{1}+v\_{2}\right)\left(v\_{3}+1\right)$ – это терм, обозначающий функцию $(x,y,z)↦(x+y)(z+1)$.

Предположим, что $M$ – это $L$-структура и что $t$ – терм, записанный с использованием переменных из кортежа $‾=\left(v\_{i\_{1}},…,v\_{i\_{m}}\right)$. Для того, чтобы интерпретировать терм $t$, можно рассмотреть его в качестве функции $t^{M}:M^{m}\rightarrow M$. Пусть $s$ является подтермом терма $t$, а $‾=\left(a\_{i\_{1}},…,a\_{i\_{m}}\right)\in M$. По индукции, увеличивая сложность, определим представление $s^{M}(‾)$ следующим образом.

1. Если $s$ – константный символ $c$, то $s^{M}(‾)=c^{M}$.
2. Если $s$ – переменная $v\_{i\_{j}}$, то $s^{M}(‾)=a\_{i\_{j}}$.
3. Если $s$ – терм $f\left(t\_{1},…,t\_{n\_{f}}\right)$, где $f$ является функциональным символом языка$,$ а $t\_{1},…,t\_{n\_{f}}$ – термы, то $s^{M}(‾)=f^{M}\left(t\_{1}^{M}(‾),…,t\_{n\_{f}}^{M}(‾)\right)$.

Функция $t^{M}$ определяется с помощью $‾↦t^{M}(‾)$.

К примеру, пусть $L=\left\{f,g,c\right\}$, где $f$ – унарный функциональный символ, $g$ – бинарный функциональный символ, и $c$ – константный символ. Рассмотрим $L$-термы $t\_{1}=g\left(v\_{1},c\right),t\_{2}=f\left(g\left(c,f\left(v\_{1}\right)\right)\right)$, и $t\_{3}=g\left(f\left(g\left(v\_{1},v\_{2}\right)\right),g\left(v\_{1},f\left(v\_{2}\right)\right)\right)$. Пусть $M$ - $L$-структура $(R,exp,+,1);$ то есть, $f^{M}=exp,g^{M}=+$, и $c^{M}=1$.

Тогда

$$\begin{matrix}t\_{1}^{M}\left(a\_{1}\right)=a\_{1}+1\\t\_{2}^{M}\left(a\_{1}\right)=e^{1+e^{a\_{1}}}, и \\t\_{3}^{M}\left(a\_{1},a\_{2}\right)=e^{a\_{1}+a\_{2}}+\left(a\_{1}+e^{a\_{2}}\right)\end{matrix}$$

Определим $L$-формулы следующим образом.

*Пример 1.1.1* Графы. Граф $G=\{V,E\}$, где $V$ (множество вершин) и множества $E$ (множество ребер). Возможно изобразить конечный неориентированный граф, как указано на Рисунке 1.1.1, указав точки для вершин и соединив две вершины $v, w$ линией, тогда {$v, w$} является ребром:



*Рисунок 1.1.1*. Конечный, неориентированный граф $G$

Существует естественный способ превратить граф $G$ в структуру, заключается он в следующем. Элементами множества носителя $G$ являются вершины. Есть одно бинарное отношение $R^{G}$; упорядоченная пара ($v, w$) лежит в $R^{G}$, тогда и только тогда, когда есть ребро, соединяющее вершины $v$ и $w$.

*Определение 1.1.6* [39, с. 9] Говорим, что $ϕ$ – атомарная $L$-формула, если $ϕ$, обозначим множество всех атомарных формул языка через $A$:

1. $t\_{1}=t\_{2}$, где $t\_{1}$ и $t\_{2}$ - термы, или
2. $R\left(t\_{1},…,t\_{n\_{R}}\right)$, где $R\in R$ и $t\_{1},…,t\_{n\_{R}}$ - термы.

Множество $L$-формул – это самое маленькое множество $W$, содержащее формулы такие, что

1. если $ϕ$ в $W$, тогда $¬ϕ$ также в $W$,
2. если $ϕ$ и $ψ$ в $W$, тогда $(ϕ∧ψ)$ и $(ϕ∨ψ)$ также в $W$, и
3. если $ϕ$ в $W$, тогда $∃v\_{i}ϕ$ и $∀v\_{i}ϕ$ также в $W$.

Приведем некоторые примеры $L\_{or }$-формул.

* $v\_{1}=0∨v\_{1}>0$.
* $∃v\_{2}v\_{2}⋅v\_{2}=v\_{1}$.
* $∀v\_{1}\left(v\_{1}=0∨∃v\_{2}v\_{2}⋅v\_{1}=1\right)$.

Интуитивно понимая, можем прийти к выводу, что первая формула обозначает $v\_{1}\geq 0$, вторая обозначает тот факт, что $v\_{1}$ – это число во второй степени, и третье обозначает, что каждый ненулевой элемент имеет обратный элемент относительно произведения. Определим, что значит формула верна на структуре, но следующие примеры могут представить одну сложность. В то время как в $L\_{or }$-структуре третья формула будет либо верна, либо ложна, первые две формулы выражают свойство, которое может или не может быть верно для определенных элементов структуры. В $L\_{or }$-структуре $(Z,+,-,⋅,<,0,1)$, вторая формула будет верна для 9, но ложна для 8.

Говорим, что переменная $v$ находится свободно в формуле $ϕ$, если переменная не находится под квантором $∃v$ или $∀v$; в противном случае говорим, что переменная связана. К примеру, вхождение переменной $v\_{1}$ свободно в первых двух формулах и связано в третьей, в то время как $v\_{2}$ связана в обеих формулах. Назовем формулу предложением, если в ней нет свободных переменных.

Пусть $M$ - $L$-структура. Говорим, что всякое $L$-предложение либо верно, либо ложно в $M$. С другой стороны, если $ϕ$ – это формула со свободными переменными $v\_{1},…,v\_{n}$, будем говорить, что такая формула $ϕ$ выражает свойство элементов $M^{n}$. Часто будем записывать $ϕ\left(v\_{1},…,v\_{n}\right)$ , для того чтобы выделить свободные переменные в $ϕ$. Необходимо определить, что означает выполнение формулы $ϕ\left(v\_{1},…,v\_{n}\right)$ на элементах $\left(a\_{1},…,a\_{n}\right)\in M^{n}$.

*Определение 1.1.7.* [38, с. 11] Пусть $ϕ$ – формула со свободными переменными из кортежа $‾=$ $\left(v\_{i\_{1}},…,v\_{i\_{m}}\right)$, и пусть $‾=\left(a\_{i\_{1}},…,a\_{i\_{m}}\right)\in M^{m}$. Индуктивно определим $M⊨ϕ(‾)$ следующим образом.

1. Если $ϕ$ - $t\_{1}=t\_{2}$, тогда $M⊨ϕ(‾)$ если $t\_{1}^{M}(‾)=t\_{2}^{M}(‾)$.
2. Если $ϕ$ - $R\left(t\_{1},…,t\_{n\_{R}}\right)$, тогда $M⊨ϕ(‾)$ если $\left(t\_{1}^{M}(‾),…,t\_{n\_{R}}^{M}(‾)\right)\in R^{M}$.
3. Если $ϕ$ - $¬ψ$, тогда $M⊨ϕ(‾)$ если $M⊭ψ(‾)$.
4. Если $ϕ$ - $(ψ∧θ)$, тогда $M⊨ϕ(‾)$, если $M⊨ψ(‾)$ и $M⊨θ(‾)$.
5. Если $ϕ$ - $(ψ∨θ)$, тогда $M⊨ϕ(‾)$, если $M⊨ψ(‾)$ или $M⊨θ(‾)$.
6. Если $ϕ$ - $∃v\_{j}ψ\left(‾,v\_{j}\right)$, тогда $M⊨ϕ(‾)$, если существует $b\in M$ такой, что $M⊨ψ(‾,b)$.
7. Если $ϕ$ - $∀v\_{j}ψ\left(‾,v\_{j}\right)$, тогда $M⊨ϕ(‾)$, если $M⊨ψ(‾,b)$ для всех $b\in M$.

Если $M⊨ϕ(‾)$, говорим, что $M$ удовлетворяет $ϕ(‾)$ или $ϕ(‾)$ верно в $M$.

*Предложение 1.1.1.* [38, с. 11] Пусть $M$ – подструктура структуры $N,$ кортеж $‾\in M$, и $ϕ(‾)$ – это бескванторная формула. Говорим, что модель $M$ удовлетворяет формуле $ϕ(‾)$ тогда и только тогда, когда модель $N$ также удовлетворяет формуле $ϕ(‾)$.

*Определение 1.1.8.* [40, с. 53] Элементарно эквивалентные $L$-структуры $M$ и $N$ это такие две структуры, что для любой формулы $ϕ$ выполняется: $M⊨ϕ$ тогда и только тогда, когда $N⊨ϕ$. В этом случае записывают $M≡N$.

$L$-теория $T$ представляет собой набор $L$-предложений. Структура $M$ называется моделью теории $T$, пишем $M⊨T$, если $M⊨ϕ$ для всех предложений $ϕ\in T$.

Множество $T=\{∀xx=0,∃xx\ne 0\}$ является теорией. Но так как перечисленные два предложения в $T$ противоречивы, класс моделей данной теории $T$ будет пуст. Будем называть теорию совместной, если она имеет модель.

Говорим, что класс $L$-структур $K$ – это элементарный класс, если существует $L$-теория $T$, такая что $K=\{M:M⊨T\}$.

Можно привести некоторые примеры теорий и элементарных классов.

*Пример 1.1.2.* Отношения эквивалентности. Пусть $σ=\left\{E\right\}$, где $E$ – символ бинарного отношения. Теория отношений эквивалентности задана следующими предложениями: $∀xE\left(x,x\right),$ $∀x∀y\left(E\left(x,y\right)\rightarrow E\left(y,x\right)\right)$, $∀x∀y∀z\left(\left(E\left(x,y\right)∧E\left(y,z\right)\right)\rightarrow E\left(x,z\right)\right)$

Если добавить предложение $∀x∃y(x\ne y∧E(x,y)∧∀z(E(x,z)\rightarrow (z=x∨z=y)))$, то получим теорию отношений эквивалентности, в которой каждый класс эквивалентности имеет в точности два элемента. Если вместо этого добавим предложение $∃x∃y(¬E(x,y)∧∀z(E(x,z)∨E(y,z)))$ и бесконечное множество предложений $∀x∃x\_{1}∃x\_{2}…∃x\_{n}\left(\bigwedge\_{i<j\leq n}^{}  x\_{i}\ne x\_{j}∧\bigwedge\_{i=1}^{n}  E\left(x,x\_{i}\right)\right),$ мы аксиоматизируем классы отношений эквивалентности с в точности двумя классами, и они оба будут бесконечными.

*Пример 1.1.3.* Графы. Пусть $σ=\{R\}$, где $R$ – бинарное отношение. Ограничимся иррефлексивными графами. Они аксиоматизируются только двумя предложениями $∀x¬R(x,x)$, $∀x∀y(R(x,y)\rightarrow R(y,x))$.

*Пример 1.1.4.* Группы. Пусть $σ=\{⋅,e\}$, где $⋅$ - бинарный функциональный символ и $e$ – символ константы. Будем писать $x⋅y$ вместо $⋅(x,y)$. Класс групп аксиоматизирован следующими предложениями:

$$\begin{matrix}&∀xe⋅x=x⋅e=x\\&∀x∀y∀zx⋅(y⋅z)=(x⋅y)⋅z\\&∀x∃yx⋅y=y⋅x=e\end{matrix}$$

Также, к примеру, возможно аксиоматизировать класс абелевых групп, добавляя $∀x∀yx⋅y=$ $y⋅x$.

Пусть $T$ - $L$-теория и $ϕ$ - $L$-предложение. Чтобы показать $T⊨ϕ$, необходимо показать, что $ϕ$ выполняется в каждой модели теории $T$. На практике, обычно показывают, что $T⊨ϕ$ с помощью приведения неформального математического доказательства, связанного с тем фактом, что формула $ϕ$ истинна в каждой модели теории $T$. Одним из самых выдающихся достижений математической логики было предоставление жесткого определения «доказательства», что точно захватывает понятие «логического следствия». Доказательство формулы $ϕ$ из теории $T$ – это конечная последовательность $L$-формул $ψ\_{1},…,ψ\_{m}$, таких, что $ψ\_{m}=ϕ$ и $ψ\_{i}\in T$ или $ψ\_{i}$ следует из $ψ\_{1},…,ψ\_{i-1}$ согласно простого логического правила для всякого $i$. Будем писать $T⊢ϕ$ , если существует доказательство формулы $ϕ$ из $T$. Примерами «простых» логических правил можно считать следующие: «из $ϕ$ и $ψ$ следует $ϕ∧ψ$» или «из $ϕ∧ψ$ следует $ϕ$». В рамках текущего диссертационного исследования не будем вдаваться в подробности произведения описанной выше системы доказательства, но отметим следующие моменты. (Смотрите [94], к примеру, для детализированного изучения одной из возможных систем доказательств.)

* Доказательства конечны.
* Если $T⊢ϕ$, то $T⊨ϕ$.
* Если $T$ – это конечное множество предложений, тогда существует алгоритм, который, когда дана последовательность $L$-формул $ψ$ и $L$-предложение $ϕ$, будет определять является $ψ$ доказательством формулы $ϕ$ из $T$ или нет.

*Теорема 1.1.1.* [38, с. 34] Теорема полноты Геделя формулируется следующим образом: если $T$ является $L$-теорией, а $ϕ$ — $L$-предложением, то $T$ логически выводит $ϕ$ ($T⊢ϕ$) тогда и только тогда, когда $ϕ$ выполняется во всех моделях $T$ ($T⊨ϕ$).

Теорема полноты дает критерий, который позволит проверить $L$-теорию на совместность. $L$-теория $T$ определяется как несовместная, если существует предложение $ϕ$, для которого из $T$ выводится противоречие в виде $(ϕ∧¬ϕ)$. Если же ни одно такое предложение не выводится, $T$ называется совместной, так как она не содержит логических противоречий.

*Определение 1.1.9.* [37, с. 40] $L$-теория $T$ называется полной теорией, если для любого $L$-предложения $ϕ$ выполняется либо $T⊨ϕ$, либо $T⊨¬ϕ$.

Для $M$ - $L$-структуры, элементарная (полная) теория будет иметь вид $Th(M)=\{ϕ:ϕ  -  L-предложение и M⊨ϕ\}$.

*Определение 1.1.10.* [40, с. 66] Пусть $κ$ – бесконечный кардинал и пусть $T$ – теория с моделями мощностью $κ$. Говорим, что теория $T$ - $κ$-категоричная теория, если любые две модели теории $T$ кардинальности $κ$ являются изоморфными.

Приведем простой пример $κ$-категоричной теории. Пусть $σ$ – пустая сигнатура. Тогда теория бесконечных множеств - $κ$-категоричная для всех кардиналов $κ$.

*Определение 1.1.11.* [38] Универсальное предложение имеет вид $∀‾ϕ(‾)$, где $ϕ$ – бескванторная формула. Говорим, что $L$-теория $T$ имеет универсальную аксиоматизацию, если существует множество универсальных $L$-предложений $Γ$ такое, что $M≡Γ$ тогда и только тогда, когда $M≡T$ для всех $L$-структур $M$.

$∀∃$-аксиоматизируемость может быть определена похожим способом.

*Теорема 1.1.3.* [39, с. 30] $L$-теория $T$ устойчива относительно подструктур тогда и только тогда, когда она имеет универсальную аксиоматизацию.

*Определение 1.1.12.* [38, с. 72] Теория, обладающая свойством элиминации кванторов, это такая теория языка $L$, что для каждой формулы $ϕ$ существует такая бескванторная формула $ψ$, что выполняется следующее равенство $T⊨ϕ\leftrightarrow ψ$

*Предложение 1.1.1.* [38, с. 78] Если теория $T$ имеет элиминацию кванторов, то $T$ – модельно полна.

Далее по тексту диссертационной работы понятия носителя структуры и самой структурой будет считаться эквивалентным. Если мы пишем $a\in A$, подразумевается, что элемент $a\in A$, где $A$ – носитель структуры $A$.

1.2 Необходимые понятия из позитивной теории моделей

Интерес к позитивным теориям возник после появления работ [41-43]. В этих работах показано, что вся классическая теория моделей первого порядка – это специальный случай позитивной теории моделей, определенных с помощью данных работ. Следовательно, в рамках позитивности [43], были указаны позитивные йонсоновские теории [44]. Стоит также отметить, что позитивная логика является фрагментом логики первого порядка, в которой не используется отрицание; ее теория моделей состоит из изучения классов моделей (позитивно) экзистенциально замкнутых моделей определенных универсальных теорий. В настоящем разделе, мы не используем позитивность в смысле работы [44], остаемся в пределах теории моделей первого порядка, но обобщаем эти понятия в классах теорий, которые были рассмотрены в [6-9]. Сфокусируемся на коротком описании некоторых ключевых понятий из работ [41, 42], которые будут необходимы в текущем разделе. А именно, понятия минимального фрагмента и те морфизмы, что совпадают с ними и использованы в изучении позитивных йонсоновских теорий в работах [7-9].

Позитивный фрагмент (в языке первого порядка $L$) – это такое подмножество $Δ⊆L$, которое содержит все атомарные формулы этого языка и является замкнутым относительно замены переменных, позитивных булевых комбинаций (булевы комбинации без отрицания) и подформул. Для такого подмножества $Δ$ были определены следующие множества формул: $Σ=Σ\left(Δ\right)=\left\{∃yφ\left(x,y\right):φ\in Δ\right\}, Π=Π(Δ)=\{∀yφ(x,y):φ\in Δ\}=\{¬ψ:ψ\in Σ(Δ)\}$.

Таким образом, $Σ$ – это множество позитивных экзистенциальных формул (замыкание позитивного фрагмента $Δ$ относительно экзистенциальных квантификаций), $Π$ – это множество отрицательных универсальных формул. Заметим, что $Σ(Δ$) также является позитивным фрагментом.

Позитивные формулы – это те формулы, которые мы получаем из атомарных формул с помощью символов $∨,∧,∃$; в таких формулах не используются кванторы универсальности; их семантика является обычной, будучи приведенной в пренексную нормальную форму, позитивная формула записывается как блок экзистенциальных кванторов перед свободной позитивной переменной ($∃\overbar{x}$) $φ(\overbar{x})$, где $φ$ – позитивная бескванторная формула, то есть без количественный квантификаций; последнюю можно записать в дизъюнктной форме, то есть как дизъюнкцию конъюнкций атомарных формул. Каждая формула первого порядка логически эквивалентна пренексной формуле первого порядка. Следующие определения необходимы для рассмотрения условий, при которых теория называется экзистенциально замкнутой позитивной мустафинской теорией.

*Определение 1.2.1.* [42, с. 32] Пусть $M$ и $N$ структуры языка $L$, $A⊆M$ ($A$ – подмножество носителя структуры $M$), и $f:A\rightarrow N$ – это отображение (то есть, $f:M\rightarrow N$ – это частичное отображение со множеством $dom\left(f\right)=A$). Если для каждого кортежа $\overbar{a}\in A$ и каждой формулы $φ\left(x\right)$ позитивного фрагмента $Δ$ из выполнимости формулы на одной структуре ($M⊨φ(\overbar{a})$) следует, что ее образ выполняется на другой структуре ($N⊨φ(f(\overbar{a})))$,то отображение $f$ называется частичным $Δ$-гомоморфизмом,

Если множество $dom(f)=A=M$, тогда $f:M\rightarrow N$ – это $Δ$-гомоморфизм; если $M=N$, тогда $f$ – это (частичный) эндоморфизм и др.

*Определение 1.2.2.* [41, с. 90] $Π$-теория – это множество $Π$-предложений, замкнутых относительно выводимости.

*Определение 1.2.3.* [42, с. 32] Пусть$U$ – структура языка $L$. Тогда назовем $U$ $κ$-универсальной областью ($κ$ – относительно большой кардинал (как минимум $κ>|Δ|$), если она удовлетворяет свойствам $κ$-однородности и $κ$-компактности в рамках позитивности.

Далее по тексту будем опускать обозначение $κ$-универсальной области $U$ и будем говорить – универсальная область $U$.

*Определение 1.2.4.* [41, с. 90] Пусть $M$ – модель теории $T$. Если каждый $Δ$-гомоморфизм $f:M\rightarrow N$ такой, что структура $N$ также является моделью теории $T$, и $f:M\rightarrow N$ – это $Σ$-вложение, тогда назовем $T$-модель $M$ назовем экзистенциально замкнутой моделью.

Другими словами, определение 1.2.4, для того чтобы модель $M$ теории $T$ была экзистенциально замкнутой моделью, необходимо, чтобы для каждой формулы $φ\left(\overbar{x}\right)\in Σ(Δ)$ и каждого кортежа $\overbar{a}\in M$, если $N⊨φ(f(\overbar{a}))$, то $M⊨φ(\overbar{a})$.

*Определение 1.2.5.* [42, с. 33] Пусть $U$ – это универсальная область и $T=Th\_{Π}(U)$ (т.е. множество $Π$-предложений истинных в $U$). Тогда, говорим, что $U$ – это универсальная область для теории $T$.

*Определение 1.2.6.* [42, с. 35] $Π$-теория $T$ является полной теорией, если она равна $Th\_{Π}(M)$ для некоторой структуры $M$ языка $L$.

Если $T$ не полна, тогда пополнение теории $T$ – это минимальная (относительно включения) полная $Π$-теория, содержащая $T$. В этом случае, универсальная область теории $T$ – это универсальная область для любых ее пополнений, т.е., универсальная область, чья $Π$-теория – это пополнение теории $T$.

*Лемма 1.2.1.* [42, с. 33] Пусть $T$ – $Π$-теория. Тогда для каждой модели $M⊨T$ существует экзистенциально замкнутая модель $N$ и морфизм $M\rightarrow N$.

В данном контексте морфизмы играют роль элементарных вложений классической теории моделей и имеют некоторые из их свойств [41].

*Теорема 1.2.1.* [42, с. 35] 1. Пополнения $Π$-теории это в точности $Π$-теории ее различных экзистенциально замкнутых моделей.

2. $Π$-теория называется позитивной робинсоновской теорией тогда и только тогда, когда все её пополнения являются позитивными робинсоновскими теориями.

3. Полная $Π$-теория называется позитивной робинсоновской теорией, тогда и только тогда, когда она имеет универсальную область (т.е. это $Π$-теория универсальной области).

*Предложение 1.2.1.* [41, с. 99] Для $Π$-теории $T$ следующие условия эквивалентны:

1. $T$ – позитивная робинсоновская теория.
2. Класс экзистенциально замкнутых моделей теории $T$ – аксиоматизируем множеством всех предложений в виде: $∀x\left[∃y φ\left(x,y\right)\leftrightarrow ⋀\left\{¬ψ\left(x\right):T⊢¬∃x,y ψ\left(x\right)∧φ\left(x,y\right)\right\}\right]$*.*

**1.3 Экзистенциально позитивные мустафинские теории и их свойства**

Определим понятие и свойства экзистенциально позитивной мустафинской теории ($∃PM$-теории). Таким образом, класс теорий устойчив относительно гомоморфизмов. Если некоторое фиксированное $T$, рассматриваемая $∃PM$-теория йонсоновская в классическом смысле, тогда мы применяем все понятия и результаты, известные ранее, то есть, как в [45, 46].

Согласно работам Бен Яакова $[41, 42]$ рассмотрим $Δ$-морфизмы между структурами.

*Определение 1.3.1.* [45, с. 233] Пусть $Δ⊆B\left(L^{+}\right)$ (подмножество произвольных булевых комбинаций языка $L^{+}$), $M$ и $N$ – структуры языка. Если для любой $φ\left(‾\right)$ позитивного фрагмента $Δ,$ для любого кортежа $‾$ структуры $M$ из того факта, что на $M $выполняется формула $φ(‾)$, следует, что на $N⊨φ(h(‾))$, тогда отображение $h:M\rightarrow N$ называется $Δ$-гомоморфизмом (символично $h:M\rightarrow \_{Δ}N$).

То есть, $Δ$-гомоморфизмом $L^{+}$-структуры $M$ в $L^{+}$-структуру $N$ называется отображение $h$ носителя $M$ к носителю $N$ осуществленное таким образом, что для любого кортежа $‾\in M$ любая формула (из подмножества произвольных булевых комбинаций формул языка $L^{+}$), удовлетворяемая кортежем $‾$, удовлетворяется также и кортежом $h(‾)$. Поскольку возможно, что $h(‾)$ удовлетворяет большему количеству формул, чем $‾$, гомоморфизм не обязательно инъективен. Модель $M$ называется началом в $N$ и говорим, что $M$ продолжается в $N$, и $h(M)$ назовем продолжением модели $M$.

*Определение 1.3.2.* [45, с. 233] Пусть $C$ – это класс $L$-структур. Тогда элемент $M$ класса $C$ является $Δ$-позитивно экзистенциально замкнутой структурой в классе $C$, если каждый $Δ$-гомоморфизм из $M$ к любой структуре из $C$ является $Δ$-погружением.

Далее по тексту раздела $Δ=B^{+}\left(A\right)$ и в случае, когда рассматриваемая теория не йонсоновская в связи с рассматриваемой позитивностью (поскольку $n$-погружение это не то же самое, что и $n$-вложение), используем универсальную область (определение 1.2.3) вместо $C\_{T}$. Позитивный фрагмент $Δ=B^{+}\left(A\right)$ равный позитивным булевым комбинациям атомарных формул, совместный с вышеперечисленными определениями, удовлетворяет минимальному фрагменту из работы Бен Яакова [40] и является совместным с определением $∃PM$-теории (определение 1.3.6).

Пусть $n\in \left[0,ω\right].$ Будем говорить, что $Π\_{n}^{+}$-формула – это формула в языке $L^{+}=Q(B^{+}\left(A\right))$, которая, при представлении в пренексной нормальной форме отвечает следующим требованиям:

1. Начинается с $n $переменных кванторов
2. Формула начинается с квантора всеобщности $∀$.

Пример для $n=1$: $∀x∃yφ(x,y)$, где $φ(x,y)$ – бескванторная формула.

$Σ\_{n}^{+}$-формула – это формула языка $L^{+}$, которая, когда представлена в пренексной нормальной форме отвечает следующим требованиям:

1. Начинается с $n$ переменных кванторов
2. Формула начинается с квантора существования $∃$.

Пример для $n=1$: $∃y∀xφ(x,y)$, где $φ(x,y)$ – бескванторная формула.

*Определение 1.3.3.* [30, с. 175] Модель $A$ теории $T$ называется позитивно экзистенциально замкнутой относительно $Σ\_{n}$-формул, если для любой формулы $φ\left(\overbar{x}\right)$, являющейся $Σ\_{n}^{+}$-формулой, для любого кортежа $‾\in A$, для любой модели $B⊃A$, из того факта, что на $B$ выполняется формула $φ\left(‾\right)$ следует, что на $A$ выполняется формула $φ(‾)$.

Перейдем к определению краеугольного типа теорий, связанных с основных результатом раздела и для этого введем определения следующих необходимых свойств моделей.

*Определение 1.3.4.* [30, с. 175] Если для любых двух моделей $A,B$ из множества всех позитивных экзистенциально замкнутых относительно $Σ\_{n}$-формул моделей теории $T$ найдется третья модель $C$ из того же множества, такая, что существуют следующие $Δ$-гомоморфизмы $h\_{1}:A\rightarrow \_{Δ}C,h\_{2}:B\rightarrow \_{Δ}C$, тогда говорим, что теория $T$ допускает свойство $∃\_{n}JEP$ (свойство совместного вложения для множества всех позитивных экзистенциально замкнутых относительно $Σ\_{n}$-формул моделей теории $T$).

*Определение 1.3.5.* [30, с. 175] Если для любых трех моделей $A,B,C$ из множества всех позитивных экзистенциально замкнутых относительно $Σ\_{n}$-формул моделей теории $T$ таких, что $h\_{1}:A\rightarrow \_{Δ}C,g\_{1}:A\rightarrow \_{Δ}B$, где $h\_{1},g\_{1}$ – это $Δ$-гомоморфизмы, найдется такая $D$ из того же множества, что $h\_{2}:C\rightarrow \_{Δ}D$, $g\_{2}:B\rightarrow \_{Δ}D$, где $h\_{2},g\_{2}$ – это $Δ$-гомоморфизмы и выполняется равенство $h\_{2}∘h\_{1}=g\_{2}∘g\_{1}$, тогда говорим, что теория $T$ допускает свойство $∃\_{n}AP$ (свойство амальгамирования для множества всех позитивных экзистенциально замкнутых относительно $Σ\_{n}$-формул моделей теории $T$).

Если рассмотрим $Δ$-гомоморфизмы как $Δ$-погружения, тогда получим определение так называемой $∃PM$-теории.

1. *Определение 1.3.6.* [30, с. 175] Пусть $n\in [0,ω]$. Непротиворечивое, дедуктивно замкнутое множество предложений $T$ называется экзистенциально позитивной мустафинской теорией ($∃PM$-теорией), если в классе ее моделей найдется как минимум одна бесконечная модель; она является $Π\_{n+2}^{+}$-аксиоматизируемой (ее аксиомы содержат как минимум два$ $переменных квантора и начинаются с квантора всеобщности $∀$), допускает свойства $∃\_{n}JEP$ и $∃\_{n}AP$.

*Определение 1.3.7.* [30, с. 175] При $n=0$ будет называть $∃PM$-теорию – экзистенциально замкнутой йонсоновской теорией и обозначим ее как $∃PJ$-теория.

Сравним определение 1.3.6. с определением йонсоновской теории.

*Определение 1.3.8.* [45, с. 180] Непротиворечивое, дедуктивно замкнутое множество предложений $T$ называется йонсоновской теорией, если в классе ее моделей найдется как минимум одна бесконечная модель, она является $∀∃$-аксиоматизируемой (индуктивной, устойчивой относительно цепей моделей, $Π\_{1}$-аксиоматизируемой), она обладает свойством $JEP$ и $AP$.

Заметим, что первой условие допускает тот факт, что в классе моделей теории $T$ могут существовать конечные модели. Второе условие гарантирует, что такая теория $T$ устойчива относительно свойства «быть моделью» относительно цепей ее моделей.

Вспомним некоторые необходимые понятия из йонсоновских теорий и их теоретико-модельные свойств. Заметим следующий факт из работы [34].

*Факт 1.3.1.* [3] Индуктивная теория $T$ ($∀∃$-аксиоматизируемая теория $T$) языка $L$ является йонсоновской теорией тогда и только тогда, когда найдется семантическая модель рассматриваемой $L$-теории $T$.

Крайне важный факт, который будет использоваться для доказательств основных результатов диссертационной работы, будет неоднократно на него ссылаться. Следующее определение было отмечено во вступительном слове исследования.

*Определение 1.3.9.* $[3]$ Пусть $T$ – йонсоновская теория. Модель $C\_{T}$ мощности $2^{ω}$ называется семантической моделью теории $T$ если $C\_{T}$ – это $ω^{+}$-однородная $ω^{+}$-универсальная модель теории $T$.

Определение, ниже, было разработано и предложено профессором Т.Г. Мустафиным в рамках его научной работы. Оно представляет собой значительный вклад область исследований йонсоновских теорий.

*Определение 1.3.10.* [45, с. 187] Элементарная теория семантической модели йонсоновской теории $T$ называется центром (йонсоновским пополнением, центральным пополнением) этой теории. Обозначим центр как $T^{\*}$, т.е. $Th(C\_{T})=T^{\*}$.

Важно заметить, что согласно определению 1.3.10 центр йонсоновской теории является полной теорией. Однако, несмотря на то что эта теория является полной, не исключен тот факт, что она также может быть йонсоновской теорией. Такая теория также будет иметь только бесконечные модели.

Как уже было указано во вступительном слове диссертационного исследования, при изучении йонсоновских теорий основным инструментом их исследования является семантический метод. В этом случае, $Th(C\_{T})=T^{\*}$. (определение 1.3.9) имеет смысл сравнить с позитивной робинсоновской теорией по Бен Яакову, при сравнении эти теории оказались похожими, что делает такую теории инвариантом рассматриваемой йонсоновской теории. Опираясь на такое замечание, делаем вывод, что если $∃PJ$-теория не является йонсоновской теорией, то есть некоторые из условия определения 1.3.8 не выполняются, тогда вместо семантической модели будет целесообразным рассматривать универсальную область $U$ (определение 1.2.3) и в качестве центра $Th(C\_{T})=T^{\*}$ рассматривать множество предложений, состоящее из $∀∃$-следствий универсальной области $U$: $T^{0}=Th\_{∀∃}(U)$, т.е. оболочку Кайзера данной области.

*Определение 1.3.11.* [30, с. 175] Если $∃PJ$-теория $T$-йонсоновская, тогда её семантическая модель $T$-$∃PJ$-универсальная $T$-$∃PJ$-однородная модель теории $T$ кардинальности $κ$, где $κ$ – фиксированный недостижимый кардинал.

*Определение 1.3.12.* [30, с. 175] $∃PJ$-йонсоновская теория $T$ называется совершенной, если ее семантическая модель $C\_{T}$ – это насыщенная модель теории $Th(C\_{T})$.

Вспомним следующий факт, который описывает совершенные йонсоновские теории:

*Теорема 1.3.1.* [45, с. 234] Рассмотрим совершенную йонсоновскую теорию $T$. Тогда можно утверждать, что следующие условия эквивалентны: центральное пополнение совершенной йонсоновской теории $T$ - это модельный компаньон теории $T$; класс моделей центра совершенной йонсоновской теории $T, $экзистенциально замкнутый класс моделей данной теории и экзистенциально замкнутый класс моделей центра данной теории совпадают $Mod\left(T^{\*}\right)=E\_{T}=E\_{T^{\*}}$; центр совершенной йонсоновской теории $T$, элементарная теория класса порожденных моделей данной теории и ее оболочка Кайзера равны $T^{\*}=T^{f}=T^{0}$.

*Определение 1.3.13.* [30, с. 175] Пусть $A$ – некоторая бесконечная структура сигнатуры $σ.$ $A$ называется $∃PJ$-моделью, если множество предложений $Th\_{∀∃^{+}}(A)$ это $∃PJ$-теория.

Далее, обозначим $Th\_{∀∃^{+}}(A)$ теорию через $∀∃^{+}(A)$. Следующие результаты обобщат Предложение 1 из работы [35].

*Лемма 1.3.1.* [30, с. 176] Рассмотрим $L$-теорию $T$, которая является экзистенциально замкнутой $∃$-полной $∃PJ$-теорией. Тогда любая бесконечная модель из класса моделей $L$-теории $T$ является $∃PJ$-моделью.

*Определение 1.3.14.* [30, с. 176] Структуры $A$ и $B$ языка $L$ называются $∃PJ$-эквивалентными структурами и обозначаются как $A≡\_{∃PJ}B$ ($A$ $∃PJ$-эквивалентна $B$), если для любой $∃PJ$-теории $T$ языка $L$ следующий критерий будет выполняться: $A⊨T⇔B⊨T$ (предложения $T$ истинны на структуре $A$ тогда и только тогда, когда они истинны на структуре $B$).

Следующие результаты обобщают и уточняют теорему 1 из [45].

*Лемма 1.3.2.* [30, с. 176] Пусть $A$ и $B$ – структуры сигнатуры $σ$. Тогда следующие условия эквивалентны: $A≡\_{∃РJ}B$ ($A$ $∃PJ$-эквивалентна $B$); $∀∃^{+}(A)=∀∃^{+}(B)$ (позитивные $∀∃$ следствия структур $A$ и $B$ равны).

Определим отношение косемантичности на экзистенциально позитивных йонсоновских теориях следующим образом.

*Определение 1.3.14.* [30, с. 176] $T\_{1}⋈\_{∃PJ}T\_{2}$, или $∃PJ$-косемантичность двух $∃PJ$-теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ языка $L$, определяется в соответствии с отношением равенства между семантическими моделями рассматриваемых теорий (или их универсальными областями, если теории не являются йонсоновскими). Если семантические модели (универсальные области) не совпадают, то теории не будут $∃PJ$-косемантичными.

Рассмотрим определение косемантичности с позиции семантики.

*Определение 1.3.15.* [30, с. 176] $A⋈\_{∃PJ}B$, где $A$ и $B$ – это структуры сигнатуры $σ$, обознает две $∃PJ$-косемантичные структуры, определение выполняется с позиции следующего условия: если для любой $∃PJ$-теории $T\_{1}$ языка $L$ сигнатуры $σ$ такой, что $A$ содержится в классе моделей теории $T\_{1}$, существует $∃PJ$-теория $T\_{2}$ языка $L$ сигнатуры $σ$ $∃PJ$-косемантичная с $T\_{1}$ ($T\_{1}⋈\_{∃PJ}T\_{2}$), такая, что $B$ содержится в классе моделей теории $T\_{2}$. И наоборот.

*Лемма 1.3.3.* [30, с. 176] Для любых моделей $A$ и $B$, верно следующее следствие: из эквивалентности двух моделей следует их $∃PJ$-эквивалентность, из $∃PJ$-эквивалентности двух моделей следует их $∃PJ$-косемантичность $A≡B⇒A≡\_{∃PJ}B⇒A⋈\_{∃PJ}B$.

Аналогично определяется понятие $∃PM$-косемантичности между $∃PM$-теориями и, соответственно, между их моделями.

Для любой теории $T$ обозначим как $T\_{∀^{+}}$ теорию, аксиомы которой являются позитивными универсальными следствиями теории $T$.

*Лемма 1.3.4.* [30, с. 176] Пусть $T\_{1}$ и $T\_{2}$ – это $∃PJ$-теории. Если позитивные универсальные следствия теории $T\_{1}$ совпадают с позитивными универсальными следствиями теории $T\_{2}$, тогда эти теории $∃PJ$-косемантичные теории, $\left(T\_{1}\right)\_{∀^{+}}=\left(T\_{2}\right)\_{∀^{+}}$, тогда $T\_{1}⋈\_{∃PJ}T\_{2}$.

*Теорема 1.3.2.* [30, с. 176] Пусть $T\_{1}$ и $T\_{2}$ – это $∃PJ$-теории языка $L$, с $C\_{T\_{1}}$ – семантическая модель $T\_{1}$ и $C\_{2}$ – семантическая модель $T\_{2}$. Тогда следующие условия эквивалентны: $C\_{T\_{1}}⋈\_{∃PJ}C\_{T\_{2}}$ (семантические модели $∃PJ$-теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ - $∃PJ$-косемантичные модели), $C\_{T\_{1}}≡ \_{∃РJ}C\_{T\_{2}}$ (семантические модели $∃PJ$-теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ - $∃PJ$-эквивалентные модели); $C\_{T\_{1}}=C\_{T\_{2}}$ (семантические модели $∃PJ$-теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ совпадают).

**1.4 Позитивный йонсоновский спектр** $∃PM$**-теорий фиксированного класса моделей теории полигонов над группой**

Основной результат данного подраздела состоит в характеризации йонсоновского спектра $∃PM$-теорий полигонов над группой относительно отношения косемантичности с помощью инвариантов, которые были определены в работе [47]. Дадим основные определения и утверждения из [47], необходимые для формулирования и доказательства результатов раздела.

Вспомним определение полигона.

*Определение 1.4.1.* [47, с. 67] Пусть $A$ – непустое множество, $\left⟨S;⋅,e\right⟩$ - моноид. Алгебраическая система $\left⟨A;\left⟨f\_{α}:α\in S\right⟩\right⟩$ с унарными операциями $f\_{α},$ где $α\in S$, называется правым полигоном над $S$, при условии выполнения следующих равенств: $f\_{e}\left(a\right)=a$ для всех $a\in A$ (определяет действие нейтрального элемента моноида, переводя элемент с помощью функции $f$ сам в себя), $f\_{αβ}(a)=f\_{α}\left(f\_{β}(a)\right)$ для всех $a\in A$ и всех $α,β\in S$ (связано со свойством ассоциативности элементов моноида).

Различают левые и правые полигоны, в зависимости от левого или правого действия элементов моноида с помощью функции $f$.

*Пример 1.4.1.* Если $S$ – моноид с одним элементом {$e$}, то тривиально, что любое непустое множество $X$ является левым и правым полигоном.

*Пример 1.4.2.* Возьмем любой моноид $S$. Пусть $Κ$ будет правым идеалом $S.$ Поскольку $kα$ $\in $ $Κ$ для любого $k$ $\in $ $Κ$, и для любого $α\in $ $S $правый идеал $Κ$ является правым полигоном.

*Пример 1.4.3.* Пусть $(K, +, ∙)$ будет полем, а $V $– левым $K$-векторным пространством. Тогда $V$ является левым полигоном над $(Κ, ∙),$ но не является полигоном над $(K, +)$.

*Пример 1.4.4.* Пусть $A$ – левый полигон. Множество всех подмножеств $P(A) = \{X⊆A\}$ будет левым полигоном, если $f: S×P(A)⟶P(A)$, $αX=\{αx|x\in X\}$.

*Пример 1.4.5.* Возьмем такой граф $G$, что множество ребер $Ε = \left\{\left\{1,2\right\}, \left\{2,3\right\}\right\}.$ Группа автоморфизмов такого графа $Aut\left(P\_{3}\right)$ состоит из {$e,p\}≅S\_{2}$, где $S\_{2}$ – группа подстановок, $с p(1)=3, p(3)=1 и p(2)=2$. Таким образом, $P\_{3}$ является левым полигоном над $S\_{2}$. Граф $G$ также является $полигоном над S\_{2}$. Очевидно, что оба графа являются левыми полигонами над своими соответствующими моноидами эндоморфизмов.

Пусть $a\in A$, тогда $S\_{a}=\left\{f\_{α}(a):α\in S\right\}$; если $‾$ – это кортеж элементов из $A$, тогда $S\_{‾}=⋃\_{a\_{i}\in ‾} S\_{a\_{i}}$. Множество $C\_{a}=\left\{b\in A:b\in S\_{a}\right.$ or $\left.a\in S\_{b}\right\}$ называется компонентой.

*Предложение 1.4.1*. [47, с. 68] Если $T\_{Π}$ – это теория полигона и для любого $f:S\_{‾}≃S\_{‾}$ существует $g⊃f$, такой, что $g:C\_{‾}≃C\_{‾}$, тогда $T\_{Π}$ допускает элиминацию кванторов.

Здесь и далее по разделу мы рассматриваем полигоны над группой $G$ и соответствующие им теории полигонов над группой.

Если $A$ – это полигон над группой $G,a\in A$, тогда $id(a)=\left\{g\in G:f\_{g}(a)=a\right\}; p(G)=\{H:H⪯G\}$. Если $H⪯G$, тогда $F(H)=|\{gH:g\in G,\{φ\in G:φgH=gH\}=H\}|$.

*Определение 1.4.2.* [47, с. 68] 1) Если $Γ$ – это семейство или тип предложений, тогда $T\_{Γ}=\{ψ:\{φ\in Γ:T⊢φ\}⊢ψ\}$;

2) $∇=Π\_{1}∪Σ\_{1}$, то есть, $∇$ - семейство всех универсальных или экзистенциальных предложений.

Следовательно, согласно определению 1.4.2 $∇$ — это множество универсальных или экзистенциальных предложений таких, что в пренексной нормальной форме эти формулы имеют либо один экзистенциальный квантор, либо один универсальный квантор, либо $∀∃$ кванторы.

*Определение 1.4.3.* [47, с. 68] Если $T=T\_{∇}$, тогда теория $T$ будет называться примитивом.

Запишем известный факт о примитивах.

*Факт 1.4.1*. [47, с. 68] Для полной теории $T$ следующие условия эквивалентны:

1. $T$ – примитив;
2. Если $A,B⊨T$ и $A⊆C⊆B$, тогда $C⊨T$

*Определение 1.4.4.* [47, с. 68] Выражение формы $g\in X$ называется атомной фигурой, где $g\in G$, $X$ – фиксированный символ. Фигура – любая формульная булева комбинация атомных фигур. Обозначим через $Φ$ множество всех фигур. Для всякой фигуры $φ(X)$ определим по индукции $U(φ)⊆p(G)$ и формулу $θ(φ,a)$ языка полигонов для любого элемента $a$ любого полигона

1. если $φ(X)=g\in X$, тогда $U(φ)=\{H⪯G:g\in H\},θ(φ,a)=\left(f\_{g}(a)=a\right)$;
2. если $φ(X)=¬ψ(X)$, тогда $U(φ)=p(G)-U(ψ),θ(φ,a)=¬θ(ψ,a)$
3. если $φ(X)=ψ\_{1}(X)\&ψ\_{2}(X)$, тогда $U(φ)=U\left(ψ\_{1}\right)∩U\left(ψ\_{2}\right),θ(φ,a)=θ\left(ψ\_{1},a\right)\&θ\left(ψ\_{2},a\right)$.

Используем понятия из [47].

Через [ ] обозначим оператор замыкания, порожденный топологией над $p(G)$, база которого открытая окрестность $\{U(φ):φ\in Φ\}$. Если $h⊆p(G)$, тогда $<h>=\left\{gHg^{-1}:g\in G,H\in h\right\}$. Через ( ) обозначим оператор Пуаза, т.е., самый маленький оператор замыкания на $p(G)$ со свойством $(h)⊇$ $[h]∪<h>$.

$Q=\{H⪯G:∃φ\in Φ(U(φ)=[H])$ и $F(H)<\infty \}$.

*Определение 1.4.5.* [47, с. 69] Пара $<h,ε>$ называется характеристикой, если $h⊆p(G),h=(h),ε:Q\rightarrow [\infty ]∪ω$ и $ε(H)=0⇔H\notin h$.

*Определение 1.4.6.* [47, с. 69] Если $n<ω,T\_{Π}$ – теория полигона, тогда

$$T^{(n)}(G)=\left\{<H\_{1},…,H\_{n}>\in G^{n}:∃A⊨T\_{Π},<a\_{1},…,a\_{n}>\in A^{n}\left(\&\_{m=1}^{n}H\_{m}=id\left(a\_{m}\right)\right)\right\}$$

*Определение 1.4.7.* [47, с. 69] Если $T\_{Π}$ это теория полигона, тогда $ε\_{T}:Q\rightarrow [\infty ]∪ω$ такое, что

$$ε\_{T}(H)=\left\{\begin{matrix}k, если k=max\left\{\left|\left\{G\_{a}:a\in A,id(a)=H\right\}\right|:A⊨T\_{Π}\right\}<ω\\\infty , если такой максимум не существует. \end{matrix}\right.$$

Пусть $ch(T\_{Π})=<T^{1}(G),ε\_{T}>$.

Предложение 1.4.2. [47, с. 69] $ch(T\_{Π})$ – характеристика.

*Теорема 1.4.1.* [47, с. 69] Пусть теория полигонов $T\_{Π}$ имеет бесконечную модель. Тогда теория полигонов $T\_{Π}$: является индуктивной теорией; если имеет свойство $JEP$, тогда она также имеет свойство $AP$; если является полной теорией (теорема 1.1.1), тогда она допускает элиминацию кванторов и является примитивом.

Напомним, что теория, обладающая элиминацией кванторов, это значит $∀ϕ∃ψ$, такая что $T\_{Π}⊨ϕ\leftrightarrow ψ$, $ϕ,ψ\in L$.

*Теорема 1.4.2.* [47, с. 71] 1) Каждая $α$-йонсоновская $T\_{Π}$ совершенна и является йонсоновской теорий, для счетного положительного $α\in [0,ω]$.

2) $T\_{Π}$ – йонсоновская теория тогда и только тогда, когда для любого $n\in [1,ω]$ выполняется следующее равенство$ \left(T^{(n)}(G)=\left(T^{(1)}(G)\right)^{n}\right)$.

Также как и в Теореме 1.4.2, сформулируем и докажем следующий результат.

*Теорема 1.4.3.* [30, с. 178] Для каждой экзистенциальной позитивной $∃PM$-теории $T\_{Π}$ полигонов над группой возможны следующие три случая: если $T\_{Π}$ – йонсоновская теория она является совершенной йонсоновской теорией; экзистенциально замкнутая $∃PJ$-теория $T\_{Π}$ полигонов над группой – йонсоновская теория тогда и только тогда, когда для любого $n\in [1,ω]$ выполняется следующее равенство $\left(T^{(n)}(G)=\left(T^{(1)}(G)\right)^{n}\right)$; если $T\_{Π}$ не является йонсоновской теорией. Тогда существуют некоторая экзистенциально позитивная $∃PM$-теория $T\_{Π}^{'}$ такая, что $T\_{Π}^{'}$ является йонсоновской теория и оболочкой Кайзера ($∀∃\left(U\right)$, $∀∃$-следствия универсальной области $U$) для теории $T\_{Π}$.

Докажем лемму.

*Лемма 1.4.1.* [30, с. 178] Пусть $T\_{Π}$ - $∃PM$-теория полигонов над группой и все пополнения теория $T\_{Π}$ допускают элиминацию кванторов. Тогда

1) $T\_{Π}$ – совершенна;

2) $T\_{Π}$ – $∃PJ$-теория.

Доказательство. 1) Пусть $C\_{T\_{Π}}$ – семантическая модель теории $T\_{Π},T\_{Π}^{\*}=Th(C\_{T\_{Π}})$ и $C\_{T\_{Π}^{\*}}$ – насыщенная модель теории $T\_{Π}^{\*}$. $C\_{T\_{Π}^{\*}} ⊆\_{Σ\_{n}^{+}}C\_{T\_{Π}}) ,C\_{T\_{Π}^{\*}} \in E\_{T}^{+}$ и $D\left(C\_{T\_{Π}^{\*}}\right)=D(C\_{T\_{Π}})$. Из однородности и равенства диаграмм следует, что $C\_{T\_{Π}}≅C\_{T\_{Π}^{\*}}$, то есть, $T\_{Π}$ - совершенна.

2) Пусть $C\_{T\_{Π}}$ – семантическая модель для $T\_{Π}$ (насыщенная для $T\_{Π}^{\*}$). Очевидно, $C\_{T\_{Π}}$ – это $∃PJ$-универсал, мы должны показать, что $C\_{T\_{Π}}$ – $∃PJ$-однородна. Пусть $A,B\in E\_{T}^{+}$, с $A≅B$ по $f$. Предположим обратное, то есть, модель $C\_{T\_{Π}}$ не $∃PJ$-однородная и существуют такие экзистенциально замкнутые подмодели $A^{'}$ и $B^{'}$ семантической модели $C\_{T\_{Π}}$ такие, что $A⊆A^{'}$ и $B⊆B^{'}$. Это означает, что существует экзистенциальная формула $φ(x)$, такая, что $A^{'}⊨φ(x)$, но $B^{'}⊭φ(x)$. Из этого следует, что $A⊨φ(x)$ и $B⊭φ(x)$ по причине экзистенциального замыкания $A$ и $B$, что противоречит изоморфизму $f$. В силу того факта, что $T\_{Π}^{\*}$ допускает элиминацию кванторов, тогда $(C\_{T\_{Π}},a)\_{a\in A}≡(C\_{T\_{Π}},f(a))\_{a\in A}$, означает, что $f$ – это автоморфизм.

Доказательство Теоремы 1.4.3.

1. a) Следует из Леммы 1.4.1.
2. б) Легко показать, что из условия $∀n<ω,T^{(n)}(G)=\left(T^{(1)}(G)\right)^{n}$ следует свойство совместного вложения и наоборот.
3. Пусть $T\_{Π}$ – не йонсоновская $∃PM$-теория, тогда, поскольку $Δ=B^{+}\left(A\right)$, мы можем использовать универсальную область $U$ для минимального фрагмента $Δ=B^{+}\left(A\right)$, из [41]. Рассмотрим все $∀∃$-следствия, истинные в $U$, то есть, рассмотрим теорию $Th\_{∀∃}\left(U\right)=∀∃\left(U\right)$. Существует два возможных случая: $U\in E\_{∀∃\left(U\right)}^{+}$ и $U\notin E\_{∀∃\left(U\right)}^{+}$. Если $U\in E\_{∀∃\left(U\right)}^{+}$, рассмотрим теорию $Th\_{∀∃}\left(U\right)=∀∃\left(U\right)$. Покажем, что эта теория йонсоновская. Для того, чтобы выполнить это, используем факт 1.3.1. Семантическая модель теории $∀∃\left(U\right)$ будет семейством максимальных компонент теории всех полигонов над группой. Легко увидеть, что в силу Теоремы 1.4.2, модель, построенная таким образом, является насыщенной в своей мощности моделью, следовательно множество $∀∃$-следствий универсальной области не йонсоновской теории полигонов над группой $T\_{Π}$ будет образовывать совершенную йонсоновскую экзистенциально позитивную $∃PM$-теорию и являться оболочкой Кайзера для теории $T\_{Π}$. Если $U$ не содержится в классе экзистенциально замкнутых моделей позитивных $∀∃$-следствий универсальной области не йонсоновской теории полигонов над группой $T\_{Π}$, тогда, поскольку $∀∃\left(U\right)$ – индуктивная теория, существует модель $D$ из вышеописанного класса, такая, что универсальная область $U$ изоморфно вкладывается в $D$. Рассмотрим теорию $∀∃'(U)=Th\_{∀∃}(D)$. Также, легко доказать, что $∀∃'(U)$ - совершенная йонсоновская $∃PM$-теория и что $∀∃'(U)$ является оболочкой Кайзера для теории $T\_{Π}$.

Необходимы следующие определения и теоремы из работы [33].

*Определение 1.4.8.* [47, с. 72] Если $⟨h,ε⟩$ — это характеристика, тогда

$T\_{Π}\_{1}(h,ε)=\left\{∀y¬θ(φ,y):(φ\in Φ,U(φ)∩h=∅\}∪\left\{∀y\_{1},…,y\_{ε(H)F(H)+i}\left(\&\_{i}θ\left(φ,y\_{i}\right)\rightarrow ⋁\_{i\ne j} \left(y\_{i}=y\_{j}\right)\right):\right.\right.$ $H\in Q∩h,φ\in Φ,ε(H)<\infty ,U(φ)=[H]\}$,

$T\_{Π}\_{2}(h,ε)=T\_{Π}\_{1}(h,ε)∪\left\{∃y\_{1},…,y\_{ε(H)F(H)}\left(\&\_{i}θ\left(φ,y\_{i}\right)\&\&\_{i\ne j}\left(y\_{i}\ne y\_{j}\right)\right):H\in Q∩h,ε(H)<\infty ,U(φ)=\right.$ $[H]\}∪\left\{∃y\_{1},…,y\_{n}\left(\&\_{i}θ\left(φ,y\_{i}\right)\right):U(φ)∩(h-Q)\ne ∅∨∃H\in U(φ)∩Q(ε(H)=\infty ),n<ω\right\}$.

*Теорема 1.4.4.* [47, с. 72] 1) $ch\left(T\_{Π}\_{1}(h,ε)\right)=ch\left(T\_{Π}\_{2}(h,ε)\right)=⟨h,ε⟩$ для любой характеристики $⟨h,ε⟩$;

2) Йонсоновские теории полигонов $T\_{Π}\_{1}$ и $T\_{Π}\_{2}$ косемантичны $⇔ch\left(T\_{Π}\_{1}\right)=ch\left(T\_{Π}\_{2}\right)$;

3) $T$ – йонсоновская теория полигонов и $ch(T\_{Π})=<h,ε>$ тогда и только тогда, когда $T\_{Π}\_{1}(h,ε)⊆T\_{Π}⊆T\_{Π}\_{2}(h,ε)$.

Также как и для теоремы 1.4.4, у нас есть результат для $∃PM$-теорий.

*Теорема 1.4.5.* [30, с. 179] Пусть $T\_{Π}\_{1}$ и $T\_{Π}\_{2}$ – $∃PM$-теории полигонов над группой для фиксированного $n\in [0,ω]$ . Тогда выполняются следующие условия: для $∃PM$-теорий полигонов над группой $T\_{Π}\_{1}$ и $T\_{Π}\_{2}$ $ch\left(T\_{Π}\_{1}(h,ε)\right)=ch\left(T\_{Π}\_{2}(h,ε)\right)=⟨h,ε⟩$ для любой характеристики $⟨h,ω⟩$; $∃PM$-косемантичность теории $T\_{Π}\_{1}$ и $T\_{Π}\_{2}$ с помощью их характеристик будет определяться с помощью следующего критерия $T\_{Π}\_{1}⋈\_{∃PM}T\_{Π}\_{2}⇔ch\left(T\_{Π}\_{1}\right)=ch\left(T\_{Π}\_{2}\right)$; существует $∃PM$-теория $T\_{Π}$ полигонов над группой такая, что $ch\left(T\_{Π}\_{1}\right)=<h,ε>$ тогда и только тогда, когда $T\_{Π}\_{1}(h,ε)⊆T\_{Π}⊆$ $T\_{Π}\_{2}(h,ε)$.

Доказательство такое же, как и для теоремы 1.4.4. Результат теоремы 1.4.5 имеет естественное продолжение в контексте изучения теоретико-модельных свойств позитивного спектра фиксированного класса полигонов над группой.

Пусть $K$ – класс структур фиксированной сигнатуры $σ$. Тогда рассмотрим позитивный спектр экзистенциально позитивных $∃PM$-теорий класса такого фиксированного класса $K$ в следующем виде: $PSp(K)=\{T∣T $ – это $∃PM$-теория рассматриваемого языка и – $  K⊆Mod\left(T\right) для фиксированного n\in [0,ω]\}.$

*Определение 1.4.9.* [45, с. 194] $T\_{1}⋈T\_{2}$, или косемантичность двух йонсоновских теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ языка $L$, определяется в соответствии с отношением равенства между семантическими моделями рассматриваемых теорий (или их центрами). Если семантические модели (центры йонсоновских теорий) не совпадают, то теории не будут косемантичными.

Исходя из определения 1.3.15, легко сделать вывод, что отношение косемантичности удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, следовательно – это отношение эквивалентности на множестве теорий языка. Следовательно, внедрим отношение косемантичности на множество $PSp(K)$ и рассмотрим фактор-множество $PSp(K)/⋈\_{∃PM}$ позитивного спектра класса $K$ относительно отношения $⋈\_{∃PM}$. Результат, следующий:

*Теорема 1.4.6.* [30, с. 179] Пусть $K\_{Π}$ – класс всех полигонов над группой, $\left[T\_{Π}\_{1}\right],\left[T\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$. Тогда:

1. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы йонсоновских $∃PM$-теории, тогда $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=$ $ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right);$
2. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$– классы не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существуют такие классы йонсоновских $∃PM$-теории $\left[T'\_{Π}\_{1}\right],\left[T'\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, что $T'\_{Π}\_{i}$ – является оболочка Кайзера для$ T\_{Π}\_{i}$, где $i=1,2, C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]'}⋈\_{∃PM}$ $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]'}⇔ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$.
3. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ – класс йонсоновских $∃PM$-теории, и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – класс не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существует такая йонсоновская $∃PM$-теория $T'\_{Π}$, что $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{[T^{'}\_{Π}]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left([T'\_{Π}]^{\*}\right)$.

Доказательство.

1. $⇒$: Пусть $\left[T\_{Π}\_{1}\right],\left[T\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$ – классы йонсоновских $∃PM$-теорий и $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}$. Поскольку $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы йонсоновских теорий полигонов над группой, тогда $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы совершенных йонсоновских теорий, следовательно, по теореме 2.12 из $[9],\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ – йонсоновские теории полигонов над группой. Тогда, согласно 2) теоремы 1.4.4 $ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$, поскольку $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ - полные теории.

$⇐$ : Пусть $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы йонсоновских $∃PM$-теорий полигонов над группой и $ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$. Тогда $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ классы совершенных йонсоновских теорий, тогда $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ – полные йонсоновские $∃PM$-теории полигонов над группой. Так как $ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$, из 2) теоремы 1.4.5 следует, что $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}⋈\_{∃PM}\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$. Из определения косемантичности следует, что $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}}=C\_{\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}}$. Однако, поскольку $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ – полные йонсоновские $∃PM$-теории, тогда $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\in \left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\in \left[T\_{Π}\_{2}\right]$, то есть, $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right] }=C\_{\left[T\_{Π}\_{2}\right]}$, из чего следует, что $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right] }⋈\_{∃PM}C\_{\left[T\_{Π}\_{2}\right]}$.

1. Пусть $\left[T\_{Π}\_{1}\right],\left[T\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$ – классы не йонсоновских $∃PM$-теорий, $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]}=U\_{1},C\_{\left[T\_{Π}\_{2}\right]}=U\_{2}$ и $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}=Th\_{∀∃}\left(U\_{1}\right),\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}=Th\_{∀∃}\left(U\_{2}\right)$. Так как $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ - индуктивные теории, существуют позитивные экзистенциально замкнутые модели $D\_{1}$ и $D\_{2}$ этих теорий, такие, что $U\_{1}$ изоморфно вкладывается в $D\_{1}$ и $U\_{2}$ изоморфно вкладывается в $D\_{2}$. Рассмотрим теории $T'\_{Π}\_{1}=Th\_{∀∃}\left(D\_{1}\right)$ и $T'\_{Π}\_{2}=Th\_{∀∃}\left(D\_{2}\right)$. Существуют йонсоновские совершенные $∃PM$-теории. Существование теорий $T'\_{Π}\_{1}$ и $T'\_{Π}\_{2}$ следует из теоремы 1.4.3, и они являются оболочками Кайзера для $T\_{Π}\_{1}$ и $T\_{Π}\_{2}$, соответственно. Тогда из 1) данной теоремы следует, что $C\_{\left[T^{'}\_{Π}\_{1}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{\left[T^{'}\_{Π}\_{2}\right]}⇔ch\left(\left[T'\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T'\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$.
2. Пусть $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ – класс йонсоновских $∃PM$-теорий и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – класс не йонсоновских $∃PM$-теорий. Тогда, также как и во 2), используя теорему 1.4.3, можем найти такую йонсоновскую $∃PM$-теорию $T'\_{Π}$, которая является оболочкой Кайзера для теории $T\_{Π}\_{2}$ и согласно 1) выполняется $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]}∃\_{∃PM}C\_{[T^{'}\_{Π}]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left([T'\_{Π}]^{\*}\right)$.

**2 Робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия унаров**

Изучение теоретико-модельных отношений классических алгебр и их синтаксических свойств с позиции рассмотрения йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, неполны, позволяет описать достаточно широкий класс теорий. Целью данного раздела было углубленное изучение характеристики семантической модели универсалов унаров и усиление существующих результатов с помощью рассмотрения нового и более общего понятия семантического йонсоновского квазимногообразия, а также определение понятия робинсоновского спектра и его классов эквивалентности для унаров. Первая часть раздела предоставляет необходимые понятия из йонсоновских теорий, в частности йонсоновский спектр и связанные с ним понятия. Вторая часть посвящена определениям, связанным с йонсоновскими универсалами унаров и характеристикой их семантической модели. Основной раздел содержит определение произвольной характеристики и основная теорема о классах косемантичности фактор-множества $RSp(JC)/⋈$, полученного в процессе проведения научного исследования.

**2.1 Семантическое йонсоновское квазимногообразие универсалов унаров**

Поскольку настоящее исследование связано с рассмотрением робинсоновского спектра классов алгебр, дадим следующие условия косемантичности йонсоновских теорий. $∀$-аксиоматизируемая йонсоновская теория с условиями из определения 1.3.8 называется робинсоновской теорией.

*Теорема 2.1.1.* [45, с. 204] Пусть $T\_{1}$ и $T\_{2}$ – йонсоновские теории, $C\_{T\_{1}}$ и $C\_{T\_{2}}$ – их семантические модели, соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны: $C\_{T\_{1}}⋈C\_{T\_{2}}$ (семантические модели теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ – косемантичные модели), $C\_{T\_{1}}≡\_{J}C\_{T\_{2}}$ (семантические модели теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ – йонсоновски эквивалентные модели); $C\_{T\_{1}}=C\_{T\_{2}}$ (семантические модели теорий $T\_{1}$ и $T\_{2}$ совпадают).

Аналогично определению позитивного спектра из раздела 1.4 рассмотрим обобщающее его определение йонсоновского спектра следующим образом.

*Определение 2.1.1.* [48, с. 125] Множество $JSp(K)$ йонсоновских теорий сигнатуры $σ$ языка первого порядка $L$, где $JSp(K)=\{T∣T – йонсоновская теория и K⊆Mod(T)\}$ называется йонсоновским спектром для класса $K$.

Нетрудно увидеть, что позитивный спектр, рассмотренный в подразделе 1.4 данного диссертационного исследования является частным случаем определения 2.1.1. Если рассмотреть данное определение более детально, то йонсоновский спектр фиксированного класса $K$ структур сигнатуры $σ$ это множество таких йонсоновских теорий языка первого порядка $L$, в класс моделей которых входит вышеупомянутый класс $K$.

Согласно определению 1.3.8 получим определение робинсоновской теории. Непротиворечивое, дедуктивно замкнутое множество предложений $T$ называется робинсоновской теорией, если в классе ее моделей найдется как минимум одна бесконечная модель, она является $∀$-аксиоматизируемой (индуктивной, устойчивой относительно подмоделей), она обладает свойством $JEP$ и $AP$. Соответственно, на основании определения 2.1.1 рассмотрим еще один частный случай йонсоновского спектра, а именно робинсоновский спектр, строящийся по аналогии.

*Определение 2.1.2*. [48, с. 148] Множество $RSp(K)$ робинсоновских теорий сигнатуры $σ$ языка первого порядка $L$, где $RSp(K)=\{T∣T – робинсоновская теория и ∀A\in K,A⊨T\}$ называется робинсоновским спектром для класса $K$.

Основываясь на теореме 2.1.1, получаем фактор-множество, обозначенное как $JSp(K)/⋈$. Фактор-множество $RSp(K)/⋈$ будет получено соответственно.

Соответственно А.И. Мальцеву [49], квазимногообразия алгебр — это классы алгебр, которые могут быть заданы с помощью совокупности квазитождеств (условных тождеств). Квазитождества — это $∀$-формулы, и квазимногообразия представлены как частные виды универсально аксиоматизируемых классов алгебр.

Определим семантическое йонсоновское квазимногообразия следующим образом. Пусть $K$ – класс квазимногообразий в смысле [49] языка первого порядка $L,L\_{0}⊂L$, где $L\_{0}$ – это множество предложений языка $L$ (индекс $0$ используем для обозначения отсутствия свободных переменных в формулах, следовательно, рассматриваем предложения языка). Рассмотрим элементарную теорию $Th(K)$ такого класса квазимногообразий $K$ (напомним, что такая теория будет являться полной теорией). Путем добавления к элементарной теории $Th(K)$ $∀∃$-предложений языка $L$ ($∀x∃yφ(x,y)$), которые не содержатся в данной теории $Th(K)$, рассмотрим следующее множество йонсоновских теорий $J(Th(K))$ представленных в виде:

*Обозначение 2.1.1.* [45, с. 205] Множество $J\left(Th\left(K\right)\right)=\left\{Δ∣Δ-\right.$ йонсоновская теория, $\left.Δ=Th\left(K\right)∪\left\{φ^{i}\right\}\right\}$, где $φ^{i}\in ∀∃\left(L\_{0}\right)$ и $φ^{i}\notin Th\left(K\right)$ для некоторого $i=0$ или $i=1,$ (то есть формула или ее отрицание), $Th(K)$ – элементарная теория класса квазимногообразий $K,∀∃\left(L\_{0}\right)$ – множество всех $∀∃$ предложений языка первого порядка $L$.

Соответственно факту 1.3.1 каждая йонсоновская теория $Δ\in J(Th(K))$ имеет свою собственную семантическую модель $C\_{Δ}$. Рассмотрим множество таких семантических моделей и обозначим его как $JC$.

*Обозначение 2.1.2.* [45, с. 205] Множество $JC=\left\{C\_{Δ}∣Δ\in J(Th(K)),C\_{Δ}\right.$ – семантическая модель теории $\left.Δ\right\}$.

Назовем множество $JC$ семантическим йонсоновским квазимногообразием класса квазимногообразий $K$, если его элементарная теория $Th(JC)$ – йонсоновская теория.

Рассмотрим некоторые базовые определения, обозначения, свойства произвольных йонсоновских универсалов и унаров (полигонов над циклическим моноидом), необходимые для доказательства основного результата статьи.

*Определение 2.1.3.* [17, с. 51] 1) Если $T=T\_{∀}$, тогда $T\_{∀}$ называется универсалом.

Таким образом, под универсалом понимается множество всех универсальных следствий йонсоновской теории $T$. Сравним это определение с определением 1.4.2. Нетрудно увидеть, что $T\_{∇}⊇T\_{∀}$. Следующее предложение играет важную роль в доказательстве полученного результата.

*Предложение 2.1.1.* [17, с. 51] Пусть $T\_{∀\_{1}},T\_{∀\_{2}}$ – йонсоновские универсалы. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T\_{∀\_{1}}=T\_{∀\_{2}}$;
2. $C\_{T\_{∀\_{1}}}≃C\_{T\_{∀\_{2}}}$;
3. $T\_{∀\_{1}}^{\*}=T\_{∀\_{2}}^{\*}$.

Где$ C\_{T\_{∀\_{1}}}$ и $C\_{T\_{∀\_{2}}}$ – семантические модели йонсоновских теорий $T\_{∀\_{1}},T\_{∀\_{2}}$ $T\_{∀\_{1}}^{\*},T\_{∀\_{2}}^{\*} $их соответствующие центры. Всякая модель $U$ йонсоновской теории унаров $T\_{U}$ - унар. Следовательно, следующий факт выполняется.

*Лемма 2.1.1.* [17, с. 52] Для любого унара $U$ выполняется следующее $U⊨T\_{U}⇔U вкладывается в C\_{T\_{U}}$, где $C\_{T\_{U}}$ – cемантическая модель йонсоновской теории унаров.

Следующие определения необходимы для конструкции классов косемантичности робинсоновского спектра семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских унаров.

*Определение 2.1.4.* [17, с. 55] Четверка $(Ω,ν,μ,ε)$ называется характеристикой $C\_{T\_{U}}$ и обозначается как $char(C\_{T\_{U}})$, если:

$Ω=\{χ(a):a\in C\}$,

$ν:ω∖\{0\}\rightarrow ω∪\{\infty \}$ такое что $∀m>0$,

$$ν\left(m\right)=\left\{\begin{matrix}k, если количество m- циклов в C\_{T\_{U}} равно k<ω,\\\infty , в другом случае; \end{matrix}\right.$$

$μ:Ω\rightarrow ω∪\left\{\infty \right\}$ такая что если $α\in Ω$ и $α\in χ\left(a\right)$, тогда $μ\left(α\right)=k\left(a\right)$, если $k\left(a\right)<ω$ и $μ\left(α\right)=\infty $, если $k\left(a\right)=\left|C\_{T\_{U}}\right|;$

$$ε=\left\{\begin{matrix}0, если \left|\left\{a\in C\_{T\_{U}}:χ\left(a\right)=ω\right\}\right|=0,\\\infty , в другом случае. \end{matrix}\right.$$

Рассмотрим определение 2.1.4 более подробно.

1. $Ω$ – это множество, состоящее из $χ\left(a\right), a\in C\_{T\_{U}}$, то есть $a$ – это элемент носителя семантической модели йонсоновской теории унаров.

*Определение 2.1.5.* [17, с. 53]

$$χ\left(a\right)=\left\{\begin{matrix}ω, если f^{n}\left(a\right)\ne f^{k}\left(a\right),∀n<k<ω\\<n,m>, если <n,m>=min\left\{<n,m>:f^{n}\left(a\right)=f^{n+m}\left(a\right)\}.\right.\end{matrix}\right.$$

То есть $χ\left(a\right)=ω$, если $f^{n}\left(a\right)$ ($n$ указывает на количество действий на элемент $a$ функцией $f$), $f^{n}\left(a\right)=b$ и $f^{k}\left(a\right)=c$, $b\ne c$, $∀n<k<ω$, $n$ и $k$ – конечные числа, $k>n$. $χ\left(a\right)<n,m>,$ $<n,m>$ это минимальная упорядоченная пара, такая, что $f^{n}\left(a\right)=f^{n+m}\left(a\right)$. Следовательно, $Ω$ выражает тот факт, имеются ли в семантической модели конечные или бесконечные циклы.

2) $ν$ – это соответствие, строящееся из множества $ω$ без $0$ во множество, которое состоит из $ω$ или $\{\infty \}$. Соответствие выполняется следующим образом: $∀m>0$,

$$ν\left(m\right)=\left\{\begin{matrix}k, если количество m- циклов в C\_{T\_{U}} равно k<ω,\\\infty , в другом случае; \end{matrix}\right.$$

*Определение 2.1.6.* [17, с. 54] Множество $\left\{a\_{1},…,a\_{m}\right\}$ элементов $C\_{T\_{U}}$ называется $m$-петлей ($m$-циклом), если $a\_{i}\ne a\_{j},f\left(a\_{i}\right)=a\_{i+1}$ для всех $1\leq i<j\leq m$ и $f\left(a\_{m}\right)=a\_{1}$.

Таким образом, соответствие $ν\left(m\right)$ выражает число $m$-циклов, где $m$ – это количество элементов в цикле.

3) $μ$ – это соответствие, строящееся из множества $Ω=\{χ(a):a\in C\_{T\_{U}}\}$ во множество, состоящее из $ω$ или $\{\infty \}$. Соответствие выполняется следующим образом: если $α\in Ω$ и $α\in χ\left(a\right)$, тогда $μ\left(α\right)=k\left(a\right)$, если $k\left(a\right)<ω$ и $μ\left(α\right)=\infty $, если $k\left(a\right)=\left|C\_{T\_{U}}\right|$. Поскольку исследование выполняется в рамках работ [3], $\left|C\_{T\_{U}}\right|=2^{ω}$.

*Определение 2.1.7.* [17, с. 54] Если $a\in C\_{T\_{U}}$, тогда $k\left(a\right)=|\{b\in C\_{T\_{U}}:f(b)=a\}|$.

$k\left(a\right)$ – это мощность множества, состоящего из всех корней $b\in C\_{T\_{U}}$ элемента $a\in C\_{T\_{U}}$, таких что $f(b)=a$. Существует ряд свойств и связей между понятиями числа $k\left(a\right)$ и множеством $χ\left(a\right)$, которые могут быть изучены в работе [17].

4) $ε$ может принимать значения, либо $0$, либо $\infty $, $ε=0∨ ε=0$. Это значение зависит от мощности множества, состоящего из таких элементов $a\in C\_{T\_{U}}$, что $χ\left(a\right)=ω$. Если таких элементов нет, мощность множества будет равна $0$, то есть $ε=0$, если такие элементы существуют, тогда $ε=\infty $. $ε$ выражает факт существования циклов в семантической модели.

Следующие свойства следуют непосредственно из определения 2.1.4, и лемма 2.1.2 дает некоторую полезную спецификацию определению вышеуказанной четверки. Следует обратить внимание, что данная характеристика (определение 2.1.4) считается инвариантом йонсоновской теории унара.

*Лемма 2.1.2.* [17, с. 55] Если $char(C)=(Ω,ν,μ,ε)$, тогда

$1^{∘}. ∅\ne Ω⊆\{ω\}∪(ω×ω)$;

$$2^{∘}. (n,m)\in Ω\&0\leq k<n⇒(k,m)\in Ω;$$

$3^{∘}.ν(m)>0⇔(0,m)\in Ω$;

$4^{∘}.ω\in Ω⇔ε=\infty $;

$5^{∘}.|Ω|=ω⇒ω\in Ω$;

$$6^{∘}.\left(n,m\right)\in Ω⇒\left(\left(n+1,m\right)\notin Ω⇔μ^{\*}\left(n,m\right)=0;\right.$$

$$7^{∘}.ω\notin Ω\&|Ω|<ω⇒∃m<ω(ν(m)=\infty )∨∃n<ω,m<ω((n,m)\in Ω\&μ(n,m)=\infty );$$

$$8^{∘}.|Ω|=ω⇒\left\{\begin{matrix}μ(ω)\geq k, если ∃k,l<ω(k=max\{μ(n,m)\in Ω,n+m\geq l\});\\μ(ω)=\infty , в другом случае. \end{matrix}\right.$$

**2.2 Робинсоновский спектр семантического йонсоновского квазимногообразия робинсоновских унаров**

Теория $Th\_{∀}(U)$ всех универсальных предложений, верных в $U$ – йонсоновская теория. Это утверждение было доказано в работе [18]. По причине $∀$-аксиоматизируемости элементарной теории унаров, $Th\_{∀}(U)$ – робинсоновская теория унаров.

Таким образом, используем обозначение 2.1.2 семантического йонсоновского класса квазимногообразия унаров $K\_{U}$ и рассматриваем множество $JC\_{U}=$ $\left\{C\_{Δ}∣Δ\in J(Th(K)),C\_{Δ}\right.$ – семантическая модель робинсоновской теории унаров $\left.Δ\right\}$ сигнатуры $σ\_{U}=⟨f⟩$, где $f$ – унарный функциональный символ. Такое $JC\_{U}$ определяет семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров.

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.2.1.* Семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров $JC\_{U}$

На рисунке 2.2.1 можно увидеть, что $1,2,3$ — это $C\_{Δ\_{1}},C\_{Δ\_{2}},C\_{Δ\_{3}}$, которые являются семантическими моделями классов $\left[Δ\_{1}\right],\left[Δ\_{2}\right]$, $\left[Δ\_{3}\right]$ соответственно. Семантические модели состоят из унаров длины $0,1,2$ и так далее.

Определим робинсоновский спектр множества $JC\_{U}$ следующим образом.

*Определение 2.2.1*. [31, с. 173] Множество $RSp\left(JC\_{U}\right)$ робинсоновских теорий сигнатуры $σ\_{U}$, где $RSp\left(JC\_{U}\right)=\left\{T\_{U}∣T\_{U} - робинсоновская теория унаров и ∀C\_{T\_{U}}\in JC\_{U},C\_{T\_{U}}⊨T\_{U}\right\}$ называется робинсоновским спектром класса $JC\_{U}$, где $JC\_{U}$ – семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров.

Далее, рассмотрим понятие отношения косемантичности на робинсоновском спектре $RSp\left(JC\_{U}\right)$ и получим разбиение $RSp\left(JC\_{U}\right)$ на классы эквивалентности. В результате, получаем фактор-множество, обозначенное как $RSp\left(JC\_{U}\right)/⋈$ и состоящее из классов эквивалентностей по отношению косемантичности $[T\_{U}]\in RSp\left(JC\_{U}\right)/⋈$.

Согласно теореме 2.1.1 предложению 2.1.1 можно заключить, что $char\left(C\_{[T\_{U}]}\right)$ определяется похоже на $char(C\_{T\_{U}})$ из определения 2.1.4 для каждой семантической модели $C\_{[T\_{U}]}$ каждого класса $[T\_{U}]$.

*Определение 2.2.2.* [31, с. 173] Под характеристикой класса косемантичности $сhar([T\_{U}])$, будем понимать характеристику его семантической модели $сhar\left(C\_{[T\_{U}]}\right)$.

*Лемма 2.2.1.* [31, с. 173] Для классов $\left[T\_{U}\_{1}\right],\left[T\_{U}\_{2}\right]$ робинсоновских теорий унаров следующие условия эквивалентны:

1. $\left[T\_{U}\_{1}\right] $эквивалентно $\left[T\_{U}\_{2}\right]$;
2. $Char\left(\left[T\_{U}\_{1}\right]\right)=Char\left(\left[T\_{U}\_{2}\right]\right)$.

Доказательство. 1) $⇒2$) Согласно теореме 2.1.1, если два класса эквивалентны, тогда их семантические модели будут друг другу равны. Следовательно, характеристики данных моделей будут также равны между собой.

$2)⇒1$) следует из того факта, что $Char\left(C\_{[T\_{U}]}\right)$ определяет семантические модели $C\_{[T\_{U}]}$ с точностью до изоморфизма. Следовательно, $C\_{\left[T\_{U}\_{1}\right]}≃C\_{\left[T\_{U}\_{2}\right]}$, согласно предложению 2.1.1.

*Определение 2.2.3.* [17, с. 56] Произвольная четверка $\left(Ω^{\*\*},ν^{\*\*},μ^{\*\*},ε^{\*\*}\right)$ называется характеристикой, если выполняются следующие условия:

1. $∅\ne Ω^{\*\*}⊆\{ω\}∪(ω×ω)$;
2. $ν^{\*\*}:ω∖\{0\}\rightarrow ω∪\{\infty \}$
3. $μ^{\*\*}:Ω^{\*\*}\rightarrow ω∪\{\infty \}$;
4. $ε^{\*\*}=0$ or $ε^{\*\*}=\infty $;
5. $ω\in Ω^{\*\*}⇔ε=\infty $
6. $(n,m)\in Ω^{\*\*}∩(ω×ω)\&0\leq k<n⇒(k,m)\in Ω^{\*\*}$;
7. $ν^{\*\*}(m)>0⇔(0,m)\in Ω\*\*$;
8. $\left|Ω^{\*\*}\right|=ω⇒ω\in Ω^{\*\*}$
9. $(n,m)\in Ω^{\*\*}∩(ω×ω)⇒\left(μ(n,m)=0⇔(n+1,m)\ne Ω^{\*\*}\right)$;
10. $ω\notin Ω^{\*\*}\&\left|Ω^{\*\*}\right|<ω⇒∃m<ω(ν(m)=\infty )∨∃n<ω,m<ω\left((n,m)\in Ω^{\*\*}\&μ(n,m)=\infty \right)$;
11. $\left|Ω^{\*\*}\right|=ω⇒\left\{\begin{matrix}μ(ω)\geq k, если ∃k,l<ω\left(k=max\left\{μ(n,m):(n,m)\in Ω^{\*\*},n+m\geq l\right\}\right);\\μ(ω)=\infty , в другом случае; \end{matrix}\right.$
12. $μ^{\*\*}(ω)>0$.

*Лемма 2.2.2.* [31, с. 174] $Char\left(C\_{[T\_{U}]}\right)$ - характеристика.

Доказательство. Следует непосредственно из 2.1.2.

*Теорема 2.2.1* [31, с. 174] Пусть $JC\_{U}$ – семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров, $\left[T\_{U}\_{i}\right]\in RSp\left(JC\_{U}\right)/⋈$ .

1) Каждый класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ имеет характеристику.

2) Для любых произвольных характеристик существует класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ который имеет эту характеристику.

3) Два класса $\left[T\_{U}\_{1}\right],\left[T\_{U}\_{2}\right]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их характеристики равны.

Доказательство. Пункты 1) и 3) доказаны в леммах 2.1.2 и 2.2.1 соответственно.

2) Рассмотрим данную произвольную характеристику $π=\left(Ω^{\*\*},ν^{\*\*},μ^{\*\*},ε^{\*\*}\right)$. Необходимо определить класс $T\_{U}\_{i}$ характеристики $π$, который является классом эквивалентности робинсоновских теорий унаров, полученных путем разбиения Робинсоновского спектра $RSp\left(JC\_{U}\right)$ по отношению косемантичности. Начнем с обозначения совокупности универсальных предложений языка унаров.

$Q\_{k,n,m}=∀x\left(f^{n}(x)=f^{n+m}(x)∧\left(\&\_{0\leq i<j<n+m}f^{i}(x)\ne f^{j}(x)\right)\rightarrow ∀y\_{1},…,y\_{k+1}\left(∧\_{i=1}^{k+1}f\left(y\_{i}\right)=(x)\rightarrow \right.\right.$ $\left.\&1\leq i<j\leq k+1y\_{i}=y\_{j}\right)$. $Q\_{k,n,m}$ выражает $"χ(x)=(n,m)⇒k(x)\leq k"$

$P\_{l,m}$ это $∀x\_{1},…,x\_{l+1}\left(\left[∧\_{i+1}^{l+1}\left(f^{m}\left(x\_{i}\right)=x\_{i}∧∧\_{m-1}^{j=1}f^{j}\left(x\_{i}\right)\right)\ne x\_{i}\right)\right]\rightarrow \&\_{1\leq i<j<l+1\_{0\leq k,n\leq m-1}}f^{k}\left(x\_{i}\right)=$ $\left.f^{m}\left(x\_{j}\right)\right)$. $P\_{l,m}$ утверждает, что количество $m$-циклов не более чем 1.

$R\_{m}$ это $∀x¬\left(x=f^{m}(x)∧∧\_{i=1}^{m-1}x\ne f^{i}(x)\right)$. $R\_{m}$ выражает отсутствие $m$-циклов.

$Φ\_{m}$ это $∀x\left(f^{m}(x)\ne x\right)$. Необходимость в комментариях отсутствует.

$F\_{r}$ это $∀x∀y\_{1},…,y\_{r+1}\left(∧\_{i=1}^{r+1}f\left(y\_{i}\right)=x\rightarrow ∨\_{1\leq i<j\leq r+1}y\_{i}=y\_{j}\right)$. $F\_{r}⇔∀α\in Ω^{\*\*}\left(μ^{\*\*}(α)\leq r\right)⇔∀x(k(x)\leq r)$.

$E\_{r,m}$ это $∀x\left(∧\_{0\leq i<j\leq m}f^{i}(x)\ne f^{j}(x)\rightarrow ∀y\_{1},…,y\_{r+1}\left(∧\_{i=1}^{r+1}f\left(y\_{i}\right)=x\rightarrow ∨\_{1\leq i<j\leq r+1}y\_{i}=y\_{j}\right)\right.$. $E\_{m,r}$ утверждает, что если $x$ не является элементом $s$-цикла для всех $s\leq m$, тогда $K(x)\leq r$.

Если $\left|Ω^{\*\*}\right|<ω$ и $ω\notin Ω^{\*\*}$, тогда $D\_{Ω}^{\*\*}$ это $∀x∨\_{(n,m)\in Ω^{\*\*}}\left(∨\_{0\leq i<j\leq n+m-1}f^{i}(x)\ne f^{j}(x)∧f^{n}(x)=\right.$ $\left.f^{n+m}(x)\right)$. В этом случае $D\_{Ω}^{\*\*}⇔∀x\left(χ(x)\in Ω^{\*\*}\right)$.

Перейдем к определению $T\_{U}\_{i}$.

Случай 1. $ε^{\*\*}=\infty $. По условию 5) определения 2.2.3 это эквивалентно $ω\in Ω^{\*\*}$. По условию 12) $μ^{\*\*}(ω)>0$.

Случай 1.1. $Ω^{\*\*}∖\{ω\}\ne ∅$.

Случай 1.1.1. $μ^{\*\*}\left(ω\right)=\infty $. Пусть $θ\_{Ω^{\*\*},ν^{\*\*},μ^{\*\*}}$ это $\left\{Q\_{k,n,m}:(n,m)\in Ω^{\*\*}∖\{ω\},k=μ^{\*\*}(n,m)\right\}∪\left\{P\_{l,m}:0<m<ω,1\leq l=\right.$ $\left.ν^{\*\*}(m)<ω\right\}∪\left\{R\_{m}:0<m<ω,ν^{\*\*}(m)=0\right\}$. Предположим, $T\_{U}\_{i}=θ\_{Ω^{\*\*},ν^{\*\*},μ^{\*\*}}$

Случай 1.1.2. $μ^{\*\*}(ω)=r<ω$. Пусть $T\_{U}\_{i}=θ\_{Ω^{\*\*},ν^{\*\*},μ^{\*\*}}∪\left\{F\_{r}\right\}$.

Случай 1.2. $Ω^{\*\*}=\{ω\}$.

Случай 1.2.1. $μ^{\*\*}(ω)=\infty $. Согласно определению $T\_{U}\_{i}=\left\{Φ\_{m}:0<m<ω\right\}$.

Случай 1.2.2. $μ^{\*\*}(ω)=r$. По определению $T\_{U}\_{i}=\left\{Φ\_{m}:0<m<ω\right\}∪\left\{F\_{r}\right\}$.

Случай 2. $ε^{\*\*}=0$. Заметим, что в этом случае согласно условиям 5) и 8) $ω\notin Ω^{\*\*}$ и $\left|Ω^{\*\*}\right|<ω$. Предположим, $T\_{U}\_{i}=$ $\left\{Q\_{k,n,m}:(n,m)\in Ω^{\*\*},k=μ^{\*\*}(n,m)\right\}∪\left\{P\_{l,m}:0<m<ω,1\leq l=ν^{\*\*}(m)<ω\right\}∪\left\{D\_{Ω}^{\*\*}\right\}$. Не сложно проверить, что в каждом случае $T\_{U}\_{i}$ – это класс эквивалентности робинсоновских теорий унаров, разбитый с помощью отношения косемантичности на робинсоновском спектре $RSp\left(JC\_{U}\right)$ и $Char\left(C\_{T\_{U}\_{i}}\right)=π$. Теорема доказана.

**2.3 О вопросах категоричности универсальных унаров рассмотренных с позиции семантического йонсоновского квазимногообразия**

Данный раздел фокусируется на изучении теоретико-модельных свойств известных и достаточно простых, в смысле сигнатуры, классов алгебр, именно унаров и неориентированных графов. Как уже было указано работы [17, 18] позволяют рассмотреть йонсоновские теории универсалов унаров и их полное описание, А.Р. Ешкеевым и Т.Г. Мустафиным в рамках проведенных научных исследований не только дали исчерпывающую характеристику семантических моделей йонсоновских теорий универсалов, примитивов и теорий всех унаров, но и выявили ключевое отношение между теорией унаров и его центром, используя для этого концепции стабильности. Это позволило глубже понять динамику и взаимодействие элементов унарных систем, а также уточнить их структуру. Полученные результаты открывают новые перспективы для дальнейших исследований в области алгебраических систем, расширяя границы их применения и уточняя ранее известные теоретические положения

Стоит отметить, что с позиции изучения йонсоновских теорий теорема Вота об отношениях между полнотой и категоричностью теорий (если $L$-теория $T$ является $κ$-категоричной, то есть любые две модели мощности $κ$ изоморфны между собой, то такая $L$-теория $T$ полна) не выполняется, так как йонсоновские теории, вообще говоря, не полны и могут иметь конечные модели. Следующий вопрос Е.А. Палютина хорошо известен: существует ли $ω$-категоричный универсал $K$ который не $ω\_{1}$-категоричный? Если этот вопрос спроецировать в рмаках исследования йонсоновский теорий, тогда можно заметить появление некоторых интересных связей между самой йонсоновской теорией и её центром.

В связи с этим, А.Р. Ешкеев [50] получил следующие результаты:

Теорема 2.3.1. [50] $ω$-категоричная йонсоновская теория $T$ языка первого порядка $L$ рассматриваемой сигнатуры $σ$ является совершенной йонсоновской теорией.

Теорема 2.3.2. [50] Если йонсоновская теория $T$ - $κ$-категоричная теория, тогда #-компаньон теории $T$ - $κ$-категоричная теория, где $κ$ как минимум равна счетному кардиналу $ω$.

Теорема 2.3.3. [50] В случае отрицательного ответа на вопрос Ю.А. Палютина для йонсоновской теории, которая удовлетворяет условиям вопроса, центр йонсоновской теории не может быть конечно аксиоматизирован.

Если учитываем, что унары и неориентированные графы это йонсоновские универсалы, тогда получить описание их экзистенциально замкнутых моделей в рамках вышеописанной тематики это актуальная проблема. Данный раздел связан с получением описания экзистенциально замкнутой модели счетно категоричных универсальных унаров, также как и неориентированных графов.

В дополнении к приведенным естественным примерам йонсоновских теорий и достаточно широким классам алгебр, мы можем также заметить, что для произвольной теории $T$ её скулемизация и морлеизация также примеры йонсоновских теорий.

Рассмотрим некоторые понятия и теоремы, представляющие интерес для проведенного исследования.

*Определение 2.3.1.* [45, с. 188] Назовем йонсоновскаую теория $T$ языка первого порядка $L$ cигнатуры $σ$ совершенной теорией, если $C\_{T}$ является $ω^{+}$-насыщенной моделью.

*Теорема 2.3.4.* [45, с. 190] Пусть $T$ – произвольная йонсоновская теория языка первого порядка $L$ cигнатуры $σ$, тогда выполняются следующие два условия: теория $T$ – совершенна; центром йонсоновской теории $T$ ($T^{\*}$) является модельное пополнение рассматриваемой теории $T$.

*Определение 2.3.2.* [45, с. 211] Пусть $κ$ как минимум равна счетному кардиналу $ω$. Йонсоновская теория $T$ языка первого порядка $L$ cигнатуры $σ$ называется $κ$-категоричной йонсоновской теорией, если любые две модели мощности $κ$ теории $T$ – изоморфны друг к другу.

*Определение 2.3.3.* [45, с. 211] Модель $A$ теории $T$ языка первого порядка $L$ cигнатуры $σ$ называется экзистенциально замкнутой моделью теории $T$, если для любой модели $B$ теории T такой что $A⊆B$, для любой $∃$-формулы $∃xφ(x,‾)$, для любого кортежа $‾$ из $A(l(‾))=(l(‾))$ из истинности $B⊨∃xφ(x,‾)$ следует что выполняется истинность $A⊨∃xφ(x,‾)$

Обозначим класс экзистенциально замкнутых моделей теории $T$ как $E\_{T}$, аналогично первому разделу диссертационной работы.

Пусть $A$ – некоторый унар, то есть модель сигнатуры $σ=f\}$, где $f$ это унарный функциональный символ. Пусть $f^{0}(x)=x,f^{n+1}(x)=f\left(f^{n}(x)\right),n\in ω$. Элементы $a,b\in A$ называются $A$-связанными в $X$ если существуют натуральные числа $m$ и $n$ такие что $\left(f^{m}(a)=f^{n}(b)\right)$ и $f^{0}\left(a\right),..,f^{m}(a),f^{0}(b),…,f^{n}(b)\in X$.

Множество $X⊆A$ называется $A$-связанным если любые два элемента из $X$ являются $A$-связанными. Подсистема $B⊆A$ носитель которой является максимально $A$-связанным подмножеством носителя $A$ называется компонентой в $A$. Если $B$ – это компонента в системе $A$, тогда множество $\left\{a\in B:A=\left(f^{n}(a)=a\right)\right.$ для некоторого $n\in ω$ называется циклом компоненты. Обозначим как $K(a,A)$ ограничение $A$ до множества $\left\{b\in A:A⊨\left(f^{n}(b)=a\right)\right.$ для некоторого $n\in ω$ и назовем это корнем элемента $a$ в унаре $A$, и элемент $a$ называется вершиной корня $K(a,A)$.

Запишем особые связи между элементами унаров в форме $∃$-формул:

1. Свойство элемента быть «в начале цикла»: $\left.Φ\_{0}^{n}(z)=Φ^{n}(z)\&∃y¬Φ(y\right)\&f(y)=z$, где $Φ^{n}(z)=\left(f^{n}(z)=z\right)\&(f(z)\ne z)…\left(f^{n-1}(z)\ne z\right);$
2. «$x$ имеет не менее $k$ различных непосредственных представителей»: $Θ(x)=∃x\_{1},…,∃k\left(∧\_{i\ne j<x}x\_{i}\ne x\_{j}∧∧\_{i=1}^{k}f\left(x\_{i}\right)=x\right)$;
3. «существует в точности $k$ различных элементов между $x$ и началом цикла»: $Ψ\_{k}\left(x\right)=∃z∃y\_{1}…∃y\_{k}\left(∧\_{i\ne j<x}\left(y\_{i}\ne y\_{j}\right)∧f^{i}\left(x\right)=y\_{i}∧∧\_{i=1}^{k-1}f\left(y\_{i}\right)\ne f\left(y\_{i+1}\right)∧Φ\_{0}^{n}\left(z\right)∧f\left(y\_{k}\right)=z\right)$

В силу работ $[17,31]$ можно использовать следствие о том, что $∀$-аксиоматизируемая элементарная теории унаров, $Th\_{∀}(U)$, это робинсоновская теория унаров.

Используем обозначения из $[17,18]$.

*Теорема 2.3.5* [18, с. 59]. Пусть $T$ это йонсоновский универсал, $T^{\*}$ его центр. Тогда следующие условия эквивалентны: центр йонсоновского универсала это модельное пополнение йонсоновского универсала $T$; центр йонсоновского универсала, это теория, допускающая элиминацию кванторов (то есть подмодельно полная теория); центр йонсоновского универсала является $ω$-стабильной теорией.

Доказательство Теоремы 2.3.5 позволяет сделать вывод о том, что йонсоновский универсал является совершенной йонсоновской теорией.

*Теорема 2.3.6.* [32, с. 170] 1) Количество попарно различных $\left[T\_{U}\right]$ классов робинсоновских теорий унаров равно $2^{ω}$.

2) Количество попарно различных максимальных $\left[T\_{U}\right]$ классов примитивов робинсоновских теорий равно $2^{ω}$.

3) Количество попарно различных максимальных $\left[T\_{U}\right]$ классов робинсоновских теорий унаров равно $ω$. Более того, это в точности классы теорий, которые имеют следующие характеристики: $π\_{ω},\left\{π\_{0,m} 1\leq \right.$ $m<ω\},\left\{π\_{n,m}1\leq n,m<ω\right\}$, where

$$\begin{matrix}&π\_{ω}:Ω=\{ω\},ν(m)=0 ∀m<ω,μ(ω)=1,ε=\infty ;\\&π\_{0,m}:Ω=\{(0,m)\},ν(m)=\left\{\begin{matrix}0, если k\ne m,\\\infty , если k=m;\end{matrix} μ(0,m)=0,ε=0;\right.\\&π\_{n,m}:Ω=\{(0,m),..,(n,m)\},ν(k)=\left\{\begin{matrix}0, если k\ne m,\\1, если k=m,\end{matrix}\right.\\&μ(k,m)=\left\{\begin{matrix}1, если k<n-1,\\\infty , если k=n-1, ε=0.\\0, если k=n,\end{matrix}\right.\end{matrix}$$

1. Максимальные $∇$-полные $\left[T\_{U}\right]$ классы робинсоновских теорий унаров это единственные классы, которые имеют характеристику $π\_{ω}$.

Доказательство. 1) Легко заметить что количество попарно разных характеристик равно $2^{ω}$. По теореме 3 [18] количество $\left[T\_{U}\right]$ классов робинсоновских теорий унаров равно $2^{ω}$.

2) Пусть $\left[T\_{U}\right]\_{π}^{'}=\left(Th\left(C\_{π}\right)\right)\_{∇}$ где $C\_{π}$ это семантическая модель класса робинсоновских теорий характеристики $π$. Очевидно, $\left[T\_{U}\right]\_{π}^{'}$ - это $∇$-полный примитив. По лемме 1 [17] $\left[T\_{U}\right]\_{π}^{'}$ это класс робинсоновских теорий унаров. Согласно предложению 3 [17] $\left[T\_{U}\right]\_{π}^{'}$ это максимальный класс примитивов робинсоновских теорий унаров. Если $π\_{1}\ne π\_{2}$, тогда $\left[T\_{U}\right]\_{π\_{1}}^{'}\ne \left[T\_{U}\right]\_{π\_{2}}^{'}$, поскольку $\left(\left[T\_{U}\right]\_{π\_{1}}^{'}\right)\_{∀}\ne \left(\left[T\_{U}\right]\_{π\_{2}}^{'}\right)\_{∀}$, следовательно, количество максимальных $\left[T\_{U}\right]$ классов примитивов робинсоновских теорий унаров равен $2^{ω}$.

3) Рассмотрим частичный порядок на множестве всех характеристик в следующей форме. Пусть $π\_{i}=\left(Ω\_{i},ν\_{i},μ\_{i},ε\_{i}\right)$, $i=1,2$. Тогда предположим $\left.π\_{1}\leq π\_{2}⇔Ω\_{1}⊆Ω\_{2} \& ∀m<ω\left(ν\_{1}(m)\right)\leq ν\_{2}(m)\right) \& ∀α\in Ω\_{1}\left(μ\_{1}(α)\leq \right.$ $\left.μ\_{2}(α)\right)\&ε\_{1}⊆ε\_{2}$. Из определения класса $\left[T\_{U}\right]\_{π}$ в доказательство теоремы 3 [18] легко увидеть, что $\left[T\_{U}\right]\_{π\_{1}}=\left[T\_{U}\right]\_{π\_{1}} ⇔π\_{1}=π\_{2}$

Случай 1. $ε=\infty $. Среди таких характеристик минимальной будет только характеристика $π\_{ω}$.

Случай 2. $ε=0$. В этом случае $ω\notin Ω$ и $|Ω|<ω$. Согласно условию 10) из определения характеристики [17] либо $∃0<k<ω(ν(k)=\infty )$, либо $∃(k,l)\in Ω, (μ(k,l))=\infty )$.

Случай 2.1. $∃1\leq k<ω(ν(k))=\infty ))$. Среди таких характеристик минимальными будут характеристики $π\_{0,m},1\leq n<ω,1\leq m<ω$.

Случай 2.2. $∃1\leq k<ω,1\leq l<ω(μ(k,1)=\infty )$. Во множестве таких характеристик минимальными будут характеристики $π\_{n,m},1\leq n<ω,1\leq m<ω$.

4) Заметим, что класс $\left[T\_{U}\right]\_{π}$, который имеет характеристику $π\_{ω}$ – полон, в частности, $∇$-полон. Поэтому он максимальный среди классов робинсоновских теорий унаров. Классы $\left[T\_{U}\right]\_{n,m} 0\leq n<ω,1\leq m<ω$ не являются $∇$-полным, поскольку $\left[T\_{U}\right]\_{n,m}∪∃x\_{1},…,x\_{m+1}\left(∧\_{1\leq i<j\leq m+1}\left(x\_{i}\ne x\_{j}\right)\right)$ и $\left[T\_{U}\right]\_{n,m}∪$ $∀x\_{1},…,x\_{m+1}\left(∨\_{1\leq i<j\leq m+1}\left(x\_{i}=x\_{j}\right)\right)$ совместны. Теорема доказана.

*Теорема 2.3.7.* [32, с. 170] Пусть $[T\_{U}]$ – класс $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $A\in E\_{T\_{U}}$, где $A$ это модель класса $\left[T\_{U}\right]$;
2. $A$ это дизъюнктное объединение компонент с циклами одинаковой длины.

Доказательство. Доказательство этой теоремы базируется на следующей теореме, трех фактах и трех леммах.

*Теорема 2.3.8.* [51, с. 24] Для того чтобы алгебраическая система $A$ принадлежала некоторому $ω$-категоричному универсалу, необходимо и достаточно, чтобы следующие условия были выполнены:

1. $A$ – локально конечна;
2. Существует функция $g:ω\rightarrow ω$ такая что для каждого $a\in A$ и каждого конечного подмножества $X⊆A$ тип $tp(a,X,A)$ реализуется в каждой подсистеме $B⊆A$ которая содержит $X$ и имеет степень $\geq g(|X|)$.

*Факт 2.3.1.* [52] Если йонсоновская теория $T$ – $ω$-категоричная, тогда $T$ – совершенная йонсоновская теория.

*Факт 2.3.2.* [53] Пусть $T$ - $∀∃$-полная йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $T$ это $ω$-категоричная теория;
2. $T^{\*}$ это $ω$-категоричная теория.

Вследствие этих фактов 2.3.1, 2.3.2 и теоремы 1.3.1 получаем следующее: поскольку $\left[T\_{U}\right]$ - класс $ω$-категоричных теорий, $\left[T\_{U}\right]$ это класс эквивалентности совершенных робинсоновских теорий и $E\_{T\_{U}}=Mod\left(T\_{U}^{\*}\right)$, $T\_{U}^{\*}$ явяется $ω$-категоричным универсалом. Таким образом, если $A\in E\_{T\_{U}}$, тогда $A\in Mod\left(T\_{U}^{\*}\right)$. Следовательно, $A$ удовлетворяет условиям критерия Е.А. Палютина (теорема 2.3.8).

В силу предоставленных аргументов, достаточно доказать следующие леммы для доказательства теоремы 2.3.7.

*Лемма 2.3.1.* [32, с. 171] Пусть $A $является моделью класса $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров, $x\in A$. Тогда $∃n,kω:f^{n}(x)=f^{k}(x)$.

Доказательство. В силу критерия Е.А. Палютина, $A$ является локально конечной моделью. Теперь предположим, что $∀n,k\in ω$ : $f^{n}(x)\ne f^{k}(x)$. Это значит, что существует $Y=\left\{y\_{1},y\_{2},…,y\_{n},…\right\}⊆A$, где $f\left(y\_{i}\right)=y\_{i+1}$, и $y\_{i}\ne y\_{j}$ если $i\ne j$, где $i\in \{1,2,…\}$. Но тогда элемент, к примеры $y\_{1}$, порождает бесконечное (счетное) множество $Y$. И это противоречит локальной конечности унара $A$.

*Лемма 2.3.2.* [32, с. 171] Пусть $A$ является моделью класса $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров. Тогда для любого элемента $a\in A$, корень $K(a,A)$ - конечный.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует элемент $a\in A$ такой что корень $K(a,A)$ - бесконечен. Тогда возможны следующие два случая:

1. $Ψ\_{k}(x):k\in ω$ реализуется в унаре $A$;
2. $Θ\_{k}(x):k\in ω$ реализуется в унаре $A$.

В силу критерия Палютина, существует функция $ϕ:ω\rightarrow ω$ такая что для любого $n\in ω$, для любого подунара $B\left[17\right]$ унара $A$, такого, что $\left|A\right|\geq ϕ\left(n\right)$, для любого типа $p\in S^{j}\left(‾\right)\left(‾\in B\right)$ из факта что такой тип элемента $a\in A$ реализуется на $A$, следует, что существует элемент подунара $b$ такой что на $A$ реализуется $p\left(b\right)$. Пусть $n=0$ и $ϕ\left(0\right)=s$. Тогда согласно критерию для любого подунара $B$ унара $\left|A\right|\geq s$ и для любого типа $p\in S^{j}\left(‾\right)\left(‾\in B\right)$ из реализации типа $p\left(a\right)$ на унаре $A$ следует, что существует элемент подунара $b$ такой что на $A$ реализуется (т.е. любой тип элемента унара $A$ реализуется в подунаре $\left.B\right)$.

Рассмотрим цепь, которую обозначим как $Γ$. Пусть $Γ\_{s}$ будет подцепь цепи $Γ$ с циклом, и число элементов в $Γ\_{s}$ равно $s$.

Она имеет следующую форму:

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.3.1.* Подцепь $Γ\_{s}$ цепи $Γ$.

Согласно рисунку 2.3.1 очевидно, что тип, содержащий формулу $Ψ\_{s-n+1}(x)$ не может быть реализован в вышеописанной подцепи $Γ\_{s}$ (т.е., такая формула утверждает, что существуют в точности $s-n+1$ различных элементов между $x$ и началом цикла).

Рассмотрим такое подмножество унара $A$, которое содержит элементы прообразов с циклом длины $s$:

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.3.2.* Подмножество, состоящее из элементов прообразов с циклом длины $s$

Согласно рисунку 2.3.2 очевидно, что ни один конечный унар не реализует множество формул $\left\{Θ\_{k}(x):k\in ω\right\}$. Получаем противоречие.

*Лемма 2.3.3.* [32, с. 172] Пусть $A$ является моделью класса $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров. Тогда:

1. Всякий элемент $A$ входит в какой-либо цикл;
2. Все циклы унара $A$ имеют одинаковую длину.

Доказательство.1) В силу леммы 2.3.1 и леммы 2.3.2, всякая компонента унара $A$ является конечной компонентой и имеет форму $D\_{n}⊕^{n}K$, где $D\_{n}$ – это цикл длины $n,$ пусть $a\in A$ это элемень цикла длины $n$, и $K$ это конечный корень элемента $a$.

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.3.3.* Конечная компонента унара $A$

Пусть $b$ это элемент конечного корня $K$ элемента $a\in A$ и $b\ne a,$ то есть $b$ не включен ни в одном рассматриваемом цикле. Тогда существует элемент $k$ такой что $f^{k}(b)=a$ и $f^{s}(b)\ne a$ для $s<k$. Рассмотрим формулу $∃y\left(f^{k}(y)=a\&\_{i<k}f^{i}(y)\ne a\right)\&f^{k}(a)=a\&\&\_{i<k}f^{i}(a)\ne $ $a,k>1$. Очевидно, что в бесконечном подунаре $A^{'}⊆A$, полученном путем комбинирования только тех элементов, которые включены в некоторые циклы, данная формула не реализуется. Что противоречит условию 2) критерия Палютина (теорема 2.3.8). Таким образом первый пункт леммы доказан.

2) Предположим противное: существуют как минимум два цикла различной длины. Тогда рассмотрим два возможных случая:

Случай 1. Для некоторого $n$ существует конечное число циклов длины $n$. Тогда для некоторого $n\_{0}$ (с непустым множеством циклов длины $n\_{0}$), убираем все циклы длины $n\_{0}$ из унара $A$. Получаем бесконечный подунар, в котором $f^{n\_{0}}(x)=x\&\&\_{i<n\_{0}}f^{i}(x)\ne x$ не выполняется.

Случай 2. Пусть $n\_{0}$ – это число, для которого существует бесконечное множество длины $n\_{0}$ в $A$. Согласно предположению, существует хотя бы один цикл $k\ne n\_{0}$ в $A$. Избавляемся от всех циклов длины $k$ в $A$. Получаем бесконечный подунар, в котором формула $f^{k}(x)=x\&\&\_{i<k}f^{i}(x)=Z$ не выполняется.

Таким образом, получаем противоречие согласно условию 2) критерия Палютина (теорема 2.3.8) во всяком из двух случаев. Докажем достаточность. Если унар $A$ это дизъюнктное объединение бесконечного числа компонент, которые являются циклами одинаковой длины, тогда $A$ это модель $ω$-категоричного универсала. Рассмотрим конечное подмножество $\left\{a\_{1},…,a\_{n}\right\}⊆A$. Всякий элемент порождает цикл длины $n$. Поэтому, подсистема, порожденная конечным подмножеством $\left\{a\_{1},…,a\_{n}\right\}$ содержит не более $nk$ элементов. Найдем функцию $g$, существование которой требуется согласно критерию. Рассмотрим конечное подмножество элементов $X\_{k}=\left\{a\_{1},…,a\_{k}\right\}⊆A$. Не сложно понять, что общее число различных типов над $X\_{k}$ не превосходит числа $n(k+1)$. Тогда любая подмодель содержит циклы "связанные" с элементами из $X\_{k}$, и один цикл, не зависимый от них, реализует все $n(k+1)$ типы. Поэтому, $g(k)$ будет равно $n(k+1)$.

В связи с вышеизложенным вопросом, поставленным Е.А. Палютиным, из описания экзистенциально замкнутой модели унара (теорема 2.3.8), можно заметить следующий немаловажный факт.

*Следствие 2.4.1.* [32, с. 172] Счетно категоричные теории унаров являются тотально категоричными.

**2.4 О вопросах категоричности неориентированных графов рассмотренных с позиции семантического йонсоновского квазимногообразия**

$G$ – это граф, далее понимаемый как алгебраическая система сигнатуры $σ\_{G}=\{R\}$, где $R$ – это бинарное симметричное отношение, т.е. неориентированный граф. Рассмотрим множества как в примере 1.1.1. Множество ребер графа, которое равно пустому множеству, называется вполне несвязным графов. Путем в графе $G$ называется чередующаяся последовательность вершин и ребер: $x\_{i},\left⟨x\_{i},x\_{i+1}\right⟩,x\_{i+1},\left⟨x\_{i+1},x\_{i+2}\right⟩,…$. Маршрутом называется цепь, представляющая собой последовательность вершин и ребер, в начале и в конце маршрута расположены вершины, путь в графе, у которого вершины различны, называется цепью. Граф $G$ называется связным, если любая пара его вершин связана простой цепью. Максимально связный подграф графа $G$ называется связной компонентой, или просто компонентой графа. Подграф графа $G$ это граф, в котором все вершины и ребра принадлежат $G$. Степень вершины в графе $G$ это число ребер, инцидентных этой вершине. Вершина степени $1$ называется висячей (или концевой) вершиной. Граф называется неориентированным, если $E⊆\left\{W⊆V \right| 1\leq \left|W\right|\leq 2$, где $V$ это множество вершин, $E$ – множество ребер.

Счетно категоричные графы были изучены в [54]. Рассмотрим основной результат работы [54], представленный в виде следующей теоремы

*Теорема 2.4.1.* [54, с. 120] Пусть $G$ – это произвольный счетный граф, в котором всякая компонента содержит конечное число циклов. Тогда $G$ – это $ω$-категоричная модель, тогда и только тогда, когда $G$ ограничен и конечное число $1$-типов реализуется на нем.

В силу работ [17, 18] можно использовать следствие о том, что $∀$-аксиоматазириуемая элементарная теория графов $Th\_{∀}(G)$ – это робинсоновская теория графов.

Таким образом, рассмотрим множество $JC\_{G}=\left\{C\_{Δ\_{G}}∣Δ\_{G}\in J(Th(K)),C\_{Δ\_{G}}\right.$ – это семантическая модель $\left.Δ\_{G}\right\}$ сигнатуры $σ\_{G}=\{R\}$, где $Δ\_{G}$ – это робинсоновская теория унаров, $R$ – бинарной симметричное отношение. Такое $JC\_{G}$ определяет семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских неориентированных графов, как в разделе 2.1.

Используя определение 2.1.2 робинсоновского спектра, построим робинсоновский спектр множества $JC\_{G}$,

*Определение 2.4.1.* [32, с. 173] Множество $RSp\left(JC\_{G}\right)$ робинсоновских теорий сигнатуры $σ\_{G}=\left\{R\right\}, R$ – это бинарное симметричное отношение, $RSp\left(JC\_{G}\right)=\left\{T\_{G}∣T\_{G} - робинсоновская теория неориентированных графов и ∀C\_{T\_{G}}\in JC\_{G},C\_{T\_{G}}=T\_{G}\right\}$ называется робинсоновским спектром для класса $JC\_{G}$, где $JC\_{G}$ – это семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских неориентированных графов.

Далее, получим фактор-множество, обозначенное как $RSp\left(JC\_{G}\right)/⋈$ и состоящее из классов эквивалентности, разбитых по отношению косемантичности $\left[T\_{G}\right]\in RSp\left(JC\_{G}\right)/⋈$ .

Сопоставим теорему 2.4.1 со следующей теоремой.

*Теорема 2.4.2.* [32, с. 173] Пусть $\left[T\_{G}\right]$ – это класс $ω$-категоричных робинсоновских теорий неориентированных графов. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $B\in E\_{T\_{G}}$, где $B$ – это модель класса $\left[T\_{G}\right]$;
2. $B$ – это бесконечный, вполне несвязный граф.

Доказательство. Для того, чтобы доказать эту теорема, используем аналогичную схему, использованную в доказательстве 2.3.7 предыдущего подраздела, т.е. достаточно доказать следующие леммы.

*Лемма 2.4.1.* [32, с. 173] Следующие условия эквивалентны:

1. $G$ – счетно категоричный универсальный граф;
2. $G$ – бесконечный вполне несвязный граф.

Докажем необходимость.

Предположим противное. Следующее утверждение известно: Если $G$ счетно категоричный универсальный граф, тогда из того факта, $G$ имеет бесконечное число несвязных компонент следует тот факт, что $G$ является вполне несвязным. Таким образом, $G$ состоит из конечного числа компонент, но тогда, учитывая факт бесконечности графа $G$, должна быть как минимум одна компонента. Возможные случаи: либо существует граница для длин цепей, либо существуют цепи любой данной длины.

Рассмотрим первый случай. Возьмем произвольную точку $a$ из этой компоненты. Рассмотрим множество всех маршрутов, проходящих через $a$. Множество всех точек, включенных в тех маршрутах, которые совпадают с компонентой, поэтому, оно бесконечное. Поскольку, длины маршрутов ограничены, бесконечное число маршрутов проходит через $a$. Точки этих маршрутов являются висячими вершинами (вершины степени 1):

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.3.4.* Множество всех маршрутов, проходящих через $a$

Рассмотрим подграф $Γ$, состоящий только из этих висячих вершин. Очевидно, если существуют $a\in G$ и $b\in G$ такие, что $R(a,b)$, тогда тип $tp(a,b/∅)$ не реализован в $Γ$. Что противоречит критерию Е.А. Палютина. Рассмотрим второй случай. Для этого, докажем следующую лемму.

*Лемма 2.4.2.* [32, с. 174] Пусть $\left[Δ\_{G}\right]$ – класс $ω$-категоричным робинсоновских теорий неориентированных графов. Если $G⊨\left[Δ\_{G}\right]$ и без циклов, тогда в $G$ нет бесконечных цепей.

Доказательство. Пусть $\left\{x\_{i}\right\}\_{i\in ω}$ - цепь. Рассмотрим подграф $\left\{x\_{i}\right\}\_{i\in ω}∖\left\{x\_{3k}\right\}\_{k\in ω}$, который имеет форму:

![](data:application/octet-stream;base64...)

*Рисунок 2.3.5.* Подграф $\left\{x\_{i}\right\}\_{i\in ω}∖\left\{x\_{3k}\right\}\_{k\in ω}$

Выберем несвязный подграф $Γ$ в цепи, тогда тип $tp(a,b/∅)$ не реализуется в $Γ$. В силу бесконечности, $Γ$ противоречит универсальной категоричности (критерий Палютина). Лемма доказана.

Пусть $Γ$ – связная компонента, $B\_{Γ}$ – множество висячих вершин.

*Лемма 2.4.3.* [32, с. 174] $B\_{Γ}$ – бесконечное множество.

Доказательство. Предположим противное: $B\_{Γ}$ – конечное множество. Так как компонента бесконечная, и множество $B\_{Γ}$ - конечно, поэтому, сузествует бесконечное множество $E$ вершин $Γ$, которые не являются висячими. Пусть $E=\left\{e\_{1},e\_{2},…\right\}$. Но $Γ$ – это связная компонента, это означает, что множество невисячих вершин формирует бесконечную цепь, что противоречит последней лемме 2.5.2. Таким обрзом, получаем, что если граф $G$ имеет такую пару $⟨x,y⟩$, что $xRy$, тогда граф не удовлетворяет предположению условия леммы 2.5.3 о счетно категоричной универсальности графа.

Поэтому, если граф $G$ – счетно категоричный универсальный граф, тогда $G$ – вполне несвязный граф.

Докажем достаточность. Если граф $G$ – бесконечный вполне несвязный граф, тогда $G$ – счетно категоричный универсальный граф.

Покажем выполнение условий: 1) универсальности и 2) категоричности.

Универсальность класса вполне несвязных графов следует из того факта, что он аксиоматизируем универсальной формулой $∀x∀y¬R(x,y)$.

Возьмем два подграфа $Γ\_{1},Γ\_{2}$, таких, что $\left|Γ\_{1}\right|=\left|Γ\_{2}\right|$. Теоретико-множественные отображения подграфов $Γ\_{1}$ на $Γ\_{2}$ дает изоморфизм между $Γ\_{1}$ и $Γ\_{2}$ как между гарфами. Теорема доказана. Также как и в случае унаров относительно вопроса Палютина, из описания экзистенциально замкнутого графа, следующее очевидно имеет место быть:

*Следствие 2.4.1.* [32, с. 175] Счетно категоричные робинсоновские теории графов тотально категоричные.

**2.5 Йонсоновские экзистенциально замкнутые унары расширенной сигнатуры**

Унары – одни из самый простых алгебраических систем. В данном разделе рассмотрим более сложный случай унаров в рамках рассмотрения обогащенной сигнатуры и трех видов их теорий: теория всех унаров, универсалы и примитивы [17]. Моноид $S$ называется стабилизатором (суперстабилизатором, $ω$-стабилизатором), если $Th\left(A\right)$ - стабильная (суперстабильная, $ω$-стабильная) теория для любого полигона $A$ над $S$. В работе [57], замечено, что из [16], Шелах отметил, что цикличные моноиды - суперстабилизаторы.

*Теорема 2.5.1.* [55] Моноид $S$ – суперстабилизатор тогда и только тогда, когда $S$ – вполне упорядоченный моноид.

Пусть $T\_{U}$ – теория всех унаров данного языка $L$ сигнатуры $σ=<f>$, где $f$ – унарный функциональный символ. Поэтому, теория всех унаров $T\_{U}$ - пустая (множество аксиом этой теории – пустое множество). Интерес представляет тфакт о том, что предложения $ϕ$($\overbar{x}$) и ψ($\overbar{x}$) языка первого порядка $L$ называются логически эквивалентными, если они эквивалентны относительно пустой теории. Другими словами, это то же самое, что сказать, что $ϕ$($\overbar{x}$) и ψ($\overbar{x}$) эквивалентны в каждой $L$-структуре. Можно привести следующий пример: $¬∀x$ истинно эквивалентно $∃x¬ ϕ$. В работе [3] было замечено. что любая пустая теория произвольной сигнатуры – это йонсоновская теория. Из этого факта заключим, что теория всех унаров $T\_{U}$ – это йонсоновская теория. Тем не менее, непосредственно докажем, что этот факт выполняется.

*Теорема 2.5.2.* [33, с. 20] Теория всех унаров $T\_{U}$ – йонсоновская теория.

Доказательство. Чтобы доказать этот факт, нам необходимо использовать факт 1.3.1. Очевидно, пустая теория универсальна, следовательно, она индуктивна. Определение 1.3.9 семантической модели говорит, что это $ω^{+}$-однородная-универсальная модель теории.

Другими словами, для того, чтобы доказать теорему 2.6.2., достаточно построить семантическую модель теории $T\_{U}.$ Согласно характеристике семантической модели всех унаров $char\left(C\_{T\_{U}}\right)$, такую модель всегда можно построить.

Теорема 2.5.2 доказана.

Напомним, что согласно определению 2.1.3, $T\_{U}^{\*}=Th(C\_{T\_{U}})$ – элементарная теория семантической модели $C\_{T\_{U}}$, которая является полной. Поэтому, все результаты из [10-16] применимы к $T\_{U}^{\*}.$

Назовем унар йонсоновским, если это модель некоторой йонсоновской теории.

*Теорема 2.5.3.* [33, с. 21] Пусть$ T\_{U} $ - йонсоновская теория всех унаров, и $ M$ – её модель.$ M$ – компонента теории $ T\_{U} $ тогда и только тогда, когда $ M\in E\_{T\_{U}}$, где $ E\_{T\_{U}}$ – это класс экзистенциально замкнутых моделей (экзистенциально замкнутых йонсоновских унаров) теории $ T\_{U}.$

Доказательство. Для того, чтобы доказать теорему, необходимо использовать следующие факты:

*Теорема 2.5.4.* [56, с. 422] Каждый элементарный клас – это объединение его компонентов.

Пусть $ E\_{T\_{U}}$ – это элементарный класс сигнатуры $ σ=\{f\}$, где $f $ - унарный функциональный символ и $ M\in E\_{T\_{U}}$.$ E\_{T\_{U}}$ – класс моделей $ Th\left(E\_{T\_{U}}\right)$, и $ Th\left(E\_{T\_{U}}\right)$ это множество всех формул, выполнимых в $ E\_{T\_{U}}.$

*Лемма 2.5.1.* [56, с. 422] Предположим $M$ - элементарный класс и $N$ – компонента класса $SM$. Тогда, существует модель $A\in M, $такая что $N=0A.$

Согласно лемме 2.5.1, существует $B\in E\_{T\_{U}} $, такая что$ M$ принадлежит универсальному классу, порожденному с помощью $ B$, обозначим этот класс через $ Mod\left(Th\_{Qf}\left(B\right)\right); Th\_{Qf}\left(B\right) $ - это множество всех бескванторных формул, выполнимых в $B. $Более того, согласно Лемме 2.5.1, мы можем использовать тот факт, что: $ Mod\left(Th\_{Qf}\left(B\right)\right) $ - компонента класса подструктур $E\_{T\_{U}}.$ Существование такой $ B $ гарантируется тем фактом, что мы всегда можем рассмотреть $ T\_{U}^{\*}=Th(C\_{T\_{U}})$ как множество всех бескванторных формул, выполнимых в семантической модели $ C $ йонсоновской теории всех унаров.

*Лемма 2.5.2.* [56, с. 422] Предположим, что $ M$ - это элементарный класс.

i) Если $ N$ – компонента $ SM$, тогда $ N∩M$ – компонента $M$ и $ S(N∩M)=N.$

ii) Если $ N$ - компонента $M$, тогда $ SN$ – компонента $SM$ и $N=M∩SN.$

Поэтому, согласно лемме 2.5.2, $Mod\left(Th\_{Qf}\left(B\right)\right)∩E\_{T\_{U}} $ – компонента класса $E\_{T\_{U}}$. Лемма доказана.

Далее будем работать с йонсоновскими универсалами и примитивами унаров. Так как мы уже доказали, что теория всех унаров – йонсоновская, выходит, что эта йонсоновская теория – совершенная. В диссертационной работе неоднократно использовалось свойство, вытекающее из теоремы 1.3.1 о том, что в случае совершенности йонсоновской теории $ T $ её центр $ T^{\*} $ - также совершенная йонсоновская теория. Следующая теорема – это критерий совершенности йонсоновской теории. Следующая теорема доказана в работе [18] и является краеугольной для основного результата текущего раздела. Также, для более доступного понимания следующего исследования рекомендуется вспомнить теорему 2.3.5. Введм новые обозначения, используемые в дальнейшем тексте диссертационной работы.

Пусть $ T\_{∀} $ - йонсоновский универсал унаров, $ C\_{T\_{∀}} $ - его семантическая модель и $ T\_{∀}^{\*} $ - его центр. Таким образом, в силу теоремы 2.6.6, поскольку в работе [18] было доказано, что $ T\_{∀}^{\*} $ - это модельное пополнение $ T\_{∀}$, и теоремы 2.6.5, которая утвердлает, что вэтом случае произвольная йонсоновская теория является совершенной, йонсоновский универсал унаров $ T\_{∀}$ - совершенная йонсоновская теория.

Рассмотрим язык первого порядка $ L $ сигнатуры $ σ=<f> $, где $f $ - унарный функциональный символ и расширим ей с помощью символов новой константы $c $ и предиката $ P.$

Пусть $ σ^{''}=σ∪σ^{'}$, где $ σ=<f> , σ^{'}=\left(P^{1},c\right)$. Рассмотрим теорию $\overbar{T}\_{∀}$ в новой насыщенной сигнатуре $ σ^{''}$ следующим образом: $ \overbar{T}\_{∀}=T\_{∀}∪Th\_{∀}\left(C\_{T\_{∀}}, a\right)\_{a \in P^{1}\left(C\_{T\_{∀}}\right)∪P^{1}\left(c\right)}∪\left\{P^{1}, ⊆\right\}∪P^{1}\left(c\right). $Здесь,$ P^{1}$ – новый унарный предикатный символ, $ \{P^{1}, ⊆\} $ – бесконечное множество предложений, которое выражает тот факт, что в $ C\_{T\_{∀}} $ предикат $ P^{1}$ выделяет экзистенциально замкнутую подмодель семантической модели $ C\_{T\_{∀}}$, т.е. $ P^{1}\left(C\_{T\_{∀}}\right)=M, M\in E\_{T\_{∀}}, M$ – это экзистенциально замкнутая модель (йонсоновский экзистенциально замкнутый унар), $ E\_{T\_{∀}}$ - класс экзистенциально замкнутых моделей теории $ T\_{∀}$.

Существование такой структуры $M$ представляется с помощью Теста Тарского-Воота. Тест утверждает, что сущетсвует такое элементарное расширение $B$ для подструктуры $A$, что $A≼B$. Следовательно, $A≼\_{∃\_{1}}B⇔A$ – экзистенциально замкныто в $B$. Следовательно, $M≼\_{∃\_{1}}C\_{T\_{∀}}$.

Рассмотрим, будет ли новая теория $\overbar{T}\_{∀}$ йонсоновской теорией в новой насыщенной сигнатуре. Следующие определения будут полезны в этом.

*Определение 2.6.2.* [57, c.120] Йонсоновская теория называется наследственной тогда и только тогда, когда в любом из своих допустимых расширений она сохраняет свою йонственность.

Рассмотрим $\overbar{T}\_{∀}$, как она была описана выше.

*Теорема 2.5.5.* [33, с. 22] Пусть йонсоновская теория унаров $ T\_{∀} $ - совершенная йонсоновская теория, $ \overbar{T}\_{∀} $ ее наследственное расширение, тогда $ \overbar{T}\_{∀} $ - также совершенная йонсоновская теория унаров.

Доказательство. Пусть $ T\_{∀} $ - совершенная йонсоновская теория унаров, и $ C\_{T\_{∀}} $ - её семантическая модель. Внедряем допустимое расширение в оригинальную сигнатуру таким образом, как описано выше и получаем новую теорию, обозначенную как $ \overbar{T}\_{∀}$. Согласно работе [61], расширение допустимо, когда оно производится с помощью предиката, выделяющего экзистенциально замкнутую модель, что не нарушает исходную структуру моделей и не приводит к противоречиям в теориях языка данной сигнатуры. Поэтому, согласно определению 2.6.2, теория $\overbar{T}\_{∀}$ явлется йонсоновской теорией. Следовательно, семантическая модель тории $ \overbar{T}\_{∀} $ существует, согласно факту 1.3.1 , эту семантическую модель мы обозначим через $ \overbar{C}\_{T\_{∀}}$. Обозначим центр теории $ \overbar{T}\_{∀} $ следующим образом: $ \overbar{T}\_{∀}^{\*}=Th\left(\overbar{C}\_{T\_{∀}}\right)=Th\left(C\_{T\_{∀}},c,a\right)\_{c, a\in P^{1}\left(\overbar{C}\_{T\_{∀}}\right) } $

Согласно определению 2.3.1., семантическая модель $ C\_{T\_{∀}} $ теории $ T\_{∀} $ является $ ω^{+} $-насыщенной моделью. Следовательно, $ C\_{T\_{∀}}⊨p\_{c}$, где$ p\_{c} $– это главный тип, состоящий из aормул с новыми константами $c$.

Предположим, что$ \overbar{T}\_{∀} $ не совершенная йонсоновская теория; следовательно, $\overbar{C}\_{T\_{∀}}$ - не $ω^{+}$ -насыщенная. Это означает, что существует тип $ b⊨p\_{X}, X\in \overbar{C}\_{T\_{∀}}$, $ \left|X\right|\leq ω^{+}, b\in X $ такой, что $ \overbar{C}\_{T\_{∀}}⊭p\_{X}$. Таким образом, он будет реализован в некотором элементарном расширении $ \overbar{C}'\_{T\_{∀}}$. Если мы ограничим $ \overbar{C}'\_{T\_{∀}}/σ^{'}$, мы получим$ C'\_{T\_{∀}} $ , эта ограниченая семантическая модель будет элементарным расширением $ C\_{T\_{∀}}$ таким, что $C'\_{T\_{∀}}⊨p\_{X}$. Т.е. $ b\in C'\_{T\_{∀}}$, однако, $ b\notin C\_{T\_{∀}}. C\_{T\_{∀}} $ является$ ω^{+}$-насыщенной моделью, поскольку $ T\_{∀} $ - это совершенная йонсоновская теория унаров. Поэтому, $ C\_{T\_{∀}}⊨p\_{X}$ и$ b \in C\_{T\_{∀}}$. Одни и те же элементы будут реализовывать один и тот же тип. Получам противоречие.

Следовательно, $ \overbar{C}\_{T\_{∀}}$ - также $ ω^{+} $-насыщенная модель и $ \overbar{T}\_{∀} $ - совершенная йонсоновская теория унаров. Теорема доказана.

Пусть $ σ^{''}=σ∪σ^{'}$, где $ σ=<f>, σ^{'}=\left(P^{1},c\right)$. Рассмотрим теорию $ \overbar{T}\_{∇} $ в новой раширенной сигнатуре $ σ^{''} $ следующим образом:$ \overbar{T}\_{∇} = T\_{∇}∪Th\_{∇}\left(C\_{T\_{∇}}, a\right)\_{a\in P^{1}\left(C\_{T\_{∇}}\right)∪P^{1}\left(c\right)}∪\left\{P^{1}, ⊆\right\}∪P^{1}\left(c\right). $Здесь$, P^{1}$ – новый унарный предикат, $ \{P^{1}, ⊆\} $ - это бесконечное множество предложений, которое выржает тот факт,что в $ C\_{T\_{∇}} $ предикат $ P^{1}$ выделяет экзистнциально замкнутую подмодель семантической модели $ C\_{T\_{∇}}$, т.е. $ P^{1}\left(C\_{T\_{∇}}\right)=M, M\in E\_{T\_{∇}}, M$ – это экзистенциально замкнутая модель (Йонсоновский экзистенциально замкнутый унар), $ E\_{T\_{∇}}$ - это класс экзистенциально замкнутых моделей теории $ T\_{∇}$.

Легко увидеть, что $\overbar{T}\_{∇}⊇ \overbar{T}\_{∀}$ и Теорема 2.5.5 применяется к рассматриваемой $\overbar{T}\_{∇}$. Следовательно, $\overbar{T}\_{∇}$ - совершенный йонсоновский примитив унаров; мы обозначим его центр как $\overbar{T}\_{∇}^{\*}$ и его семантическую модель как $\overbar{C}\_{T\_{∇}}$.

Были получены следующие теоремы.

*Теорема 2.5.6.* [33, с. 23] Пусть $\overbar{T}\_{∇}$ - йонсоновский примитив унаров, $\overbar{T}\_{∇}^{\*}$ - его центр, тогда $\overbar{T}\_{∀}=\overbar{T}\_{∀}^{\*}$.

Доказательство. Поскольку $\overbar{T}\_{∇}⊆\overbar{T}\_{∇}^{\*}$, тогда очевидно, что $\overbar{T}\_{∀}⊆\overbar{T}\_{∀}^{\*}$. Докажем обратное включение с помощью противоречия. Предположим, что $ φ\in \overbar{T}\_{∀}^{\*}\\overbar{T}\_{∀}.$ Пусть $ φ=∀\overbar{x}ψ\left(\overbar{x}\right)$. Поскольку $ \overbar{T}\_{∇}⊢φ$ – неверно, тогда $ \overbar{T}\_{∇}∪\left\{¬φ\right\}$ – совместная теория. Пусть $ A⊨\overbar{T}\_{∇}∪\{¬φ\}$. Тогда $ A⊨∃\overbar{x}¬ψ\left(\overbar{x}\right), A⊨\overbar{T}\_{∇}.$ По причине $ ω^{+}-$универсальности модели $\overbar{C}\_{T\_{∇}}$, мы можем предположить, что $ A⊆\overbar{C}\_{T\_{∇}}$, где $ \overbar{C}\_{T\_{∇}} $- семантическая модель $ \overbar{T}\_{∇} $ и $ \overbar{C}\_{T\_{∇}}⊨\overbar{T}\_{∇}^{\*}.$ Пусть $ \overbar{a}\in A $ такой, что$ A⊨¬ψ\left(\overbar{a}\right).$ Поскольку формула $ ¬ψ\left(\overbar{x}\right) $ не содержит кванторов, $\overbar{C}\_{T\_{∇}}⊨¬ψ\left(\overbar{a}\right).$ Однако, $ φ\in \overbar{T}\_{∇}^{\*} $ и $\overbar{C}\_{T\_{∇}}⊨\overbar{T}\_{∇}^{\*},$ так $ \overbar{C}\_{T\_{∇}}⊨φ,$ то есть, $ \overbar{C}\_{T\_{∇}}⊨∀\overbar{x}ψ(\overbar{x}).$ Мы имеем противоречие.

Теорема доказана.

*Теорема 2.5.7.* [33, с. 23] Пусть $ \overbar{T}\_{∀}\_{1}, \overbar{T}\_{∀}\_{2} $ - йонсоновские универсалы унаров, $\overbar{C}\_{T\_{∀\_{1}}}, \overbar{C}\_{T\_{∀\_{2}}}$ – их семантические модели, и $ \overbar{T}\_{∀}\_{1}^{\*},\overbar{ T}\_{∀}\_{2}^{\*} $ - их центры, соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $ \overbar{T}\_{∀}\_{1}=\overbar{T}\_{∀}\_{2};$

2) $ \overbar{C}\_{T\_{∀\_{1}}}≃\overbar{C}\_{T\_{∀\_{2}}};$

3) $ \overbar{T}\_{∀}\_{1}^{\*}=\overbar{T}\_{∀}\_{2}^{\*}.$

Доказательство. 1) $⇒ $ 2) $⇒ $ 3) тривиально.

3) $⇒ $ 1). Используя Теорему 2.6.9, мы имеем$ \overbar{T}\_{∀}\_{1}= \overbar{T}\_{∀}\_{1}^{\*}=\overbar{T}\_{∀}\_{2}^{\*}= \overbar{T}\_{∀}\_{2} .$

*Лемма 2.5.3.* [33, с. 23] Пусть $ \overbar{T}\_{∇} $ - йонсоновская теория, $ \overbar{T}\_{∇}^{\*} $ - ее центр, и $ \overbar{T}\_{∇}^{'} $ - такая теория, что $ \overbar{T}\_{∇}⊆ \overbar{T}\_{∇}^{'}⊆ \overbar{T}\_{∀∃}^{\*}.$ Тогда $ \overbar{T}\_{∇}^{'} $ - также йонсоновская теория.

Доказательство. Легко увидеть, что $ \overbar{C}\_{T\_{∇}} $ - также $ \overbar{T}\_{∇}^{'} $-универсальная $ \overbar{T}\_{∇}^{'} $-однородная модель $ ∀∃ $-теория примитива $ \overbar{T}\_{∇}^{'}$. Следовательно, $ \overbar{T}\_{∇}^{'}$ - йонсоновская.

Лемма доказана.

*Теорема 2.5.8.* [33, с. 24] Пусть $ \overbar{T}\_{∇} $ - йонсоновский примитив унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $ \overbar{T}\_{∇} $ - максимальный йонсоновский примитив унаров;

2) Теория$ \overbar{T}\_{∇} $ полна относительно $ ∇$.

Доказательство. 1) $⇒ $ 2). Пусть $ φ\in ∇ $. Предположим, что $ \overbar{T}\_{∇}⊢φ$ не верно и $ \overbar{T}\_{∇}⊢¬φ$ не верно. Далее, пусть $ ψ $ - одна из формул $ φ, ¬φ$ такая, что $ \overbar{T}\_{∇}⊊\overbar{T}\_{∇}∪\left\{ψ\right\}⊆\overbar{T}\_{∀∃}^{\*}$. С помощью леммы 2.6.3., $ \overbar{T}\_{∇}∪\left\{ψ\right\} $ - йонсоновский примитив. Противоречит максимальности $ \overbar{T}\_{∇}$.

2) $⇒ $ 1). Пусть $ φ\in ∇ $ и $ \overbar{T}\_{∇}∪\{φ\} $– совместна согласно полноте $ \overbar{T}\_{∇} $ относительно $ ∇$ мы имеет $ \overbar{T}\_{∇}⊢φ$. Тогда$, \overbar{T}\_{∇}$ - максимальная.

Теорема доказана.

*Предложение 2.5.1.* [33, с. 24] 1) Каждый йонсоновский универсал унаров $ \overbar{T}\_{∀} $ - полон относительно $ ∇ $ и является максимальным универсалом.

2) Существует максимальный йонсоновский универсал $ \overbar{T}\_{∀} $, которые не является $ ∇ $-полным.

Доказательство. 1) Доказательство такое же как и в 2) $⇒ $ 1) Теоремы 2.6.11.

2) Пусть $ σ $ - пустая сигнатура, и $\overbar{T}\_{∀} $ - теория всех моделей данной сигнатуры. Очевидно$, \overbar{T}\_{∀} $ только единственный, и, следовательно, максимальный йонсоновский универсал. Однако, $\overbar{T}\_{∀}$ - не является $ ∇ $ полной, поскольку $ \overbar{T}\_{∀}⊢∃xy\left(x\ne y\right) $ не верно, и $ \overbar{T}\_{∀}⊢∀xy(x=y) $ - также не верно.

Предложение доказано.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В четвертом веке до нашей эры было философское обсуждение о том, двигается ли мысль по прямой или кругами. Аристотель поддержал теорию о прямой линии, потому что он считал, что доказательства прямолинейны. Платон сказал, что кругами, по астрономическим причинам. Исследование, посвященное данной диссертационном работе, позволяет согласиться с Платоном. Все более с течением времени проведение новых научных исследований позволяет определить новую информацию об уже существующих базовых понятиях.

Приведенные важные сведения из теории моделей и определения понятий, связанных с полигонами над группами, полигонами над моноидами и полигонами над циклическим моноидом, сведения из йонсоновских теорий и полученный основной результат подтверждает обозначенные актуальность, новизну и значимость проведенного исследования.

Цель исследования, заключавшаяся в исследовании теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий полигонов, а также классов их моделей достигнута.

Исследование вносит существенный вклад в развитие теории моделей йонсоновских теорий, также как и в изучение позитивной теории моделей, унаров (полигонов над циклическим моноидом), неориентированных графов. Диссертационная работа имеет теоретический характер, однако, полученные в рамках научного исследования результаты применимы к обобщению таких областей математических наук, как теория алгоритмов, вычислимость, теория игр, теория чисел. Кроме того, перспектива продолжения исследования тематики не вызывает сомнения, так как рассмотрение йонсоновских теорий алгебраических систем позволяет обобщить и уточнить существующие понятия классической теории модели.

Были получены результаты, обобщающие уже имеющие понятия и определния позитивной теории моделей, включая новый подход к рассмотрению классов эквивалентности позиитвного спектра полигонов над группой как классов их йонсоновских теорий, так и не йонсоновских теорий.

Изучение универсальный (робинсоновских) теорий унаров представляет интерес, особенно с позиции новых определений их йонсоновского (робинсоновского) спектров и семантического йонсоновского квазимногообразия.

Поэтому, совокупность полученных результатов имеет крауегольное значение для развития исследования теоретико-модельного аппарата совершенных полигонов.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

Была поставлена задача - найти критерий косемантичности семантических моделей классов йонсоновских $∃PM$-теорий полигонов над группой множества $PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$. Задача реализована в виде следующей теоремы:

*Теорема 1.4.6.* [30, с. 179] Пусть $K\_{Π}$ – класс всех полигонов над группой, $\left[T\_{Π}\_{1}\right],\left[T\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}$ – семантическая модель класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$, $\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}$ - центр класса $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$. Тогда

1. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – классы йонсоновских $∃PM$-теории, тогда $C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=$ $ch\left(\left[T\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right);$
2. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$– классы не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существуют такие классы йонсоновских $∃PM$-теории $\left[T'\_{Π}\_{1}\right],\left[T'\_{Π}\_{2}\right]\in PSp\left(K\_{Π}\right)/⋈\_{∃PM}$, что $T'\_{Π}\_{i}$ – является оболочка Кайзера для$ T\_{Π}\_{i}$, где $i=1,2, C\_{\left[T\_{Π\_{1}}\right]'}⋈\_{∃PM}$ $C\_{\left[T\_{Π\_{2}}\right]'}⇔ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left(\left[T^{'}\_{Π}\_{2}\right]^{\*}\right)$.
3. если $\left[T\_{Π}\_{1}\right]$ – класс йонсоновских $∃PM$-теории, и $\left[T\_{Π}\_{2}\right]$ – класс не йонсоновских $∃PM$-теорий, тогда существует такая йонсоновская $∃PM$-теория $T'\_{Π}$, что $C\_{\left[T\_{Π}\_{1}\right]}⋈\_{∃PM}C\_{[T^{'}\_{Π}]}⇔ch\left(\left[T\_{Π}\_{1}\right]^{\*}\right)=ch\left([T'\_{Π}]^{\*}\right)$.

Согласно задаче, звучащей как: описать классы косемантичности множества $RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$ (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квзаимногообразия робинсоновских унаров) и соответствующих характеристик их семантических моделей $C\_{Δ}\in JC\_{U}$ была получена следующая теорема:

Теорема 2.2.1. [31, с. 174] Пусть $JC\_{U}$ – семантическое йонсоновское *Теорема 2.2.1.* [31, с. 174] Пусть $JC\_{U}$ – семантическое йонсоновское квазимногообразие робинсоновских унаров, $\left[T\_{U}\_{i}\right]\in RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$.

1) Каждый класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ имеет характеристику.

2) Для любых произвольных характеристик существует класс $\left[T\_{U}\_{i}\right]$ который имеет эту характеристику.

3) Два класса $\left[T\_{U}\_{1}\right],\left[T\_{U}\_{2}\right]$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие характеристики равны.

По задаче: описать классы косемантичности множества $RSp\left(JC\_{U}\right)/\_{⋈}$ (робинсоновский спектр йонсоновского семантического квзаимногообразия робинсоновских унаров) $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров был получен следующий результат:

*Теорема 2.3.7.* [32, с. 170] Пусть $[T\_{U}]$ – класс $ω$-категоричных робинсоновских теорий унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $A\in E\_{T\_{U}}$, где $A$ это модель класса $\left[T\_{U}\right]$;
2. $A$ это дизъюнктное объединение компонент с циклами одинаковой длины.

Согласно задаче: описать йонсоновские примитивы унаров в сигнатуре, расширенной новым унарным предикатным символом $P^{1}$, выделяющим экзистенциально замкнутую модель в семантической модели йонсоновского примитива унаров и символами констант была получена следующая теорема:

*Теорема 2.5.8.* [33, с. 24] Пусть $ \overbar{T}\_{∇} $ - йонсоновский примитив унаров. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $ \overbar{T}\_{∇} $ - максимальный йонсоновский примитив унаров;

2) Теория$ \overbar{T}\_{∇} $ полна относительно $ ∇$.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Jonsson B. Homogeneous relational systems / B. Jonsson / / Math. Scand. — 1960. — 8. - No. 1 . - P. $137-142$.

2 Morley M. Homogeneous universal models / M. Morley, R.L. Vaught // Math. Scand. - 1962. - 11. - No. 3. - Р. 37-57.

3 Mustafin Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson / Y. Mustafin / The Journal of Symbolic Logic. - 2002. - 67. - No. 2. - P. 528-536.

4 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории и их компаньоны / А.Р. Ешкеев, Р.М. Оспанов // Материалы 10-й межвуз. конф. по математике и механике. - Алматы, 2005. — № 1. - С. 85-90.

5 Ешкеев А.Р. Связь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема / А.Р. Ешкеев, Р.М. Оспанов // Tp. V Казах.-франц. коллоквиума по теории моделей: сб. науч. тр. - Караганда: Изд-во Караганд. гос. ун-та, 2001. - С. 65-75.

6 Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр / Т.Г. Мустафин // Математические труды Ин-та мат. $-1998.∼1.-$ № 2 . - С. $135-197$.

7 Ешкеев А.Р. Категоричные позитивные йонсоновские теории / А.Р. Ешкеев // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. - 2006. - 44. - № 4. - С. 10-16.

8 Ешкеев А.Р. О классе $Δ$-позитивно экзистенциально замкнутых моделей $Δ$ - $PJ$ и $Δ$ - $PR$ теорий / А.Р. Ешкеев // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2007. — 48. - № 4. C. $49-56$.

9 Ешкеев А.Р. Счетная категоричность $Δ$ - $PM$-теорий / А.Р. Ешкеев / / Тез. докл. 12-й Межвуз. конф. по математике, механике и информатике. - Алматы: Қазақ университеті, 2008. — C. 67 .

10 Шишмарев Ю.Е. О категоричных теориях одной функции // Математические заметки. – 1972. – Volume 11, No. 1. – P. 89-98. <https://doi.org/10.1007/BF01366918>

11 Иванов А.А. Полные теории унаров // Алгебра и логика. – 1984. – Volume 23, No. 1. – P. 4-73. https://doi.org/10.1007/BF00969341

12 Иванов А.А. О полных теориях унаров // Сибирский математический журнал. – 1986. – Volume 27, No. 1. – P. 57-69. https://doi.org/10.1007/BF00969341

13 Ряскин А.Н. Число моделей полных теорий унаров / А.Н. Ряскин / АН СССР. Сиб. отд. // Тр. Ин-та мат. - 1988. - № 8. - C. 162-182.

14 Ряскин А.Н. Ранг Ласкара и свойство конечного покрытия для полных теорий унаров // Алгебра и логика. – 1993. – Volume 32, No. 6. – P. 690-706. https://doi.org/10.1007/BF02263056

15 Marcus L. Minimal models of theories of one function symbol // Israel Journal of Mathematics. – 1974. – Volume 18. – P. 117-131. https://doi.org/10.1007/BF02756866

16 Marcus L. The number of countable models of a theory of one unary function // Fundamenta Mathematicae. – 1980. – Volume 108, No. 3. – P. 171-181. https://doi.org/10.4064/fm-108-3-171-181

17 Ешкеев А.Р. Описание йонсоновских универсалов унаров / А.Р. Ешкеев, Т.Г. Мустафин // Исследования в теории алгебраических систем. — 1995. - С. 51-57.

18 Ешкеев А.Р. Некоторые свойства йонсоновских примитивов унаров / А.Р. Ешкеев, Т.Г. Мустафин // Исследования в теории алгебраических систем: сб. науч. тр. - Караганда: Изд. Караганд. гос. ун-та, 1995. - C. 58-61.

19 Gould V., Mikhalev A., Palyutin E., Stepanova A. Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts // Journal of Mathematical Sciences (New York). – 2010. – Volume 164, No.2. – P. 195-227. https://doi.org/10.1007/s10958-009-9720-8

20 Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Yarullina A.R. Existentially positive Mustafin theories of S-acts over a group // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. − Алматы, 2022. − С.51-52.

21 Yarullina A.R., Kaliolla D.Ye. The perfect Jonsson S-acts // Актуальные задачи математики, механики и информатики: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (8–9 сентября 2022 г.) − Караганда, 2022. − С.40-42.

22 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Kaliolla D.Ye. «Позитивный йонсоновский спектр $∃PM$-теорий полигонов над группой» // Третьи международные научные Таймановские чтения на тему «Современная математика: проблемы и приложения», посвященной 85-летию Кызылординского университета имени Коркыт Ата (25 ноября 2022 г.) – Кызылорда, 2022 г. – С. С. 370-375

23 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M. On countable categoricity of semantic Jonsson quasivarieties of unars and graphs // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (5-7 апреля) – Алматы, 2023. – C. 32-33.

24 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M., Kassymetova M.T. On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (5-7 апреля) – Алматы, 2023. – C. 34-35.

25 Yarullina A., Amanbekov S., Suindykova A. On semantic Jonsson quasivariety of Robinson unars // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World (TWMS Congress-2023) (September 20-23). – Turkestan, 2023. – P. 219.

26 Yarullina A., Amanbekov S., Amandyk B. On semantic Jonsson quasivariety of undirected graphs // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World (TWMS Congress-2023) (September 20-23). – Turkestan, 2023. – P. 220.

27 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R. On ∆-Jonsson spectrum of ∆-PJ-theories // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (5-7 апреля) Алматы, 2024. – C. 259-260.

28 Yarullina A., Suindykova A. On quantity of equivalence classes of Robinson spectrum of unars // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (5-7 апреля) Алматы, 2024. – C. 255-256.

29 Yarullina A., Amandyk B. On characteristic of equivalence classes of Robinson spectrum regarding their primitive // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (5-7 апреля) Алматы, 2024. – C. 256-257.

30 Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Yarullina A.R. [Existentially positive Mustafin theories of S-acts over a group](https://www.webofscience.com/wos/woscc/full-record/WOS%3A000822446900014) // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – Karaganda, 2022. − №2(106). − P.172-185. DOI: 10.31489/2022M2/172-185 (Scopus: Процентиль - 46).

31 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M., Kassymetova M.T. On Robinson spectrum of the semantic Jonsson quasivariety of unars // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. − 2023. − №2(110). − P. 169-178. DOI: 10.31489/2023M2/169-178 (Scopus: Процентиль - 46).

32 Yeshkeyev A.R., Yarullina A.R., Amanbekov S.M. On categoricity questions for universal unars and undirected graphs under semantic Jonsson quasivariety // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. − 2023. − №3(111). − P. 165-180. DOI: 10.31489/2023M3/165-180 (Scopus: Процентиль - 46).

33 Yeshkeyev, A., Yarullina, A. and Kassymetova, M. 2024. Jonsson Existentially Closed Unars of Expanded Signature. Bulletin of Abai KazNPU. Series of Physical and mathematical sciences. 87, 3 (Sep. 2024), 17–26. DOI:https://doi.org/10.51889/2959-5894.2024.87.3.002.

34 Gould V. Axiomatisability problems for $S$-systems / V. Gould / J. London Math. Soc. - 1987. - 35. - No. 2. - P. 193-201.

35 Мустафин Т.Г. О стабильностной теории полигонов / Т.Г. Мустафин // Теория моделей и ее применение. - Новосибирск: Наука, Сиб. отд-е, 1988. - 8. - С. 92-107.

36 Mustafin T.G. On similarities of complete theories / T.G. Mustafin // Logic Colloquium '90. Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. Helsinki. - 1990. - P. 259-265.

37 Yeshkeyev A.R. Connection of Jonsson theory with some Jonsson polygons theories / A.R. Yeshkeyev, G.A. Urken / / Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. - 2019. 95. - No. 3. - P. 74-78.

38 Marker D. Model Theory: An Introduction. Springer, 2002. – 351 p.

39 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории и их классы моделей / А.Р. Ешкеев, М.Т. Касыметова. — Караганда.: Изд-во Караганд. ун-та, 2016. — 370 с.

40 Кейслер Х.Дж. Основы теории моделей. Справочная книга по математической логике / Х.Дж. Кейслер. - Теория моделей. - М.: Наука, 1982. - С. 55-108.

41 Ben-Yaacov I. Positive model theory and compact abstract theories / I. Ben-Yaacov // Journal of Mathematical Logic. - 2003. - 3. - No. 1. - P. 85-118.

42 Ben-Yaacov I. Compactness and independence in non first order frameworks / I. Ben-Yaacov / / Bulletin of Symbolic Logic. - 2005. - 11. - No. 1. - P. 28-50.

43 Ben-Yaacov I. Fondements de la logique positive / I. Ben-Yaacov, B. Poizat // Journal of Symbolic Logic. - 2007. - 72. — No. 4. - P. 1141-1162.

44 Poizat B. Positive Jonsson Theories / B. Poizat, A. Yeshkeyev / Logica Universalis. - 2018. 12. - 1-2. - P. 101-127.

45 Yeshkeyev A.R. Теории и их модели. Том 1 / Монография в 2 томах. Караганда: Издетельство КарУ им. академика Е.А. Букетова, 2024 — 282 с.

46 Mustafin E. Jonsson equivalent and cosemantical models / E. Mustafin, E. Nurkhaidarov // Quatrieme Colloque Franco-Touranien de Theorie des Modeles, Resumes des Conferences. — Marseille. — 1997. — P. 13–15.

47 Мустафин Т.Г. Описание йонсоновских теорий полигонов над группой / Т.Г. Мустафин, Е.С. Нурхайдаров / / Исследования в теории алгебраических систем: сб. науч. тр. (межвуз.). - Караганда: Изд-во КарГУ, 1995 - С. 67-73.

48 Yeshkeyev A.R. Теории и их модели. Том 2 / Монография в 2 томах. Караганда: Издетельство КарУ им. академика Е.А. Букетова, 2024 — 297 с.

49 Мальцев А.И. Алгебраические системы / А.И. Мальцев. - М.: Наука, 1970. — 392 с.

50 Yeshkeyev A.R. Properties of companions of Jonsson's theory / A.R. Yeshkeyev / / Model theory and algebra France-Kazakhstan conference: Abstracts. Astana. - 2005. - C. 77.

51 Палютин Е.А. Модели со счетно-категоричными универсальными теориями / Е.А. Палютин // Алгебра и логика. — 1971. — 10. — № 1. — С. 23-32.

52 Ешкеев А.Р. Связь йонсоновских теорий и универсальных подклассов йонсоновских теорий с их центром / А.Р. Ешкеев / / Теория моделей в Казахстане: сб. науч. работ, посвящ. памяти А.Д.Тайманова; под ред. М.M. Еримбетова. - Алматы: ECO STUDY, 2006. - C. 102-118.

53 Овчинникова Е.В. Счетно-категоричные графы / Е.В. Овчинникова // IX Всесоюзн. конф. по мат. логике: тез. - 1998. - 106. - С. 120.

54 Мустафин Т.Г. Стабильные теории. – 1990. – Караганда, Докторская диссертация.

55 Krauss, P.H. Homogeneous universal models of universal theories // Zeitschr. Math. Logik Grundl. Math. – 1977. - Volume 23. – P. 415-426. https://doi.org/10.1002/malq.19770232705

56 Yeshkeyev A.R. An essential base of the central types of the convex theory / A.R. Yeshkeyev, M.T. Omarova / / Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. - 2021. - No. 1(101). - P. 119-126.

57 Палютин, Е.А. E^\*-стабильные теории // Алгебра и логика. – 2003. – Volume 42, No. 2. – P. 194-210. https://doi.org/10.1023/A:1023302423817