Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті

ӘОЖ 510.67 Қолжазба құқығында

**УРКЕН ГУЛЖАН АТЬКЕНКЫЗЫ**

**ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ҰҚСАСТЫҒЫ**

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Ешкеев А.Р.

Шетелдік ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Морозов А.С.

(Ресей)

Қазақстан Республикасы

Қарағанды, 2024

**МAЗМҰНЫ**

|  |  |
| --- | --- |
| БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР..................................................... | 3 |
| КІРІСПЕ............................................................................................................ | 4 |
| **1 МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ**.................. | 24 |
| 1.1 Алгебралық модельдердің сигнатурасы және бірінші ретті тіл............. | 24 |
| 1.2 Мономорфизмдер, элементарлы эквиваленттілік және ішкі модельдерді сипаттау...................................................................................... | 26 |
| 1.3 Бар болуы туралы теорема........................................................................ | 28 |
| 1.4 Модельді толықтық……………………………………….............……… | 35 |
| 1.5 Гильберттің он жетінші мәселесі………………………………….....….. | 37 |
| 1.6 Модельдік толықтыру…………………………………………………..... | 42 |
| 1.7 Ішкі модельді толықтық……………………………………………......... | 44 |
| **2 ТОЛЫҚ ТЕОРИЯЛАР ЖӘНЕ ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАР АЯСЫНДА ЗЕРТТЕЛЕТІН МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ МАҒЛҰМАТТАРЫ**..................................................................... | 46 |
| 2.1 Таза қосарлар және толық теориялардың рұқсаттылығы………............ | 46 |
| 2.2 Толық теориялардың таза үштігі ………….............................................. | 48 |
| 2.3 Толық теориялардың ұқсастығы................................................................ | 50 |
| 2.4 Йонсондық теориялар туралы түсінік....................................................... | 51 |
| 2.5 Йонсондық теорияның компаньондары ………………………………... | 54 |
| **3 ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ СЕМАНТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ СИНТАКСИСТІК ҰҚСАСТЫЛЫҒЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ БОЙЫНША АЛЫНҒАН НЕГІЗГІ НӘТИЖЕЛЕР**................................... | 57 |
| 3.1 Йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастылығы..................................................................................................... | 57 |
| 3.2 Йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастығы және олардың рұқсаттылықпен байланысы……..................................................................... | 58 |
| 3.3 Кейбiр йонсондық теория полигондарымен йонсондық теорияның байланысы.......................................................................................................... | 60 |
| 3.4 Йонсондық теориялардың ұқсастылық ұғымның кейбір қасиеттері….. | 63 |
| 3.5 Йонсондық спектрлер кластарының ұқсастықтары................................. | 66 |
| 3.6 Бекітілген йонсондық теориялардың семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделінің анықталған тұйықтамасы................ | 72 |
| **ҚОРЫТЫНДЫ**................................................................................................ | 80 |
| **ПAЙДAЛAНЫЛҒAН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**............................................ | 81 |

**БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР**

|  |  |
| --- | --- |
|  | – сигнатура |
|  | – тіл |
| С | – семантикалық модель |
|  | – Т теориясының центрі |
| , , … | − модельдер |
| Th() − | − моделінің элементарлы теориясы |
|  | – теориясының барлық модельдер классы |
|  | – үйлесімді енгізу қасиеті |
|  | – амальгама қасиеті |
|  | – таза қосарлар |
| - T | – T теориясының барлық экзистенциалды тұйық модельдері |
|  | – *n* бос айнымалымен экзистенциалды формулалар торы |
|  | –  семантикалық моделінің кейбір экзистенциалды тұйық ішкі жиынының тасымалдаушысы |
|  | – йонсондық семантикалық үштік |
|  | – полигондар теориясы |
|  | – косеманттылық қатынасы |
|  | – моделінің йонсондық спектрі |
|  | – бойынша моделінің йонсондық спектрінің фактор жиыны |
|  | – және теорияларының йонсондық синтаксистік ұқсастығы |
|  | – және теорияларының семантикалық йонсондық ұқсастығы |

**КІРІСПЕ**

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы:** Диссертациялық жұмыс йонсондық теориялардың ұқсастығы тақырыбы аясында модельдер теориясының негізгі зерттеу тақырыптарының бірі болып саналады. Модельдер теориясының даму кезеңіне модельдер теориясы аясындағы бірқатар атақты мамандарды жатқызуға болады: А. Лахлан, Дж. Балдуин, Дж. Кейслер, Д. Ласкар, Б. Пуаза.

1985-ші жылдан бастап модельдер теориясының жаңа даму кезеңі басталады, яғни оны шартты түрде геометриялық стабильділік деп атауға болады және ол келесі ғалымдардың еңбегімен тікелей байланысты: Б.Зильбер, Э. Хрушовски. Сонымен қатар әлемдік ғылым Леопольд Лёвенгейм (1878-1915), Туральф Скулем (1887–1963), Курт Годель (1906-1978), Альфред Тарский (1902–1983) және Анатолий Мальцевті (1909-1967) теория модельдің негізін қалаушылар деп санайды.

Атақты маман Х.Дж Кейслер өз еңбегінде [1] модельдер теориясының екі тарихи бағытын көрсетеді: батыс және шығыс. Батыс теориясы норвег математигі Туральф Скулем мен американдық профессор Альфред Тарский еңбектерімен дамыды. Бұл жерде көбіне сандар теориясы, жиындар теориясына көңіл бөлінді және оған логиканың барлық бірінші ретті формуласы қолданды. Ал шығыс теориясы А. Мальцев пен А. Робинсон негізінде дамыды. Мұнда формулалары кванторлар болатын абстрактылы алгебра төңірегінде өрбіді. Сонымен қатар ол батыстағы модельдер теориясы толық теорияны, ал шығыстағы модельдер теориясы йонсондық теорияны зерттейтінін атап көрсеткен. Сонымен, осы екі бағыт арасындағы айырмашылықтан йонсондық теориялар «шығыс» теория модельдерінің негізгі проблемалы зерттеу объектісі екенін анық байқаймыз.

Тарихи тұрғыдан қарағанда, модельдер теориясының аппараты толық теория үшін айтарлықтай қарқынды дамыды. Бүгінгі таңда модельдер теориясының математиканың әр түрлі аралас салаларында, мысалы, алгебра, сандар теориясы, геометрия, математикалық талдау сияқты заманауи жетістіктерін қолдану сұранысқа ие болып табылады. Сонымен қатар модельдер теориясынан алынған нәтижелер моделдер теориясының жоғарыда көрсетілген даму кезеңдеріне сәйкес әдістері толық теориялар үшін алынған. 70-ші жылдардан бастап моделдер теориясының мамандары толық емес теориялар үшін толық теориялардың саналымды моделдерінің теоремасының аналогын дәлелдеуін көрсетті. Дербес жағдайда, А.Макинтайр «шығыс» толық емес жағдайы үшін типтерді түсіру туралы теореманы алады.

Тәжірибе көрсеткендей, «шығыс» моделдер теориясы өзінің нәтижелерін "батыс" аналогтарынан кейін алады. Ал қазіргі таңда толық емес теорияларды зерттеу аппараты толық теориялардың техникалық аппаратынан әлсіз болып отыр, онда біздің йонсондық теорияларға қызығушылығымыз дұрыс деп ойлаймыз.

80-ші жылдың аяғында қазақстандық математик Т.Г. Мұстафин йонсондық теорияның негізгі мақсаттары мен әдістерін анықтауға назар аударды. Сонымен қатар, аталған екі бағыттың байланысын қазақстандық профессор Т.Г. Мұстафин түсіне білді. Ол екі бағыттың негізгі түсініктерінің кейбір жолының ұқсастықтарын анықтай білді. Әрі қарай модельдер теориясының және математикалық логиканың негізгі мәселелерін шешу мақсатында жүзден аса ғылыми еңбек жазып, осы саланың дамуына зор үлес қосқан. Атап өтетін болсақ: «Стабильді теориялар» [2], Т.Г. Мұстафин., Т.А. Нұрмағанбетов «Модельдердің қолданбалы теориясына кіріспе» [3], Т.Г. Мұстафин «Модельдер теориясының саны» [4] атты оқу құралдарын шығарып, көптеген ғылыми нәтижелерді алған. 1984 жылдар аяғында профессор Т.Ғ. Мұстафин йонсондық теориялардың зерттеуін жүргізді, онымен жалпы йонсондық теориялардың толық түсінігі алынды. Мұстафинның шәкірті А.Р. Ешкеев және оның шәкірттері йонсондық теорияларды зерттеулерді әрі қарай жалғастырды және А.Р. Ешкеев позитивті йонсондық теориялар ұғымын енгізді.

Ешкеев А.Р. йонсондық теориялардың кемелділік критерийі [5], әлбеттілік критерийін және центрінің әлбеттілігі және йонсондық теориялар үшін синтаксистік және семантикалық ұқсастығын [6] толық теориялардың ұқсастығымен [7] пара парлығын зерттеп дәлелдеген және де алғаш рет централды тип және йонсондық спектр ұғымын енгізген.

Жоғарыда айтылғандай, йонсондар теорияларды тарихи жағынан зерттеу «шығыс» моделдер теориясының тақырыбына жатады. Бір жағынан йонсон шарты - бұл алгебраның кең класты зерттеуінде пайда болған кәдімгі алгебралық талаптар. Бұл мысалдардың барлығы алгебрада да және де математиканың басқа салаларына да маңызды. Көріп тұрғанымыздай, аталған тізімнен йонсондық теорияларды зерттеуге арналған қолдану сферасының техникасы жеткілікті кең болуы мүмкін. Екінші жағынан йонсондық теорияның мысалдарына Абельдік группалар теориясы, сызықтық реттер теориясы, реттелген өрістер теориясы, Буль алгебралар теориясы, бекітілген сипаттамадағы өрістер теориясы жатады. Сонымен, модельдер теориясындағы екі бағыттарының арасындағы айырмашылығы (батыс және шығыс сипаттағы) шартты түрде жеткілікті екенін ескереміз, бұл йонсондық теорияны оқыту өзінің мәні бойынша «шығыс» моделдер теориясының мәселесіне жатады.

Йонсондық теориялардың ұқсастығын, оның ішінде синтаксистік және семантикалық ұқсастығын модельді-теоретикалық қасиеттері арқылы зерттеудің өзектілігі күмән тудырмайды, сонымен қатар ол модельдер теориясының қойылған есептерінің қызықты да, күрделі мәселесі болып табылатындығы анық. Сонымен қатар, диссертациялық жұмыста йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығына қатысты нәтижелерді қарастырады.

Йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа және өзекті әдісі толық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы ұғымдарын пайдалана отырып зерттеу, себебі йонсондық теорияның центрі толық теория болып табылады.

Сонымен қатар, синтаксистік және семантикалық ұқсастық ұғымдары стабилділік, әлбеттілік және Морли рангі сияқты барлық маңызы бар модельді-теоретикалық қасиеттерді сақтайды. Зерттеуге алып отырған йонсондық теорияның аясындағы ұқсастық ұғымы йонсондық теорияның семантикалық үштiк тiлiнде қарастырылады.

Бұл диссертациялық жұмыстың әрі қарайғы теориялық зерттеулері және нәтижелерін тәжірибеде қолдану үшін пайдалы да, қызықты болатын жаңа ғылыми нәтижелер алынды және алынған нәтижелер модельдер теориясының жоғарыда аталған екі бағытын дамытуға ықпал ететіні сөзсіз.

Диссертациялық жұмыс өзара тығыз байланысқан үш тараудан тұрады. Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында модельдер теориясының негізгі ұғымдары қарастырылған, атап айтсақ алгебралық модельдердің сигнатуралары, бірінші ретті тіл, бар болуы туралы теорема, теорияның мысалдары, мономорфизмдер, элементарлы эквиваленттілік, модельді толық сияқты, Гильберттің он жетінші проблемасы, ішкі модельді толықтық сияқты негізгі тақырыптар қарастырылды.

Екінші тарауда йонсондық теориялар мен толық теориялар аясында зерттелетін модельдер теориясының қажетті мағлұматтары көрсетілген. Бұл тарауда йонсондық теорияның, жалпы айтқанда, толық емес теорияларды зерттеу аясында, компаньондары, толық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы, толық теориялардың рұқсаттылығы модельдер теориясының классикалық мәселелері қарастырылды.

Диссертациялық жұмыстың үшінші тарауында негізгі нәтижелер көрсетіледі, атап айтсақ йонсондық спектірлерінің кластарының ұқсастықтары қарастырылған. Әр параграфта, сәйкесінше йонсондық теориялардың семантикалық және синтаксистік ұқсастылығының байланысы, кейбір йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастығы және олардың рұқсаттылылықпен байланысы, йонсондық спектрлердің кластарының ұқсастықтарының негізгі тұжырымдары мен дәлелдемелері көрсетілген.

**Тақырыптың қазіргі жағдайы мен өзектілігі:**

Модельдер теориясында толық теорияларды классификациялау есебі қазірге дейін осы салада ең өзекті мәселе болып табылады. Біздің қарастырып отырған йонсондық теориялар, жалпы айтқанда, толық емес болып табылады. Сондықтан бұл теориялардың ұқсастылық ұғымы бойынша классификациялаудың көкейкестілігі күдіксіз анық. Негізі ұқсастық деген ұғым толық теориялар үшін енгізілген ұғым. Сонымен қатар, толық емес үшін осы ұғымды зерттеу, әрине жаңа тақырып болып табылады. Және зерттеудің де тәсілдері жаңа болып есептелінеді.

**Жұмыстың негізгі мақсаты мен ғылыми жаңалығы.**

**Зерттеудің мақсаты:** Диссертациялық зерттеудің негізгі мақсаты йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарын зерттеу.

**Зерттеудің міндеттері:**

Диссертациялық жұмыстың мазмұны мынадай есептерді зерттеу болып табылады:

1. Бульдік сақина мен Буль алгебра теориялардың синтаксистік ұқсастығы және өзара интерпретация жасайтынын қарастыру.
2. Буль алгебрасы теориясы абельдік группа теориясына интерпретация жасайтынын қарастыру.
3. Кез келген -толық кемел йонсондық теория үшін кейбір синтаксистік ұқсас -толық кемел йонсондық полигондар теориясын табу.
4. Эзистенциалды жай дөңес йонсондық теорияның семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиынының кемел фрагменттерінің синтаксистік және семантикалық ұқсастығының сипаттамасын алу.
5. Йонсондық спектрлердің класстарының ұқсастығын зерттеу аясындағы нәтижелерді алу.
6. Кейбір йонсондық теорияның семантикалық моделінің ішкі жиындары бойынша форкинг қылмайтын қатынасты зерттеу аясында, егер бұл ішкі жиындар йонсондық болса, онда осы ішкі жиындарда алғашқы геометрияны анықтайтын тұйықталу операторының ұғымын қолданып тұйықталу операторын сипаттайтын нәтижелерді алу.

**Зерттеудің объектісі:** Зерттеу объектісі-йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығының модельді-теоретикалық қасиеттері.

**Зерттеу нысаны:** Зерттеу нысаны болыпйонсондық теориялардың ұқсастығы тақырыбы қарастырылады.

**Зерттеу әдістемесі:** Классикалық моделдер теориясының және әмбебап алгебраның қалыптасқан зерттеу тәсілдерімен қолдану және ерекше йонсондық теориялардың зерттейтін тәсілі-ол семантикалық тәсіл.

Оның мазмұны негізгі қасиеттерді қарастырып отырған теорияға тасымалдау.

**Ғылыми жаңалығы:** Йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастық арасындағы байланыстарын модельді-теоретикалық қасиеттері бойынша алынған нәтижелер жаңа болып табылады.

**Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңыздылығы.** Модельдер теориясының құндылығы сөзсіз өте зор. Мысалы, модельдер теориясының жетістіктері таза фундаментальды математикаға тиісті болған себебімен, қолдануы да әмбебап алгебра модельдер теориясының дамуына қолдануға болады. Сонымен қатар, кейінгі кезде әмбебап логикаға да қолдануға ықтимал.

**Қорғауға шығарылған негізгі нәтижелер:**

Қорғауға шығарылады:

1. Бульдік сақина мен Буль алгебра теориялардың синтаксистік ұқсастығы және өзара интерпретация жасайтыны қарастырылды.
2. Буль алгебрасы теориясы абельдік группа теориясына интерпретация жасайтыны қарастырылды.
3. Кез келген -толық кемел йонсондық теория үшін кейбір синтаксистік ұқсас -толық кемел йонсондық полигондар теориясы табылды.
4. Экзистенциалды жай дөңес йонсондық теорияның семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиынының кемел фрагменттерінің синтаксистік және семантикалық ұқсастығының сипаттамасы алынды.
5. Йонсондық спектрлердің класстарының ұқсастығын зерттеу аясында нәтижелер алынды.
6. Кейбір йонсондық теорияның семантикалық моделінің ішкі жиындары бойынша форкинг қылмайтын қатынасты зерттеу аясында, егер бұл ішкі жиындар йонсондық болса, онда осы ішкі жиындарда алғашқы геометрияны анықтайтын тұйықталу операторының ұғымын қолданып тұйықталу операторын сипаттайтын нәтижелер алынды.

**Сенімділік және негізділік:** Жұмыста қолданылған әдістердегі негізгі тұжырымдамалар теорема түрінде келтіріліп және олардың дәлелдеулері берілген**.**

**Жұмысты апробациялау.**

Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды:

1. Handbook of the 6th World Congress and School on Universal logic (Виши (Франция), 2018 – 16-26 маусым).

2. 16th Asian Logic Conference (Нұр-Сұлтан: Назарбаев университеті, 2019 – 17-21 маусым).

3. Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2019 – 3-5 сәуір).

4. «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференциясы (Нұр-Сұлтан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019 – 16-19 қазан).

5. «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды: Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, 2019 – 12-13 маусым).

6. Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: Математика және математикалық модельдеу институты, 2024 – 16-19 сәуір).

7. Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің Қолданбалы математика семинары («Математикалық логика» лабораториясы).

**Жарияланымдар.**

*Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланым:*

1. Similarities of Jonsson spectra’s classes // Bulletin of the Karaganda University.Mathematics Series. - 2023. - №4(112). - P. 130-143.

*Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдардағы жарияланымдар:*

1. The admissibility and similarity of Jonsson theories // Вестник Карагандинского университета. Серия математика. - 2018. - №1(89). - P. 42-48.
2. Syntactic similarity of definable closures of Jonsson sets // Вестник Карагандинского университета. Серия математика. – 2018. - №2(90). – P. 119-123.
3. Йонсондық теориялардың ұқсастылық ұғымның кейбір қасиеттері // Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті хабаршысы. Физика–математика ғылымдары сериясы. - 2018. - №4(64). – Б. 32-37.
4. Connection of Jonsson theory with some Jonsson polygons theories // Вестник Карагандинского университета. Серия математика.- 2019. - №3(95). - P. 74-78.

*Халықаралық конференциялар материалдарындағы жарияланымдар:*

1. Similarity of definable closures of Jonsson sets // Handbook of the 6th World Congress and School on Universal logic (Vichy:Vichy University Compus, 2018. - P. 247-248).
2. Syntactic and semantic similarity of hybrids // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2019. - Б. 24-25).
3. Йонсондық жиынының фрагменттерінің ұқсастығы //профессор Рамазанов Мұрат Ыбырайұлының 70 жылдық мерейтойына орайластырылған «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды: Академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, 2019. - Б. 19-20).
4. Similarity of classes from Jonsson spectrum // 16th Asian Logic Conference (Нұр- Сұлтан: Назарбаев Университеті, 2019. - Б. 44-45).
5. Подобия центральных типов наследственных теорий // «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019): халықаралық конференциясы (Нур-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019. – Б. 174).
6. Синтаксическое подобие некоторых йонсоновских теорий и их связь допустимостью // Қазіргі математика: есептер мен қолданбалар: Академик А.Д. Таймановтың 100 жылдығына арналған Екінші халықаралық ғылыми Тайманов оқуларының еңбектер жинағы. (Қызылорда: Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті, 2017. - Б. 125-130).
7. Об определимом замыкании экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели фиксированной йонсоновской теории //Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты. - 2024. - Б. 229-230).

*Республикалық конференция:*

1. Определимые замыкания йонсоновских множеств и их подобие // Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университетінің хабарлары. Математика, физика, информатика сериясы. Қазақстан математиктерінің «Математиканың өзекті мәселелері» атты конференцияcы (Түркістан, 2018. -Том 2. – С. 186-190).

**Диссертация құрылымы.** Диссертациялық жұмыс 84 беттен және келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, үш бөлім, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі.

**Жұмыстың қысқаша мазмұны.** *Анықтама 1.1.2.* [8]. тілінің термі екі ереженің көмегімен жүзеге асады:

1. барлық айнымалылар және тұрақтылар терм болып саналады;
2. егер термдері және орынды функционалдық символы – да болса, онда терм болады.

*Анықтама 1.1.3.* [8, с. 17]. тілінің атомдық формуласы келесі түрде анықталады.

1. егер тілінің және термдері болса, онда теңдік деп аталатын атомдық формула бар;
2. егер термдері және орынды предикаттық символы – да болса, онда атомдық формула болады.

Формуладағы бос айнымалылар түсінігі индукция арқылы анықталады. Формуланы құру үшін қолданылатын индукцияның қадамдар саны бойынша жүзеге асырылады:

1. егер – атомдық формула болса және – формула құрамында болады, онда - формуласының бос айнымалысы болып табылады;
2. егер – формуласының бос айнымалысы және болса, онда - формуласының бос айнымалысы болып табылады;
3. егер – формуласының бос айнымалысы болса, онда - және формулаларының бос айнымалысы болып табылады.

Бос айнымалылары жоқ формула сөйлем деп аталады. Формула кванторсыз деп аталады егер ол ( табылады) немесе (барлық үшін) сияқты өрнектерді қамтымаса.

Бірінші тараудың екінші параграфында келесі түрдегі негізгі маңызды анықтамаларды, элементтер қарастырылды.

*Анықтама 1.2.1* [8, с. 15]. моделінің моделіне мономорфизмі ) деп жиынының ішкі жиынының жиынына өзара бірмәнді сәйкестікті айтамыз және келесі шарттардықанағаттандырады:

1. барлық үшін;
2. барлық үшін;
3. барлық үшін.

Осыдан және модельдері бірдей сигнатураға ие болатынын болжаймыз. Өрістер арасындағы мономорфизм гомоморфизм болып табылады.

*Анықтама 1.2.2* [8, с. 15]. моделі моделінің ішкі моделі деп аталады (символдық түрде белгіленуі: ), егер және : теңбе-тең енгізу мономорфизмы бар болса ( барлық ).

Егер онда, моделі моделін кеңейтеді (немесе кеңейтілімі болып табылады). Изоморфизм аясындағы мономорфизм деп аталады (яғни, ). Изоморфизм немесе арқылы белгіленеді.

*Анықтама 1.2.3* [8, с. 19]. моделі моделінде элементарлы эквивалентті (белгілеуі: ) деп аталады, егер тіліндегі кез келген сөйлемі үшін орындалса.

*Анықтама 1.2.4* [8, с. 20]. Айталық –- дағы   жиынының бейнелеуі болсын. Элементарлы мономорфизм деп

егер тіліндегі кез келген формуласы және   тізбегі үшін келесі шарт орындалса:

*Сөйлем 1.2.1* [8, с. 20]*.* Айталық және болсын.

1. Егер және -элементарлы мономорфизм болса, онда - элементарлы мономорфизм болады.
2. Егер және - элементарлы мономорфизм болса, онда - элементарлы мономорфизм болады.

*Дәлелдеуі:* Айталық болсын. Онда , өйткені - элементарлы. Бірақ , - элементарлы.

*Анықтама 1.2.4* [8, с. 20]. моделі моделінің элементарлы ішкі моделі деп аталады, егер енгізу тепе теңдігі элементарлы мономорфизм болса.

Әрі қарай 1.3-ші параграфта бар болу туралы теорема және теориялардың негізгі мысалдары көрсетілген.

*Теорема 1.3.1.*[8, с. 21]. Егер S жиынында үйлесімді сөйлемдер жиыны бар болса, онда S қуат моделіне ие болады .

*Салдар 1.3.1 (компакттылық).* [8, c. 24]. Айталық S әрбір шекті ішкі жиынының шексіз моделі болатындай S сөйлемдер жиыны болсын. Сонда әрбір үшін S – модель қуатына ие болады.

*Салдар 1.3.2 (Сколем – Левенгейм)* [8, c. 24]Айталық - сигнатурасының шексіз моделі болсын. Онда моделі кез келген үшін

қуаты бойынша элементарлы меншікті кеңейтіліміне ие болады.

*Мысал 1.3.2* [9]. Айталық болсын.

Келесі формулалар тілінің сөйлемі болады.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19. әрбір үшін формуласын аламыз.

20*.* Кез-келген үшін

.

*Мысал 1.3.4* [9, б. 21]*.* Айтарлық ={+,, -, 0, 1} болсын, мұндағы + және - екі орынды функционалды символ, - бір орынды функционалды символ, ал 0 және 1- константалы символ. Бульдік алгебралар теориясы келесі аксиомаларымен берілсін. (Барлық бос айнымалылардың алдына универсал кванторы қойылған).

1. Ассоциативтілік амал + және:
2. Коммутативтілік амал + және :
3. Идемпотенттік заңы:
4. Дистрибутивтік заңы:
5. Жұтылу заңы:
6. де Морган заңы: .
7. Нөль және бірлік заңы: .
8. Екілік терістеу заңы: .

Бар аксиомаларға қосу ( орнына деп жазамыз)

9) атомды бульдік алгебра теориясына әкеледі; егер де (оның орына) келесі аксиомасын қоссақ

10)⌝онда атомсыз бульдік алгебра теориясын аламыз.

*Анықтама 1.4.1* [8, c. 26]. Т теориясы модельді толық (Робинсон) деп аталады егер Т теориясы үшін модельдер арасындағы әрбір мономорфизм элементарлы болса.

*Анықтама 1.4.2* [8, c. 26]. Экзистенциалды формула деп келесі түрдегі формуланы айтамыз

,

мұнда және H формуласы кванторларды қамтымайды.

*Теорема 1.4.1* (Робинсон) [8, с. 27]. Кез келген теориясы үшін келесі шарттар эквивалентті:

1. Т модельді толық;
2. Т теориясының әрбір моделі үшін, толық теориясы бар;
3. орындалатындай, кез келген формуласы үшін экзистенциалды формуласы табылады.

Бұл бөлімнің 1.5-ші параграфы Гильберттің он жетінші мәселесінің шешімі ретінде негізгі анықтамалар мен тұжырымдар қарастырылған.

*Теорема 1.5.1* (Е. Артин) [9, б. 58].

Айталық нақты коэффициенттермен анықталған рационалдық функция болсын және ол барлық үшін орындалсын. Онда нақты коэффициенттерімен анықталған рационалдық функцияның ақырлы жиыны бар. Яғни .

*Лемма 1.5.1* [9, б. 58]*.* Оң анықталған нақты көпмүшелік бар болса, онда ол нақты көпмүшеліктің қосындысы болып табылады.

*Лемма 1.5.2* [9, б. 60]*.* Айталық оң анықталған, бірақ көпмүшеліктің квадратының қосындысы болмайды.

*Лемма 1.5.3* [9, б. 61]*.* Кейбір шамалардың қосындысы кері шаманың квадраттарының қосындысын береді.

Дәлелдеуі:

*Лемма 1.5.4* (Е.Артин, О.Шрейер) [9, б. 61]. Айталық реттелген өріс болсын, сонымен қатар жиынының әрбір оң элементі осы жиынның элементтерінің квадратының қосындысы болады.

*Анықтама 1.6.1* [8, с. 37]. Айталық және – бір сигнатураның моделі болсын. теориясы Т теориясының модельді толықтыруы деп аталады, егер және Т теориялары келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) егер , онда ;

2) егер , онда табылады, болады;

3) егер , онда , , және онда .

Егер теориясы теориясының толықтыруы болса, онда және теориялары 1-ші және 2-ші шарттарын қанағаттандырады, яғни модельді толық, бірақ теориясының модельді толықтыруы болмайды.

*Теорема 1.6.1* (Робинсон) [8, с. 37]. Егер және - теориялары Т теориясының модельді толықтыруы болса, онда .

Сызықтық реттелген теориясы (LO) келесі үш аксиоманы құрайды:

а. ;

b. ;

c. (х) (y)[xy &у х х = у].

Тығыз сызықтық реттелген (DLO) ең үлкен және ең кішігірім элементтері болмайтын, сызықтық реттелген теориясы (LO) аксиомаларына келесі түрдегі аксиомаларды қосамыз:

d. ;

e.

() үшін қысқартуы бар.

*Теорема 1.6.3* (Робинсон) [3, c. 40]. Тығыз реттелген теория (DLO) теориясы сызықтық реттелген (LO) теориясының модельді толықтыруы болады.

Келесі параграфта ішкі модельді толықтық ұғымы туралы айтылған.

теориясы ішкі моделді толық деп аталады егер – әрбір ішкі моделінің теориясының кез келген моделі үшін толық теория болып табылады.

*Теорема 1.7.1* [8, с. 39]. теориясын ішкі модельді толық деп аталады, егер келесі екі шарттың әрқайсысына эквивалентті болса.

1) Т теориясы кванторлар элиминациясына рұқсат береді;

2) Әрбір диаграмма келесі түрде болады: , .

*Теорема 1.7.2* (Робинсон) [8, с. 39]. Егер Т- әмбебап теория және оның модельді толықтыруы болса, онда элиминация кванторына рұқсат береді.

*Салдар 1.7.1* (Тарский, Робинсон) [8, с. 39]. Алгебралық тұйық өрістер теориясы (ACF) элиминация кванторына рұқсат береді.

Екінші бөлімнің 2.1-ші параграфында таза қосарлар және толық теориялар үшін рұқсаттылық ұғымын сипатталған.

*Анықтама 2.1.1* [3, с. 39]. Егер – бос емес жиын,  – суперпозицияларға қатысты жиыны кейбір биекция (алмастырулар) группасы болса, онда  қосарын таза қосар деп аталады. Егер және таза қосарлар болса, және , онда таза қосарын таза қосарының ішкі қосары деп аталады және келесі түрде белгіленеді .

*Анықтама 2.1.2* [3, с. 39]. және таза қосарларын изоморфты деп атаймыз, егер келесі түрдегі биекция табылса , онда Бұл жағдайда келесі түрде жазамыз . Егер , - группасының ішкі группасы болса, онда келесі түрде жазамыз . Егер (*C,F*) таза қосары табылса, яғни, онда келесі түрде жазамыз .



Алдымен таза үштіктің анықтамасын негізгі [3, с. 49] жұмыста еске түсірейік.

*Анықтама 2.2.1* [3, c. 49]*.*  үштігін таза үштік деп атаймыз, егер:

1. таза қосар болып табылса;
2. - ішкі жиындарының орындалатындай кейбір класы болсын, барлық , үшін, мұндағы .

*Анықтама 2.2.2* [3, c. 49].Егер ,−таза үштіктер болса, онда биекциясы табылады, онда нақты ұқсастық (изоморфизммен) деп аталады, егер:

1) ;

2).

Егер -таза үштік, қатынасы - -ға инвариантты эквиваленттік қатынас болса, онда қатынасы таза үштігіне конгруэнция болып табылады, егер , орындалатын болса.

*Сөйлем 2.2.1* [3, c. 49]. Егер қатынасы таза үштігіне конгруэнция болса, онда таза үштік болып табылады, мұндағы .

Егер ,− таза үштіктер болса, −сюръекция болса, онда

- ды ығысу, -ды созылу деп атаймыз егер:

1. қатынасы конгруэнция болып табылады, мұндағы ,;
2. бейнелеуі нақты ұқсастық болып табылады, мұндағы

.

*Анықтама 2.2.3* [3, c. 49].Айталық, −толық теория, −осы теорияның монстр-моделі, ), −қуаты бойынша кіші ішкі моделінің барлық элемантарлы класы болсын. Онда ( таза үштігін теориясының семантикалық үштігі деп атаймыз.

*Анықтама 2.2.4* [3, c. 49].және толық теорияларын нақты семантикалық ұқсастық деп атаймыз, егер оның семантикалық үштігі нақты ұқсас болса.

*Анықтама 2.2.5* [3, c. 50]. Егер теориясының семантикалық үштігі болсын, онда және теорияларын «–ұқсас» деп аталады егер және нақты ұқсас болса.

2.3-ші параграфта толық теориялар үшін синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары туралы айтылған.

Келесі анықтама Т.Ғ. Мұстафинге тиесілі [7, p. 259].

Айтарлық – толық теория болсын, онда , мұндағы – бос айнымалысы бар формулалардың бульдік алгебрасы.

*Анықтама 2.3.1* [7, p. 259]. Айтарлық және – толық теориялар болсын. және синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ға дейін шектеуі және буль алгебраларының изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

*Анықтама 2.3.2* [7, p. 260]. және толық теориялар семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың семантикалық үштіктері өзара изоморфты болса.

2.4-ші параграфта йонсондық теориялардың негізгі түсініктерін, анықтамаларын қарастырамыз..

Бірінші ретті саналымды тіліндегі теориясын қарастырайық.

*Анықтама 2.4.1* [9, 157 б].Теория Т йонсондық деп аталады, егер:

1) теория -да ең құрығанда бір шексіз моделі болса;

2) теория индуктивті болса;

3) теория үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса ().

4) теория амальгама қасиетіне ие болса().

*Анықтама 2.4.2* [9, б. 157] Айталық болсын. теориясының моделі үшін -әмбебап деп аталады, егер қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның әрбір моделі -ге изоморфты енгізілсе; үшін -біртекті деп аталады, егер теориясының -нің ішкі модельдері болатын қуаттары қатаң түрде -дан кіші және кез келген екі моделі үшін және изоморфизмі үшін әрбір -ның моделіне дейін кеңейтілуі, -ның ішкі моделі және қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның моделі табылса, моделі -ді кеңейтсе және изоморфизмі -ті кеңейтсе.

*Анықтама 2.4.4* [9, б. 158]. Йонсондық теорияның С моделі теориясының семантикалық моделі деп аталады, егер - біртекті-әмбебап болса.

*Анықтама 2.4.5* [9, б. 158]. теориясының семантикалық модельдің элементарлы теориясы йонсондық теорияның семантикалық толықтыруы (центрі) деп аталады, яғни =.

*Анықтама 2.4.6* [9, б. 159].  теориясының моделінің экзистенциалды тұйық деп аталады, егер кез келген моделі үшін және -дан алынған константаларымен кез келген экзистенциалды формуласында орындалса, егер - ішкі моделі және шарты орындалса.

*Анықтама 2.4.7* [9, б. 159]. йонсондық теориясы кемел деп аталады, егер әрбір семантикалық моделі қаныққан моделі болып табылса.

Келесі 2.5-ші параграфта йонсондық теориялардың компаньоны тақырыбы қарастырылған. Осы компаньондарға қатысты ең негізгі теоремалар мен анықтамалар қарастырылған.

*Анықтама 2.5.1* [9, б. 162]. Айталық йонсондық теория болсын. йонсондық теориясының компаньоны деп аталады, егер теориясы сол сигнатурадан болса және келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) ;

2) Егер , онда кез келген йонсондық теория үшін болады;

3).

 компаньонының интерпретациясы болып табылады.

*Лемма 2.5.1* [9, б. 163]*.* Егер - йонсондық теориясының компаньоны және - Т модельді компаньоны болса, онда .

*Лемма 2.5.2* [9, б. 163]*.* және йонсондық теориясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) және модельдері өзара үйлесімді;

2) .

Айталық, кез келген йонсондық теория болсын, онда , мұндағы - бос айнымалылары бар экзистенционалды формулалар торы, –йонсондық теориясының центрі, яғни , мұндағы – йонсондық теорияның семантикалық моделі [10].

*Анықтама 3.1.1* [9, б. 179]. Айталық және − йонсондық теориялар болсын. Біз және теорияларын йонсондық синтаксистік ұқсас деп атаймыз, егер биекциясы табылып, келесі шарттар орындалса:

1)-тің -ге дейінгі шектеуінің және , торларының изоморфизмы бар, ;

2) , , ;

3) .

*Анықтама 3.1.2* [9, б. 179]. таза үштігі йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы – теориясының семантикалық моделінің жасаушысы, – автоморфизмдер группасы, – барлық ішкі жиындарының класы, сәйкесінше экзистенциалды тұйық ішкі модельдердің жасаушысы болып табылады.

*Анықтама 3.1.3* [9, б. 179]. және екі йонсондық теория йонсондық семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың йонсондық семантикалық үштіктері таза үштіктер сияқты изом+3,,,,,,орфты болса.

*Анықтама 3.1.4* [9, б. 180]. йонсондық теория кемел деп аталады, егер әрбір семантикалық моделі -ның қаныққан моделі болып табылса.

Келесі нәтиже профессор А.Р. Ешкеев тиесілі.

*Теорема 3.1.1* [9, б. 181]. және – -толық кемел йонсондық теориялар болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті

1) және – синтаксистік ұқсас,

2) және – синтаксистік ұқсас [7, p. 259] мағынасында).

*Факт 3.2.1* [11]. Әрбір бульдік сақинада кейбір бульдік алгебраны интерпретациялауға болады.

Бульдік алгебраның келесі мысалы абельдік группамен байланыстырады.

*Факт 3.2.2* [12]. Әрбір бульдік алгебрада кейбір абельдік группаларды интерпретациялауға болады.

3.2- ші параграфтың негізгі нәтижесі,н аламыз.

*Лемма 3.2.3* [13]*.*, , йонсондық теориялардың мысалдары болып табылады.

*Теорема 3.2.1* [13, с. 129]*.* және теоиялары синтаксистік ұқсас және толық теория үшін де, йонсондық теория үшін де бір-бірімен өзара интерпретацияланады.

*Теорема 3.2.2* [13, с. 129]*.* теориясы теориясында толық теория үшін де, йонсондық теория үшін де интерпретацияланады.

Бұл 3.3-ші параграфта диссертациялық жұмыстың негiзгi нәтижесi кейбiр йонсондық теория полигонымен йонсондық теорияның байланысын және инварианттарға қатысты полигондардың көмегiмен алынған сипаттамасы қарастырылды.

*Анықтама 3.3.1* [7, p. 263]. моноидының полигоны деп біз тек бір орынды функциясы бар структураны айтамыз яғни

1 ) , мұндағы моноидының бірлігі болып табылады.

2 ) , , .

*Анықтама 3.3.2* [14]*.* теориясы модельді толық деп аталады, егер теориясының кез келген және модельдері үшін келесі шарт орындалса . Әрбір изоморфтық енгізу элементарлы енгізуге эквивалентті.

*Анықтама 3.3.3* [14, с. 75]. және теориялары өзара модельді үйлесімді деп аталады, егер теориясының кез келген моделі теориясының моделіне изоморфты түрде енгізілсе. Және бір уақытта кері тұжырым дұрыс.

*Анықтама 3.3.4* [14, с. 75]*.* Айталық, және теориялары тілінің кейбір теориялары болсын. теориясы теориясының модельді толықтыруы деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. және өзара модельді үйлесімді;
2. - модельді толық теория;
3. егер , онда - толық теория.

Егер 1), 2) шарттар орындалса, онда - модельді компаньон.

*Теорема 3.3.1* [7, p. 263].Әрбір теориясы үшін теория полигоны табылып, келесі шарттар орындалса:

1. егер теориясының сигнатурасы шекті болса, онда - қабықшасы болып табылады.
2. егер теориясының сигнатурасы шексіз болса, онда - қабықша дерлік болып табылады.

*Теорема 3.3.2* [15]. Айталық - йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. - кемел;
2. - теориясы модельді компаньонга ие.

Параграфтың негізгі нәтижесі ретінде сәйкес келетін инварианттардың көмегімен осындай полигондардың сипаттамасын аламыз. Шектелген қарастыруда (группа моноидтың қатты дербес жағдайы болып табылады) теория үшiн кемелдiлiк және йонсондық қасиеттерi алынды.

*Лемма 3.3.1.*[16]. Айталық - - йонсондық теория болсын және теориясының барлық толықтырулары кванторлар элиминациясына рұқсат етіледі. Онда

1. - кемел;
2. - – йонсондық.

Бұл лемманың салдары ретінде келесі теореманың 1–ші пункті маңызды.

*Теорема 3.3.3.*[16, с. 71]. 1)Әрбір - йонсондық теорияның полигоны кемел және йонсондық болып табылады, .

Келесі теорема 3.3-ші параграфтың негізгі нәтижесі болып табылады және [14, p. 74-75 ] жұмыста көрсетілген.

*Теорема 3.3.4* [14, с. 75].Айталық теориясы **-** толық, кемел йонсондық теориясы болсын, онда йонсондық теориясы  **-** толық, кемел йонсондық теория полигоны табылып, келесі шарт орындалады:

теориясы теориясына синтаксистік ұқсас болып табылады.

Бұл 3.4-ші параграфта йонсондық теорияларды ұқсастық ұғымы бойынша зерттеу. Бұл тәсіл йонсондық теорияларды қарастыру жағынан біріншіден жаңа және өзекті зерттеу әдісі болып табылады. Негізгі мысал ретінде Буль алгебралар теориясы келтіріледі. Қарастырылған ұқсастықты әртүрлі сигнатурадағы алгебраларда қарастырылуы мүмкін екенін көрсетеді.

- бірінші ретті саналымды тіл және осы тілдің кейбір индуктивті теориясы болсын, сәйкесінше осы теорияның келесі кластары және арқылы белгіленеді: барлық экцистенциалды тұйық модельдер класы және барлық алгебралық жай модельдер класы.

*Анықтама 3.4.3* [17]*.* индуктивті теориясы экзистенциалды - жай деп аталады, егер ол алгебралық жай модельге ие болса және , - теориясының алгебралық жай модельдердің жиыны.

*Анықтама 3.4.4.* [17, б. 35]*.* теориясы дөңес деп аталады, егер  теориясының модельдері болатын оның кез келген моделі үшін және оның ішкі структурасының кез келген жиынтықтары үшін қиылысуы теориясының моделі болады. Сонымен қатар, бұл қиылысу құр емес болуы мүмкін. Егер бұл қиылысу ешқашан құр емес болса, онда ол теория қатты дөңес деп аталады.

3.4-ші параграфтың негізгі нәтижелеріне қол жеткіземіз.

Айталық теориясы - толық кемел йонсондық теория және және сәйкесінше және жиындарының фрагменттері болсын, мұндағы және -  теориясындағы семантикалық модельдің йонсондық ішкі жиыны.

Егер берілген теориясы - толық кемел йонсондық теориялар болып табылса, онда оның фрагменттері кемел болмауы мүмкін. Сондықтан, келесі теореманы кемелділік фрагменттер үшін талап етеміз.

*Теорема 3.4.1* [17, б. 35]*.*  және фрагменттері - толық кемел йонсондық теория болып табылады. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) және фрагменттері -йонсондық теория үшін синтаксистік ұқсас болып табылады [7, p. 259];

2) және - толық теория үшін синтаксистік ұқсас болып табылады [7, p. 259], мұндағы және қарастырылып отырған және жиындарының фрагменттерінің центрлері болып табылады.

Модельдер теориясында бiрiншi реттi тiлдiң синтаксистiк және семантикалық қасиеттерiн, жалпы айтқанда, толық емес теорияларды зерттеу математикалық логиканың өзектi мәселелерiнiң бiрi болып табылады. 3.5-ші параграфта бiз йонсондық теорияларды зерттеймiз, олар алгебрадаrы классикалық мысалдардың көп болуымен қанағаттандырылады және жалпы айтқанда, толық емес. Йонсондық теорияларды зерттеудiң жаңа және өзектi әдiсi – бұл теорияларды синтаксистiк және семантикалық ұқсастық ұғымдары арқылы зерттеу.

*Анықтама 3.5.1* [18]. Айталық болсын. Онда:

1) белгілеуі, дегенді білдіреді, барлық үшін;

2) егер болса, онда тілінің барлық Γ-сөйлемдерінің жиынын белгілейді, -да ақиқат, мұндағы *i < j < β*;

3) бейнелеуі -енгізу деп аталады, егер кез келген жәнеүшін және ;

4) егер болса, онда белгісі екенін білдіреді;

5) , модельдерінің тізбегі -тізбек деп аталады, егер болса, мұндағы .

*Анықтама 3.5.2* [18, с. 138].

1) теориясы -тізбектерінің бірігуіне қатысты тұрақты (немесе -индуктивті), егер модельдерінің кез келген -тізбектерінің бірігуі қайта моделі болса.

2) теориясы -үйлесімді енгізу қасиетіне ие (-), егер кез келген үшін бар болса және -енгізулері және ;

3) теориясы α-амальгама қасиетіне -AP) ие, егер кез келген және -енгізулер үшін және бар және -енгізулер және, сонымен қатар болатындай.

*Анықтама 3.5.3* [18, с. 138].T теориясы йонсондық теория деп аталады, егер:

1) Т теориясының шексіз моделі бар болса;

2) Т теориясы - индуктивті;

3) T теориясы үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса ( -);

4) Т теориясы амальгама қасиетіне ие болса(-.

Сөйлем 3.5.1 [18, с. 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы - қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін - қасиетіне ие;

3) егер, және - кез келген формулалар жиындары болса, сонымен қатар және үйлесімді болса, онда үйлесімді болады.

*Салдар 3.5.2*[18, с. 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы - қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін - қасиетіне ие;

3) егер және - формулалар жиыны болса, ,

үйлесімді жиындар, онда жиыны үйлесімді болады.

4) кез келген және , жиыны үшін ол мынаған сәйкес келетін бірегей максималды қамтиды, T теориясы тілінің -сөйлемдерінің жиыны.

*Сөйлем 3.5.3* [7, p. 261]. Егер және теориялар синтаксистік ұқсас болса, онда және семантикалық ұқсас, керісінше дұрыс емес.

*Теорема 3.5.2* [7, p. 264]. Шекті сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы дерлік болады.

*Теорема 3.5.3* [7, p. 263]. Шексіз сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы болады.

*Лемма 3.5.1* [19]*.* Егер және , толық кемел йонсондық теориялары синтаксистік жағынан ұқсас болса, онда олар йонсондық семантикалық жағынан ұқсас болады. Керісінше, жалпы айтқанда, дұрыс емес.

Бұл параграфтың негізгі нәтижесі келесі теоремаға ие.

*Теорема 3.5.5* [19, p. 136]*.* Кез келген йонсондық кемел -толық теориясы үшін, орындалатындай полигон теориясында йонсондық ∃-толық теория табылады.

Әрі қарай синтаксистік және семантикалық ұқсастық ұғымдарын кез келген сигнатура моделдерінің спектрлеріне кеңейтеміз.

*Анықтама 3.5.5* [19, p. 137]*.* Айталық , , , болсын. Сонымен қатар класы йонсондық синтаксистік класына ұқсас және кез келген теория үшін болса, онда түрінде белгілейміз, сонымен қатар .

*Анықтама 3.5.6* [20]. Таза үштігі - класы үшін йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы - класының семантикалық моделі, - барлық автоморфизмдер группасы, -[T] барлық экзистенциалды түрде тұйықталған модельдерінің изоморфты бейнелерінің класы.

*Анықтама 3.5.7* [19, p. 137]*.* Айталық , , , болсын. класын класына йонсондық семантикалық ұқсас деп айтамыз, егер олардың семантикалық үштігі таза үштіктер сияқты изоморфты болса және түрінде белгілейміз.

*Теорема 3.5.6* [19, p. 137]*.* Айталық болсын, онда әрбір кемел ∃-толық класы үшін, класы табылады, мұндағы – полигон теориясының сигнатурасы болатындай кейбір моделінің ∃-толық йонсондық теориясы.

Бұл параграфта бекітілген йонсондық теориялардың семантикалық моделінің анықталатын ішкі жиындарының айтарлықтай кең класын зерттеумен байланысты.

*Анықтама 3.6.1* [6, с. 201]. - йонсондық теориясы - стабильді деп аталады егер кез келген экзистенциалды тұйық моделінің теориясы үшін, болатындай А жиынының кез келген ішкі жиынынан болатындығы шығады.- йонсондық теориясы -стабильді деп аталады, егер кейбір үшін - стабильді болса.

*Теорема 3.6.2* [6, с. 201]. Айталық Т теориясы -сөйлемдер үшін толық кемел йонсондық теория болсын, . Онда келесі шарттар эквивалентті болады:

1. теориясы - стабильді;
2. теориясы стабильді, мұндағы - йонсондық теориясының центрі.

Лемма 3.6.1 [3, с. 52]. Айталық - толық теориясына рұқсат беретін кейбір тұйықталу операторы болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. егер , онда ;
2. кез келген үшін ;
3. кез келген үшін .

Айталық теориясын тұйықталу операторымен йонсондық теория болсын, - йонсондық жиын және , мұндағы – Т теориясының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы. Егер болса, онда - элементтерінен тізбегі алынған және табылады, cонымен үшін , , немесе орындалады. Бұл жағдайда n ұзындығының және арасындағы сыртындағы жолмен тізбегін атаймыз.

операторына қатысты кейбір шарттарды қарастырайық.

1. Аксиома 1. Егер , онда , .
2. Аксиома 2. Егер және , элементтерінен алынған , кортеждері, , онда .

*Теорема 3.6.4* [21]*.*Айталық теориясы -сөйлемдері үшін тұйықталу операторымен толық кемел, - стабильді йонсондық теория болсын. аксиоматиканы (\*) қанағаттандыратын семантикалық модель болсын. Егер -1, 2 аксиомаларын қанағаттандырса және барлық үшін орындалады.

*Теорема 3.6.5* [21, c. 229].Айталық теориясы -сөйлемдері үшін тұйықталу операторымен толық кемел, - стабильді йонсондық теория болсын. аксиоматиканы (\*) қанағаттандыратын семантикалық модель болсын. тұйықталу операторы бар сөйлемдер болсын, – тұйықталу операторы 1,2 –ші аксиомаларды қанағаттандырады , , онда:

1. ;
2. .

Автор есептің қойылуына және диссертацияның барлық кезеңдерінде берген құнды кеңестері мен көмектері үшін отандық ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ешкеев Айбат Рафхатовичке шын жүректен алғысын білдіреді. Сонымен қатар, шетелдік ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Морозов Андрей Сергеевичке бағалы кеңестері мен көрсетілген қолдауы үшін алғысын айтады.

1. **МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАРЫ**
   1. **Алгебралық модельдердің сигнатурасы және бірінші ретті тіл**

Математиканың жаңа саласы модельдер теориясы соңғы XX жылда қарқынды дамып келеді. Әйгілі математик Дж. Сакстың [8, с. 13-63] кітабында теорияның классикалық және заманауи нәтижелерінің толық көрсетілімі бар: Соның ішінде формулалар мен типтер, қарапайым модельдер бойынша, қаныққан және біртекті модельдер бойынша нәтижелер үлкен қызығушылық тудырады.

Алгебралық модельдердің ең қарапайым классификациясы типтердің ұқсастықтарын көрсетеді.

*Анықтама 1.1.1.* [8, с. 14]. Айталық – натурал сандар жиыны болсын. Сигнатура немесе ұқсастық типі деп аталады, егер

бестігін айтамыз, , орындалатындай.

алгебралық моделінің сигнатурасына мыналар жатады:

1. моделдің тасымалдаушысы деп құр емес жиынын айтамыз.
2. жиынтығы орынды жиыны аясындағы - қатынастан тұратын, әрбір үшін. -ға орынды қатынас (немесе предикат) ретінде –ның кез келген ішкі жиыны деп түсінеміз. (-ның рет декарттық көбейтіндісі);

Егер болса, онда орнына біз деп жазамыз.

1. жиынтығы, А- ға - орынды функция әрбір үшін, n орынды функция ретінде -ді -ға функциясын түсінеміз.
2. – жиынының ішкі жиыны, оның белгіленген элементінің жиыны деп аталады.

Алгебралық моделдерді , , арқылы белгілейміз, ал сәйкес келетін тасымалдаушылары , , арқылы белгіленеді. моделі үшін келесі жазбаны қолдану тиімді, яғни . Мынадай жағдай болуы мүмкін: , бірақ , онда және үшін рұқсат етіледі. моделінің қуаты деп А тасымалдаушысының қуатын айтамыз.

түріндегі алгебралық моделді қарастырайық, мұндағы және -дағы екі орынды функциялар, –дағы , бірорынды функциялар болып табылады, ал 0 және 1- жиынының ерекшеленген элементтері болып табылады. Кез келген өрісті сол сигнатураның моделі ретінде дәл осы сияқты моделін қарастыруға болады. Дегенмен моделі өріс болмауы мүмкін, өйткені олардың ерекшеленген элементтері, функциялары, қатынастары өрістің аксиомаларын қанағаттыруға міндетті емес.

Әрбір сигнатурасына -бірінші ретті тіл сәйкес келеді. Егер сигнатурасының алгебралық моделі болса, онда тілінің әрбір сөйлемінде моделінде белгілі бір ақиқат мәніне ие болады. тілінің алфавиты келесі белгілерден тұрады:

1. айнымалылар , ;
2. логикалық амалдар: (кері), &(және), (табылады) және = (теңдік);
3. (i) – орынды предикаттық символы - да болады, әрбір үшін.
4. (i) – орынды функционалдық символы - да болады, әрбір үшін.
5. тұрақтылары, әрбір үшін.

*Анықтама 1.1.2.* [8, с. 17]. тілінің термі екі ереженің көмегімен жүзеге асады:

1. барлық айнымалылар және тұрақтылар терм болып саналады;
2. егер термдері және орынды функционалдық символы – да болса, онда терм болады.

Құрамында айнымалысы жоқ термді тұрақты терм деп атайды.

*Анықтама 1.1.3.* [8, с. 17]. тілінің атомдық формуласы келесі түрде анықталады.

1. егер тілінің және термдері болса, онда теңдік деп аталатын атомдық формула бар;
2. егер термдері және орынды предикаттық символы – да болса, онда атомдық формула болады.

*Анықтама 1.1.4.* [8, с. 17]. тілінің формуласы келесі түрде анықталады.

әрбір атомдық формула - формула болып табылады;

1. егер және -формулалар болса, онда және – формулалар.
2. Логикалық символдар (немесе), (шығады), (эквивалентті), (барлық үшін) жазбаны қысқарту үшін пайдаланылады:
3. үшін ;
4. үшін ;
5. үшін ;
6. үшін .

Формуладағы бос айнымалылар түсінігі индукция арқылы анықталады. Формуланы құру үшін қолданылатын индукцияның қадамдар саны бойынша жүзеге асырылады:

1. егер – атомдық формула болса және – формула құрамында болады, онда - формуласының бос айнымалысы болып табылады.
2. егер – формуласының бос айнымалысы және болса, онда - формуласының бос айнымалысы болып табылады.
3. егер – формуласының бос айнымалысы болса, онда - және формулаларының бос айнымалысы болып табылады.

Бос айнымалылары жоқ формула сөйлем деп аталады. Формула кванторсыз деп аталады егер ол ( табылады) немесе (барлық үшін) сияқты өрнектерді қамтымаса.

тілінің қуаты деп оның жиын қуатының барлық формулаларын айтамыз, яғни:

.

Егер сигнатурасының моделі бар болса, онда моделінің негізінде тілі жатады. Әдетте біз тілін және сигнатурасын ажырата алмаймыз.

* 1. **Мономорфизмдер, элементарлы эквиваленттілік және ішкі модельдерді сипаттау**

Бұл параграфта мономорфизмдер және элементарлы экваленттілік және модельдер арасындағы байланыстар сипатталады.

*Анықтама 1.2.1* [8, с. 15]. моделінің моделіне мономорфизмі ) деп жиынының ішкі жиынының жиынына өзара бірмәнді сәйкестікті айтамыз және келесі шарттардықанағаттандырады:

1 барлық үшін;

2 барлық үшін;

3 барлық үшін.

Осыдан және модельдері бірдей сигнатураға ие болатынын болжаймыз. Өрістер арасындағы мономорфизм гомоморфизм болып табылады.

*Анықтама 1.2.2* [8, с. 15]. моделі моделінің ішкі моделі деп аталады (символдық түрде белгіленуі: ), егер және : теңбе-тең енгізу мономорфизмы бар болса ( барлық ).

Егер онда, моделі моделін кеңейтеді (немесе кеңейтілімі болып табылады). Изоморфизм аясындағы мономорфизм деп аталады (яғни, ). Изоморфизм немесе арқылы белгіленеді.

–ның –ғадейінгі модельдердің мономорфизмі эндоморфизм деп аталады. моделінің аясындағы моделіне дейінгі эндоморфизмы автоморфизм деп аталады.

Айталық - моделінің сигнатурасы болсын. деп болжайық. арқылы сигнатурасын белгілейміз. тілінен әрбір үшін жаңадан алынған тұрақтысын қосу арқылы тілін аламыз. Кез келген сигнатурасындағы моделін сигнатурасындағы моделіне дейін кеңейтуге болады, әрбір үшін элементі таңдап алынады.

бейнелеуі тілінің барлық тұрақты термдерінің жалғыз бейнесі жиынына жалғасы болуы мүмкін:

1. ;
2. ;
3. , мұндағы – тұрақты термдер.

Айталық - тілінің сөйлемі болсын, қатынасы (« моделінде ақиқат» деп оқылады) сөйлемін құруға қажетті қадамдар саны бойынша индукция арқылы анықталады:

1. *;*
2. ;
3. және ;
4. дұрыс емес ;
5. кейбір үшін.

Егер сөйлемі моделінде ақиқат болмаса, онда ол моделінде жалған деп аталады.

Айталық тілінің формуласы және болсын. n мүшесі моделінің формуласын қанағаттандырады (немесе жүзеге асырады) деп айтамыз, егер болса. формуласының әмбебап тұйықталуы деп формуласын айтамыз. формуласы моделінде ақиқат деп аталады, егер оның әмбебап тұйықталуы моделінде ақиқат болатын болса.

*Анықтама 1.2.3* [8, с. 19]. моделі моделінде элементарлы эквивалентті (белгілеуі: ) деп аталады, егер тіліндегі кез келген сөйлемі үшін орындалса.

Тарский алгебралық модельдердің элементарлы эквивалентті классификациясын изоморфизм бойынша классификациялау жақсырақ екендігін айтты. Дж. Сакстың кітабындағы §9 параграфта [8, с. 32] кез келген екі алгебралық тұйық өрісі бірдей сипаттамада элементарлы эквивалентті болатындығы көрсетілген.

Элементарлы эквиваленттілік ұғымы Гедель мағынасында [22] абсолютті, сонымен бірге изоморфизм ұғымы абсолютті емес.

*Анықтама 1.2.4* [8, с. 20]. Айталық –- дағы   жиынының бейнелеуі болсын. Элементарлы мономорфизм деп

егер тіліндегі кез келген формуласы және   тізбегі үшін келесі шарт орындалса:

Осыдан кез келген элементарлы мономорфизм – монофорфизм болатынын байқаймыз. (Әйгілі математик Дж.Сакстың кітабында [8, с. 32] бір сипаттамадағы әрбір мономорфизм мен алгебралық тұйық өрістері арасы элементарлы және әрбір мономорфизм нақты тұйық өрістер арасында элементарлы болып табылатындығы көрсетілген [8, с. 53].

Осыдан - элементарлы монофорфизм сонда тек ғана сонда, келесі шарт орындалса:

.

*Сөйлем 1.2.1.* Айталық және болсын.

1. Егер және – элементарлы мономорфизм болса, онда -элементарлы мономорфизм болады.
2. Егер және - элементарлы мономорфизм болса, онда - элементарлы мономорфизм болады.

*Дәлелдеуі:* Айталық болсын. Онда , өйткені - элементарлы. Бірақ , - элементарлы.

*Анықтама 1.2.5* [8, с. 20]. моделі моделінің элементарлы ішкі моделі деп аталады, егер енгізу тепе теңдігі элементарлы мономорфизм болса.

Егер болса, онда моделі моделінің элементарлы кеңейтілімі деп аталады. Кеңейтілім меншікті деп аталады, егер болса.

Модельдер теориясының «объектілері» алгебралық модельдер болып табылады. Бірінші ретті модельдер теориясының «морфизмдері» мономорфизмдер болып табылмайды, өйткені олар модельдердің тек «атомдық» қасиеттерін сақтайды, ал элементарлы мономорфизмдер, барлық бірінші ретті қасиеттерді сақтайды. Айталық – нақты сандар өрісі, - алгебралық сандар өрісі болсын. Келесі түрдегі тепе-тең енгізу мономорфизм болып табылады, бірақ элементарлы мономорфизм болып табылмайды, яғни -1 санының квадраттық түбірі - алгебралық сандар өрісінде табылады, бірақ - нақты сандар өрісінде табылмайды. Атақты математик Дж. Сакс «Қаныққан модельдер теориясы» атты кітабында әрбір мономорфизм алгебралық тұйық өрістер арасында элементарлы болатындығы көрсеткен [8, с. 32]

**1.3 Бар болуы туралы теорема**

Айталық S - кейбір тілінің сөйлемдер жиыны және тілінің формуласы болсын. «S – логикалық салдарында бар болады» қатынасы (белгілеуі:) келесі түрде анықталады:

1. егер болса, онда болады;
2. егер логикалық аксиомасы бар болса, онда онда болады;
3. егер үшін және егер тізбегіне логикалық ережені қолдану нәтижесінде алынатын болса, онда болады.

Егер болса, онда кейбір шекті ішкі жиын үшін болады. Сонымен бар болу туралы негізгі теоремасын дәлелдеуде қатынасының финитарлық сипаты бірнеше рет қолданылады.

S жиыны үйлесімді немесе қайшылықсыз деп аталады, егер олардың арасындағы логикалық салдардың бірінде түріндегі сөйлем түрі болмаса. S жиынының моделі деп () егер жиынының барлық мүшесі моделінде ақиқат болса. Егер модельге ие болса, онда үйлесімді, өйткені әрбір сөйлем жиынының логикалық салдары болып табылатындықтан, жиынында кез келген модель ақиқат болады.

*Теорема 1.3.1* [8, с. 21]. Егер жиынында үйлесімді сөйлемдер жиыны бар болса, онда S қуат моделіне ие болады .

1.3.1-ші теореманың дәлелдеуін келтіру үшін ординалдар мен кардиналдар ұғымын енгіземіз.

Ординалдар , , ,... әріптері арқылы белгіленеді. Әрбір ординал барлық кіші ординал жиындарына тең, сондықтан . 0 арқылы бос жиынды белгілейміз. Кардиналдар , ,... әріптері арқылы белгіленеді.

Кардинал дегеніміз кіші ординалға өзара бірмәнді бейнелеу алмайтын оридиналды айтамыз. Шексіз кардиналдар өспелі тізбектер арқылы жазылады, яғни,, Жиын қуатқа ие деп айтамыз, егер мен оның арасындағы өзара бірмәнді сәйкестік болса. жиын қуатын арқылы белгілейді. қарағанда артық болатын, арқылы ең кіші кардиналды белгілейді. Саналымды жиын дегеніміз, егер ол шекті немесе қуатына ие болса. ординалының тізбегі деп, ординалын айтамыз. арқылы шекті ординалды белгілейміз, яғни ординал 0-ден өзгеше және басқа ешқандай ординалдың тізбегі болмайтын болса. кардиналы сингулярлы деп аталады, егер ол жиын қуатының бірігуі кем, кардиналдан аз болатын болса. Сингулярлы емес кардинал, регулярлы кардинал деп аталады. [8, c. 13]

*Дәлелдеу (Генкин мағынасында)*: Айталық болсын. Айталық - жиынындағы формулаларға кірмейтін тұрақтылар жиыны болсын. Айталық, тек бір бос айнымалысы бар тілінің барлық формулаларының тізімі болсын.

Келесі түрдегі функциясын таңдайық.

1) - білдіреді;

2) осыдан құрамына кірмейтінін білдіреді.

деп ұйғарайық. - құрамына кірмейтінін ескеріңіз. үйлесімділік әрбір үшін трансфинитті индукция арқылы белгіленеді. Сонымен бірге үйлесімді, өйткені . Егер - шекті ординал және әрбір үшін үйлесімді болса, онда

қатынастың финитарлы сипатына байланысты үйлесімді .

-ны түзетіп, үйлесімді емес деп болжайық. Содан кейін үйлесімді емес екендігін дәлелдейміз:

,

,

.

Сонымен, құрамына кірмейді, онда -дан логикалық нәтижелерді шығарғанда, тұрақты тұрақтыға қатыспайтын кез келген y айнымалысымен ауыстырылуы мүмкін. Сондықтан

.

– сөйлемдер жиыны болғандықтан, онда -дан алынған кез келген салдарының әмбебап тұйықталуы да жиынының салдары болады:

.

Айталық болсын. Онда үйлесімді, өйткені әрбір үйлесімді және шекті ординалға ие болады. Айталық - құрамында бар сөйлемдердің максималды үйлесімді жиыны болсын. теориясының болуы Цорна леммасынан және қатынасының финитарлы сипатынан туындайды.

Айталық - тілінің кез келген сөйлемі болсын. Өйткені теориясы үйлесімді, онда немесе де үйлесімді болсын. Сонымен, максимальды, онда немесе болады. жиынының әрбір салдары – ға тиісті болады.

S жиының моделі Т теориясы арқылы құрылады. тіліндегі кез келген тұрақтысы үшін келесі түрдегі жазба бар деп есептейік:

.

моделінің тасымалдаушысы ретінде деп алайық.

моделінің қатынастары, функциялары және таңдалған элементтері келесідей анықталады:

1. ;
2. ;
3. .

Енді деп белгілейік. Ол үшін тілінің кез келген сөйлемі үшін келесіні дәлелдеу жеткілікті.

*.*

*Дәлелдеуі:* құрамындағы қадамдар санына индукция арқылы жүзеге асырылады.

1. Айталық - тілінің тұрақты термі болсын. Кейбір үшін теңдігі бар. Онда . Сондықтан тілінің әрбір тұрақты терм үшін тілінде орындалатындай тұрақтысы табылады. Осыдан, .
2. *;*
3. және ;
4. деп алайық. Онда кейбір үшін орындалады. Демек және . Енді деп алайық. Онда , және болады.

Т теориясы деп үйлесімді сөйлемдер жиынын айтамыз. жазбасы теориясының логикалық салдары теориясының да логикалық салдары болып табылады. жазбасы және дегенді білдіреді. Т теориясы толық деп аталады, егер теория тіліндегі кез келген cөйлемі үшін және орындалса. 1.3.1-ші теорема бойынша Т теориясы толық сонда тек ғана сонда егер Т теориясы үшін барлық моделі элементарлы эквивалентті болса. моделінің теориясын – деп белгілейміз, бұл теория тілінің моделінде ақиқат болатын барлық сөйлемдер жиынын айтамыз, мұндағы - моделінің сигнатурасы. Осыдан кез келген моделі үшін толық екендігін көруге болады.

*Салдар 1.3.1 (компакттылық)* [8, c. 24]. Айталық S әрбір шекті ішкі жиынының шексіз моделі болатындай S сөйлемдер жиыны болсын. Сонда әрбір үшін S – модель қуатына ие болады.

*Дәлелдеу:*Айталық – жиынынан аспайтын тұрақты жиын болсын. Осыдан

екендігін аламыз.

Егер - шекті ішкі жиыны болса, шексіз модельге ие болғандықтан, онда ол үйлесімді болады. 1.3.1-ші теорема бойынша қуаты болатын моделіне ие болады. Бірақ моделінің қуаты -ден аз болуы мүмкін емес, өйткені моделінің әртүрлі элементтеріне сәйкес келуі керек.

*Салдар 1.3.2 (Сколем – Левенгейм).*[8, c. 24]Айталық - сигнатурасының шексіз моделі болсын. Онда моделі кез келген үшін

қуаты бойынша элементарлы меншікті кеңейтіліміне ие болады.

*Дәлелдеу:*Айталық Т теориясы моделінің толық теориясы болсын. T теориясының модельдері моделінің элементарлы кеңейтілімдерімен сәйкес келеді. Т теориясынан аспайтын тұрақтысын аламыз. Осыдан деп алайық.

Егер және ақырлы болса, онда үшін константасымен байланыстыратын жиынының ішінде айтылмаған кейбір элементтері моделін жасауға болады. 1.3.2-ші салдар бойынша қуаты бойынша – моделіне ие болады. Айталық - келесі түрдегі бейнелеу болсын

.

Онда элементарлы және .

1.3.1-ші теоремасы 1.3.1-ші және 1.3.2-ші сөйлемдері бойыншаұсынуы мүмкін әдістер екенін модельдер тоериясы қарапайым сипаттамаға мүмкіндік беретін алгебралық модельдердің структурасына ғана қолданылады.

Егер қасиеті бар жүйе қажет болса, онда алдымен оның барлық модельдері қасиетіне ие болатындай теориясын табу керек, содан кейін 1.3.1-ші теоремасын қолдану керек. Алайда бұл болжам қате. Модельдер теориясы өзінің орасан зор жалпылығына қарамастан, 1.3.1-ші теоремасын тікелей қолданудан гөрі басқа әдістерге ие. Егер бұлай болмаса, тақырып өте қызық болар еді. Осындай әдістердің бірі қарапайым тура жүйені құру үшін 1.3.2-ші сөйлемін қайталап қолдану керек [8, с. 34].

Өрістер теориясы келесі сөйлемдерден тұрады:

1)

2) ;

3);

4)

5)

6

7) ;

8) ;

9) () () (z) [(y + z)=(у) + (z)];

10) .

Әрі қарай теорияның мысалдарын [9, б. 18] әдебиетінен қарастырайық.

Егер *L*-тілі предикаттық, функционалдық және константалық символдарының шекті жиынынан тұрса, онда біз деп жазамыз. Сәйкесінше, біз *L*-тілінің моделін деп белгілейміз, мұндағы *L* -тілінің символдары үшін интерпретация: және болады.

*Мысал 1.3.1* [9, б. 18]. және болсын, мұндағы - нақты сандар, - рационал сандар тілінің модельдері болады. Мұнда - реттелген бинарлы предикаттық символы, және қосу және көбейту амалдарының бинарлы функционалдық символдары, 0 және 1 – нөл мен бірдің константалық символы – сәйкесінше көбейтуге және қосуға қатысты нейтралдық элементтері. Аналогтық түрде болсын, мұндағы С – тілінің моделі болатын комплекстік сандар.

*Мысал 1.3.2* [9, б. 18]. Айталық болсын.

Келесі формулалар тілінің сөйлемі болады.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19. әрбір үшін формуласын аламыз.

20*.* Кез-келген үшін

1. Әрбір үшін келесі формуланы аламыз:

.

*Анықтама 1.3.1* [9, б. 19]. Егер тілінің сөйлемдер жиыны болсын, онда үшін *A* моделі деп, әр бір үшін жазылады. Егер сөйлемдер жиыны орындалады (бірлесіп) дейміз, егер кейбір *L* тілінің *A* моделі бар болса, яғни .

*Анықтама 1.3.2* [9, б. 19] теориясы кейбір тілдің қайшылықсыз сөйлемдер жиыны деп атаймыз. Айтарлық теория және -сол тілдің сөйлемдер жиыны болсын, онда деп жазамыз, егер онда кейбір *A* модельдері үшін орындалса. Бұл жағдайда, біз теориясының сөйлемдері болып табылады деп айтуға болады. Теорияны дедуктивті тұйық теория деп атаймыз, егер ол өзінің барлық салдарларынан тұрса.

*Анықтама 1.3.3* [9, б. 20]*.* Егер *А*- *L* тілінің моделі болсын, онда *А* моделінің теориясын элементарлы деп атаймыз, егер *L* тілінде барлық сөйлемдер жиыны *А* моделінде ақиқат болса, деп белгілейміз, яғни

Айталық *К-L* (*L*-структура) тілінің модельдер класы болсын. Онда *Th(К)* –ның барлық жиыны деп түсінеміз.

Айталық *К-L*–структурасының класы болсын. Онда *К* –элементарлы класс деп атаймыз, егер *L (L*-сөйлемдер) тілінің сөйлемдер жиыны табылса, яғни Σ –да орындалса.

*Анықтама 1.3.4* [9, б. 20]. Айталық *T* теория болсын. Онда ішкі жиыны *T* аксиомалар жиыны болады, егер *T*-ның әрбір үшін орынды болса, бұл жағдайда жазамыз.

*Ескерту 1.3.1.* Әдетте біз дедуктивті тұйық теорияны қарастырамыз және теорияны сипаттаймыз.

*Мысал 1.3.3.* [9, б. 21. Келесідей теория мен олардың аксиомаларын қарастырайық:

1. Сызықтық реттік теориясы (*LOR*), 1.3.2-ші мысалдағы 1-4 аксиомалар сөйлемі;
2. Шексіз элементтердің тығыз сызықтытық реттік теориясы (*DLO*), 1.3.2-ші мысалдағы (*LOR)* мен 5,6,7 аксиомалар сөйлемі;
3. Өрістер теориясы (*F*), 1.3.2-ші мысалдағы 8-17 аксиомалар сөйлемі;
4. Реттелген өрістер теориясы (*ORF*), барлық *F*, *LOR* және 1.3.2-ші мысалдағы 18,19 аксиомалар сөйлемі;
5. Алгебралық тұйық өрістер теориясы (*AСF*), *F* –тің барлық аксиомалары мен 1.3.2-ші мысалдағы 20 аксиоманың сөйлемі;
6. Нақты тұйық реттелген өрістер теориясы (*RCF*), *F* –тің барлық аксиомалары мен 1.3.2- ші мысалдағы 21 аксиоманың сөйлемі;

*Ескерту 1.3.2* [9, б. 21]. Нақты тұйық реттелген өрістердің теориясы кейде басқаша аксиоматизацияланады. 1.3.2-ші мысалдың 21 аксиомасында барлық аксиома *ORF* сақталған, бірақ 1.3.2-ші мысалдың 20 аксиомасында *n* тақ сөйлемдеріне ауыстырсақ, онда әрбір оң элементтің екінші дәрежелі түбірі болады.

*Мысал 1.3.4* [9, б. 21]*.* Айтарлық ={+,, -, 0, 1} болсын, мұндағы + және - екі орынды функционалды символ, - бір орынды функционалды символ, ал 0 және 1-константалы символ. Бульдік алгебралар теориясы келесі аксиомаларымен берілсін. (Барлық бос айнымалылардың алдына универсал кванторы қойылған).

1. Ассоциативтілік амал + және:
2. Коммутативтілік амал + және :
3. Идемпотенттік заңы:
4. Дистрибутивтік заңы:
5. Жұтылу заңы:
6. де Морган заңы: .
7. Нөль және бірлік заңы: .
8. Екілік терістеу заңы: .

Бар аксиомаларға қосу ( орнына деп жазамыз)

9

Атомдық бульдік алгебра теориясына әкеледі; егер де оның орнына келесі аксиомасын қоссақ

10)¬онда атомсыз бульдік алгебра теориясын аламыз.

*Мысал 1.3.5* [9, б. 21-22]. Айталық болсын, мұндағы + - екі орынды функционалды символ, 0-тұрақты символ. Группалар теориясы келесі аксиомалармен беріледі:

1. (ассоциативтілік);
2. (нөлдік аксиома);
3. (кері элементтің бар болуы).

Келесі аксиоманы қоссақ, онда абельдік группалар теориясын аламыз

* 1. (коммутативтілік).

Абельдік группалар теориясында р экспоненті келесі аксиомамен анықталады:

5р)

Элементі ретті абельдік группалар теориясын алу үшін (бұралымсыз группа) бізге шексіз аксиомалар тізімі керек: кез келген (1)-(4) аксиомаларына

6n) қосамыз.

Бұл теория мысалдары шекті аксиоматизациялауға жатпайды.

Егер біз шексіз акиомалар реті қоссақ, әрқайсысы бір үшін

7n) онда толық бұралымсыз абельдік группаны аламыз.

**1.4 Модельді толықтық**

Модельді толық ұғымының теориясы Гильберттің нөлдік теоремасымен байланысты.

*Салдар 1.4.1* [9, б. 58]*.* (Нольдер жайлы Гильберт теоремасы)

полиномиалды теңдеулер мен бірнеше айнымалысы бар өрісінен алынған коэффициентті теңсіздіктердің ақырлы жүйесі болсын. Егер кейбір өрісте шешімі табылса, онда -нің өрісінің тұйықталуының алгебралық өрісінде де шешімі табылады.

*Анықтама 1.4.1* [8, c. 26]. Т теориясы модельді толық (Робинсон) деп аталады егер Т теориясы үшін модельдер арасындағы әрбір мономорфизм элементарлы болса.

моделінің диаграммасы деп барлық атомдық сөйлемдер және атомдық сөйлемдерді терістеу моделінде ақиқат деп айтамыз.

(Егер - мультипликативті группа болса, онда моделі үшін көбейту кестесі –да сол мәліметті қамтиды).

диаграммасы үшін модельдер класы кеңейтілім класымен сәйкес келеді.

*Анықтама 1.4.2* [8, c. 26]*.* Экзистенциалды формула деп келесі түрдегі формуланы айтамыз

,

мұндағы және H формуласы кванторларды қамтымайды.

*Сөйлем 1.4.1* [8, c. 27]*.* Егер – экзистенциалды формула, және онда .

*Дәлелдеу:* Айталық

,

болсын, мұндағы H құрамында кванторларды қамтымайды.

Демек кейбір үшін. Бірақ бұл жағдайда

,

яғни .

*Теорема 1.4.1* (Робинсон) [8, с. 27]. Кез келген теориясы үшін келесі шарттар эквивалентті:

1. Т модельді толық;
2. Т теориясының әрбір моделі үшін, толық теориясы бар;
3. орындалатындай, кез келген формуласы үшін экзистенциалды формуласы табылады.

*Дәлелдеу:*Айталық теориясы модельді толық және болсын. Айталық - және – модельдері болсын. екендігін көрсетеміз. 1.4.1 теорема бойынша толық болады. Сондықтан үшін бар, монофорзимы табылады. модельді толық болғандықтан, элементарлы болып табылады. Осыдан .

Кері жоримыз, 3-ші шарт орындалды делік және - Т теориясының модельдер арасындағы мономорфизмі. Айталық – Т теориясы тіліндегі формула болсын. 3-ші шарт бойынша орындалатындай экзистенциалды формуласы табылады.

делік. Онда 1.4.1 теорема бойынша , , cондықтан . Сонымен 3 шартынан Т теориясының толық екендігі шығады. Соңында 2-ші шарт орындалады деп есептейік және 3-ші шарттың орындалатынын көрсетейік.

Айталық, Т теориясынан келесі сөйлемдерді қосу арқылы S жиыны алынсын:

1. , мұндағы теориясына – тұрақтысы кірмейді.
2. әрбір экзистенциалды формула үшін бар, .

Қарама-қайшылықпен дәлелдеу үшін S үйлесімді деп алайық. 1.4.1-ші теорема бойынша S жиыны моделіне ие болады. Осыдан кейбір үшін екендігі белгілі. 2-ші шартынан екендігі шығады. қатынасының финитарлық сипатына байланысты аламыз

,

мұнда , сөйлемінен шыққан ақырлы сан конъюнкциясы жалғасын табады. Сонымен – Т теориясына енгізілмейтін тұрақтыларды, айнымалыларға ауыстыруға болады. Сондықтан

мұнда - кванторсыз. Осылайша, және , мұндағы – экзистенциалды формула

болады. Бірақ S-тің анықтамасы бойынша екендігі шығады.

S үйлесімсіздігі экзистенциалды формулалары болуы керек дегенді білдіреді. Осылайша

,

.

Айталық - болсын. Онда және кейбір экзистенциалды формулаға логикалық түрде эквивалентті болады.

*Теорема 1.4.2* (Линдстрем тесті) [6, c. 57]. Айталық саналымды тілінің теориясы болсын. Егер келесі шарттар орындалса:

1. Т теориясының барлық модельдері шексіз;

2. теориясының кез келген тізбегінің бірігуі теориясының моделі болып табылады;

3. теориясы кейбір шексіз кардинал үшін -әлбетті болып табылады. Сонда теориясы модельді толық болады.

**1.5 Гильберттің он жетінші мәселесі**

Нақты тұйық реттелген өрістердің теориясы модельді толық екендігі белгілі. Бірақ бұл қорытындыны қазір болжай отырып, Давид Гильберттің 1900 жылы Париждегі Халықаралық математиктер конгрессіне жіберілген жиырма үш мәселенің он жетінші мәселесінің шешімін көрсете аламыз. Бұл параграфтың «Кемел йонсондық теорияларды зерттеу тәсілдері» атты монографиясында [9, б. 58] негізгі анықтамалар мен тұжырымдамалар көрсетілген.

*Теорема 1.5.1* (Е. Артин) [9, б. 58].

Айталық нақты коэффициенттермен анықталған рационалдық функция болсын және ол барлық үшін орындалсын. Онда нақты коэффициенттерімен анықталған рационалдық функцияның ақырлы жиыны бар. Яғни .

*Лемма 1.5.1* [9, б. 58]*.* Оң анықталған нақты көпмүшелік бар болса, онда ол нақты көпмүшеліктің қосындысы болып табылады.

*Дәлелдеу*: Көпмүшеліктің дәрежесіне индукция әдісін қолданып дәлелдейміз.

, дәрежесінде және кез келген нақты сандары үшін бар болсын. болса, онда және кейбір көпмүшелігі үшін. Бірақ , сондықтан және кейбір көпмүшелігі үшін. Осыдан, .

Кез келген нақты сандар үшін бар. -үзіліссіз болғандықтан, , нақты сандары үшін және . Осыдан, индукция әдісі бойынша , мұндағы . Онда , яғни .

*Лемма 1.5.2* [9, б. 60]*.* Айталық оң анықталған, бірақ көпмүшеліктің квадратының қосындысы болмайды.

*Дәлелдеу:* Кішігірім есептеулерден көретініміз, ең аз мағынасы саны болады және оң анықталған екенін көрсетеді. деп жориық, мұндағы - көпмүшеліктер және әрбір түріндегі көпмүшелік термдердің қосындысы.

Алдымен айнымалысының дәрежелері мен ең үлкен көрсеткішін қарастырылады. Мұндағы кез келген -да кездеседі. - көпмүшелігінің ешқандай термі, және одан да үлкен дәрежелерін сақтамайды. мүмкін екенін байқаймыз. үшін дәрежесі дұрыс екенін көрсетеді. Осыдан, әрбір  келесі түрде болады: кейбір коэффициенттері үшін . Сонымен көпмүшелігіндегі коэффициенттерімен салыстыра отырып, келесі теңдікті теңдігін аламыз, осыдан әрбір .

және коэффициенттерін салыстыру бізге әрбір екенін береді. және коэффициенттерін салыстыру бізге әрбір екенін береді.  коэффициенттерін салыстыру келесі түрдегі мүмкін емес теңдігін береді.

*Лемма 1.5.3* [9, б. 61]*.* Кейбір шамалардың қосындысы кері шаманың квадраттарының қосындысын береді.

Дәлелдеуі:

*Лемма 1.5.4* (Е. Артин, О. Шрейер) [9, 61 б]. Айталық реттелген өріс болсын, сонымен қатар жиынының әрбір оң элементі осы жиынның элементтерінің квадратының қосындысы болады.

Айталық -өріс, моделінің бірігулерінің сигнатура тілінің моделіне дейін ішкі өріс және - -дағы нөлдік емес квадраттарының қосындысы болмайтын болсын. Айталық -жиынындағы элементтердің квадраттарының қосындысы болмайтындай болсын. Онда реті табылып, жиынындағы ретін кеңейтеді, мұндағы .

*Дәлелдеу:* жиынындағы «оң элементтерін» табу жеткілікті, яғни:

1. .
2. .
3. әрбір үшін.
4.  жиыны және амалдарына қатысты тұйықталған.
5. кез келген элемент үшін, немесе болады.

жиынын сипаттағаннан кейін, келесі түрде анықтаймыз: .

Әрбір , егер , онда квадраттар қосындысы болады және 3 пен 4-ші пункт бойынша . Осыдан қатынасы ны кеңейтеді. Сондықтан, -ны құру ғана қалды. P-ның бірінші жуықтауы болып табылады.

Айталық,  болсын (барлық нөлдің болуы міндетті емес). Сонымен 1-4 пунктері -да орындалатынын растаймыз. 1 және 3 –ші пунктері орындалатыны айқын. Ал 2- ші пункті тексеру үшін болатынын байқаймыз, онда квадраттардың қосындыларының кері сандары туралы алдыңғы лемма бойынша квадраттардың қосындысы болады. 4-ші пункті және ескере отырып,  анықтамасы бойынша анықталады. Әрі қарай -дың барлық үлкен және одан да үлкен нұсқаларын қадағалаймыз. , -ды 1-4 пунктерін және қанағаттандырады деп ұйғарайық. Әрі қарай -ні келесі түрде анықтаймыз:

{, яғни -ден коэффициенттері арқылы алынған көпмүшеліктер}.

Әрі қарай және 1, 3, 4-ші пунктері -де орындалатындығын көру қиын емес. 2- ші пунктің -де орындалатындығын көрсету үшін деп жорамалдаймыз және кері жорамалға қайтып келеміз. Жұп тақ дәрежелі дәрежелерді қарастырсақ, коэффициенттері -де болатын кейбір және көпмүшелері үшін аламыз. Егер , болса, онда q. Бірақ -ден алынған, яғни бұл қайшылық болып табылады.. Бірақ - -дің кері элементі ретінде аламыз. Бір жағынан, егер болса, онда яғни, екенін көрсетеді және теңдіктің оң жағындағы әрбір көпмүшелігі жиынының элементі болғандықтан, қарама-қайшылықты аламыз.

*Лемма 1.5.5* [9, б. 63]. Әрбір реттелген өріс нақты тұйықталған реттелген өрістің ішкі моделі ретінде енгізіледі.

*Дәлелдеуі:* Әрбір реттелген өрісі үшін болатындай реттелген В өрісі бар екенін дәлелдеу жеткілікті, әрбір натурал сан үшін , , мұндағы – өріс теориясы тіліндегі сөйлем, оның келесі тұжырымы бар:

*Тұжырым 1.5.1* [9, б. 64]. Егер ең үлкен дәрежелі көпмүшелік және орындалатындай болса, онда және орындалатындай табылады.

Келесі тұжырымды қарастырайық:

*Тұжырым 1.5.2* [9, б. 64]. Кез келген реттелген өрісі үшін және орындалатындай реттелген өрісі табылады және оны деп белгілейміз.

Сонымен, кез келген реттелген өріс ақиқат болады. Әрі қарай әрбір үшін болатынын дәлелдейміз. Бұл моделі үшін біз модельдер тізбесін құрастырамыз:

, мұндағы әрбір болады. Айталық моделі тізбелердің бірігуі болсын. Сонымен теориясы тізбелердің бірігуі тұрақты болғандықтан, болады. Сонымен қатар әрбір үшін және екендігін сөйлемі арқылы аламыз. Енді әрбір үшін -нің - нен шығатындығын дәлелдеу қажет. Алдымен мына тұжырымды дәлелдейміз.

*Тұжырым 1.5.3* [9, б. 64]. Егер және ең үлкен дәрежелі жиынының коэффициенттермен алынған көпмүшелігі бар және орындалатындай, жиынынан алынған , онда орындалатындай моделі табылады және және орындалатындай элементі табылады. Алдымен бұл тұжырымдама - мәнін білдіретінін дәлелдеуге қалай көмектесетінін көрсетейік. Айталық ORF болсын. Бұл тұжырымды және орындалатындай, моделін құру үшін қолданамыз. Алдымен әрбір және ең үлкен дәрежелі жиынының коэффициенттермен алынған әрбір көпмүшелігі үшін және , және орындалатындай элементі табылып, жиынының әрбір элементтерінің жұбы үшін ORF модельдер тізбесін құрастырамыз. Әрі қарай моделі құрылған деп жоримыз. моделін келесі түрде құрамыз:

Айталық түріндегі тілінің экзистенциалды барлық сөйлемдер жиыны болсын, мұндағы болатындай ең үлкен дәрежелі көпмүшелігі бар және көпмүшелігінің коэффициенттері тілінің тұрақты символдары болып саналады және Әрі қарай ORF орындалады деп ұйғарайық.

Компактылық теоремасын қолдана отырып, орындалатындай әрбір ақырлы ішкі жиыны үшін С моделін табу жеткілікті. -ді қолдана отырып, және болатындай моделін аламыз. 1.5.3–ші тұжырымды қолдана отырып және болатындай моделін аламыз. -ді тағы да қолдана отырып, және болатындай моделін аламыз. 1.5.3-ші тұжырымды қайта қолдана отырып, және болатындай моделін аламыз. Бұл тұжырымды қайталай отырып, -дан болатын -тен моделдерді аламыз. Әрбір экзитенцианалды болғандықтан, әрбір - моделі үшін екенін аламыз. Айталық болсын, онда диаграмма леммасын қолданып және , болатын моделін аламыз, осыдан көпмүшеліктерінің қажетті қасиеттері орындалады.

Айталық тізбелердің бірігуі болсын. Сондықтан және құрылымы бойынша - әмбебап-экзистенциалды теория болады. Онда дәлелденді. 1.5.3–ші тұжырымды дәлелдей отырып, дәлелдеуді толық аяқтаймыз.

1.5.3 – ші тұжырымның дәлелдеуі:

Егерболатындай кейбір үшін болса, деп жори аламыз. Кері жағдайда -ден жаңа элементі енгізіледі, мұндағы орнына анықталған ретте және беріледі. Әрі қарай екенін белгілі.

Сонымен болғандықтан көпмүшелігі -де ыдырауға болмайтындығын көрсетіледі. Әрі қарай деп жориық. элементінің анықтамасы бойынша және және болатындай және -ді табуға мүмкіндік береді, сонымен бірге және  арасында  жиынының аралығында , элементтерінің түбірлері болмайды.

Сонымен, немесе немесе болғандықтан және әрбір -мен -тен дәрежесі бар болғандықтан, – элементі жиынының элементі болады. Әрі қарай,  **–** жиынындағы келтірілмеген көпмүшелік болып табылатыдығы анық, **-**ден дәрежелі дербес көпмүшелердің өрісі -ге дейін кеңейтуге мүмкіндік беретіндігін білдіреді.Сонымен,дәрежедегі жиынындағы коэффициентерімен кез келген көпмүшелікке бола алмайды. Өйткені, теңдігін алу үшін біз **-**тіең кіші дәрежеде ала алмаймыз және **-**ті оған бөле алмаймыз, мұнда дәрежесі дәрежесіне тең. Сонымен болатынын білдіреді және осыдан біз жиынынан -ны жіктей аламыз. Әрі қарай моделінің ретін сақтай отырып -ны  -реттелген өрісіне дейін кеңейте аламыз. Егер -n ең үлкен дәрежелі  жиынындағы коэффициенттермен көпмүшелік болса, онда жиынынан және элементтері табылады да, болса, - және арасындағы символын өзгертпейді, бұдан екені дәлелденеді.

*1.5.1-ші теореманың дәлелдеуі:*

1.5.3-ші лемманы қолдану арқылы, барлық үшін болатындай көпмүшелігін дәлелдеу жеткілікті.

Айталық «рационалдық функция» өрісі болсын. моделі ішкі өріс ретінде ⟨+,⋅,0,1⟩ сигнатура тілінің моделіне дейін бірігуін қамтиды.1.5.4-ші леммасы бойынша егер көпмүшелігі моделіндегі квадраттардың қосындысы болмаса, онда біз моделіндегі ретін таба аламыз, ол нақты сандар ретін кеңейтеді, кеңеюі моделіндегі реттелген өріс болады және теңдігі орындалады. Енді 1.5.5–ші лемманы қолдана отырып, моделін нақты тұйық өрісінің ішкі моделі ретінде енгіземіз, .

Айталық болатындай кванторсыз формула болсын, мұндағы - көпмүшесінің нақты коэффициенттері үшін тұрақты символын қамтиды. Әрбір үшін жаңа айнымалысын ауыстыру арқылы формуласынан алынған өріс теориясы тілінің формуласы болсын.

Сонда аламыз және онда . Сонымен, модельді толық және . болса, онда болады, яғни болатындай болады.

**1.6 Модельдік толықтыру**

А.Робинсонның модельді толық ұғымының енгізілуі өріс теориясын оқу үшін және теңдеулер жүйесінің шешілу мүмкіндігіне байланысты сұрақтарды шешу үшін пайдалы.

*Анықтама 1.6.1.* [8, с. 37] Айталық және – бір сигнатураның моделі болсын. теориясы Т теориясының модельді толықтыруы деп аталады, егер және Т теориялары келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. егер , онда ;
2. егер , онда табылады, болады;
3. егер , онда , , және онда .

Егер теориясы Т теориясының толықтыруы болса, онда және теориялары 1-ші және 2-ші шарттарын қанағаттандырады, яғни модельді толық, бірақ теориясының модельді толықтыруы болмайды.

*Теорема 1.6.1* (Робинсон) [8, с. 37]. Егер және - теориялары Т теориясының модельді толықтыруы болса, онда .

Дәлелдеу: Айталық кез келген болсын. моделі -ның моделі болатындығын көрсетеміз. Алгебралық жүйедегі тізбені анықтаймыз ;

1);

2) деп ұйғарайық. Онда және болатындай, табылады.

3) деп ұйғарайық. Онда және болатындай, табылады. Енді деп алайық. модельді толық болғандықтан, тізбесі элементарлы тізбе болып табылады. Сәйкесінше, элементарлы тізбе принципы бойынша ([8, с. 34], 10.3-ші салдар) болады. Сондықтан 1.6.1-ші теорема бойынша болады. Сондықтан әрбір модель үшін де бар. Симметриялы түрде - ғы әрбір модель - ның да моделі болып табылады. Яғни 1.6.1-ші теорема бойынша болатындығы дәлелденді.

Келесі теорема А.Робинсонға тиесілі.

*Теорема 1.6.2* [3, c. 39].Алгебралық тұйық өрістер теориясы өрістер теориясының модельді толықтыруы болады.

*Дәлелдеу.* Айталық , ал және алгебралық тұйық кеңейтілімі болсын. болатындығын көрсету керек. Айталық орындалатындай, (сәйкесінше ) - (сәйкесінше ) алгебралық тұйық элементарлы кеңейтілімі болсын. және бар болуы теорема 1.3.1 теоремасынан шығады. Айталық (сәйкесінше ) бойынша үшін транцендентті базисі бар (сәйкесінше ). Онда болады. дан - ға дейін өзара бірмәнді сәйкестік табылады. Әрі қарай f - ті дейін жалғастырамыз, сонымен моделіне тепе тең. Онда -ді дейін кеңейтуге болады, сонымен (сәйкесінше ) - алгебралық тұйықталу (сәйкесінше ) бар. Сонымен 1.6.1 теорема бойынша . Дәлелдеу керегі де осы еді.

Сызықтық реттелген теориясы (LO) келесі үш аксиоманы құрайды:

а) ;

ә) ;

б) (х) (y)[xy &у х х = у].

Тығыз сызықтық реттелген ең үлкен және ең кішігірім элементтері болмайтын (DLO) - LO аксиомаларына келесі түрдегі аксиомаларды қосамыз:

а). ;

ә)

() үшін қысқартуы бар.

*Теорема 1.6.3* (Робинсон) [3, c. 40]. Тығыз реттелген теория (DLO) теориясы сызықтық реттелген (LO )теориясының модельді толықтыруы болады.

*Дәлелдеу:* Кез келген моделінің сызықтық ретін ең үлкен және ең кіші элементтері болмайтын тығыз сызықтық ретке дейін моделінің элементтерінің барлық бос орындары толғанша кеңейтуге болатынын көре аламыз. Сонымен , , , және , бірақ деп ұйғарым жасайық. Айталық және болатындай, – cөйлемі болсын. моделінен ақырлы ішкімоделін тасымалдаушысымен аламыз.

Сколем- Левенгейм теоремасы [8, с. 37] бойынша және болатындай, және саналымды модельдері табылады. Осыдан болатындығы анық. Бірақ барлық үшін шартын қанағаттандыратын изоморфизмі табылатындықтан бұл мүмкін емес. Кантор әдісі арқылы –ті құрастыруға болады. мен -ді белгілейік:

және ,

мұнда барлық үшін . –ті индукция бойынша анықтаймыз.

Жағдай 1: . Онда .

Жағдай 2: және тақ. Айталық кейбір шекті жиында әлдеқашан анықталған болсын. Айталық -дан алынған b кішігірім индекске ие болатын элементі болсын.

Жағдай 3: және жұп.

Жағдай 1-3 дәлелдеулері [8, с. 41-42] жұмысында көрсетілген.

**1.7 Ішкі модельді толықтық**

Бұл параграфта ішкі модельді толықтықтың негізгі ұғымдарын, анықтамаларын қарастырамыз.

*Анықтама 1.7.1* [8, с 36]. теориясы элиминация кванторына рұқсат береді дейміз, егер әрбір F формуласы үшін ( теориясының тілінде) кванторсыз G формуласы табылады, яғни болады.

*Ескерту 1.7.1.*Әрбір келесі теорияда кванторлар элиминациясы болады:

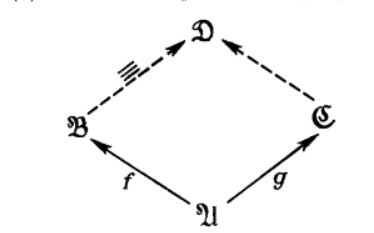
1. DLO соңғы элементсіз тығыз сызықтық реттер теориясы.
2. ACF тұйық алгебралық өрістер теориясы.
3. RCF тұйық өрістер теориясы.

Т теориясы ішкі моделді толық деп аталады егер -әрбір ішкі моделінің Т теориясының кез келген моделі үшін толық теория болып табылады.

*Теорема 1.7.1.* [8, с. 39] Т теориясын ішкі модельді толық деп аталады, егер келесі екі шарттың әрқайсысына эквивалентті болса.

1. Т теориясы кванторлар элиминациясына рұқсат береді.

2. Әрбір диаграмма келесі түрде болады: , .



мұндағы көрсетілген тәртіппен толықтырылуы мүмкін.

*Дәлелдеу:* [8, с. 41] Кері жору әдісі арқылы дәлелденеді.

*Теорема 1.7.2* (Робинсон) [8, с. 43]. Егер Т- әмбебап теория және оның модельді толықтыруы болса, онда элиминация кванторына рұқсат береді.

*Дәлелдеу:* 1.7.1-ші теорема бойынша теориясының ішкі модельді толық екенін көрсету жеткілікті. Айталық моделі теориясы үшін ішкі жүйесі бар болсын. Онда теориясы да дәлелденген әрбір әмбебап сөйлем моделінде ақиқат болуы қажет. Осыдан екендігі шығады, онда толық екендігі шығады.

*Салдар 1.7.1* (Тарский, Робинсон) [8, с. 44]. Алгебралық тұйық өрістер теориясы (ACF) элиминация кванторына рұқсат береді.

*Дәлелдеу:* [8, с. 44 ] жұмысында көрсетілген.

**2 ТОЛЫҚ ТЕОРИЯЛАР ЖӘНЕ ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАР АЯСЫНДА ЗЕРТТЕЛЕТІН МОДЕЛЬДЕР ТЕОРИЯСЫНЫҢ ҚАЖЕТТІ МАҒЛҰМАТТАРЫ**

* 1. **Таза қосарлар және толық теориялардың рұқсаттылығы**

Бұл параграфта біз модельдер теориясының толық теориялары үшін таза қосарлар және толық теориялар үшін рұқсаттылық ұғымдарын қарастырамыз.

Келесі анықтамалар мен теоремалар [3, с. 39] жұмыстан алынды.

*Анықтама 2.1.1* [3, с. 39]. Егер -бос емес жиын, -суперпозицияларға қатысты жиыны кейбір биекция (алмастырулар) группасы болса, онда қосарын таза қосар деп аталады.

Егер және таза қосарлар болса, және , онда таза қосарын таза қосарының ішкі қосары деп аталады және келесі түрде белгіленеді .

*Анықтама 2.1.2* [3, с. 39]. және таза қосарларын изоморфты деп атаймыз, егер келесі түрдегі биекция табылса , онда Бұл жағдайда келесі түрде жазамыз . Егер , - группасының ішкі группасы болса, онда келесі түрде жазамыз . Егер (*C,F*) таза қосары табылса, яғни, онда келесі түрде жазамыз .



– таза қосар, - кез келген - -ға орынды қатынасболсын (яғни ). Егер кез келген , үшін

*Анықтама 2.1.3* [3, с. 39 ]. Айталық – таза қосар болсын, кез келген –- ға -орынды қатынас болсын (яғни ). Онда -ны инвариантты деп атайды, егер кез келген , үшін келесі орынға ие болса:

 арқылы  жиынында  барлық алмастырулар жиынын белгілейміз, үшін, болатындай, барлық үшін. Осыдан (, ) қосары таза қосар болып табылатындығы анық. Егер қатынасы -ға инвариантты эквиваленттілік қатынас, онда қатынасы группалық конгруэнцияны -ға индуциялайды, онда группалық конгруэнциясын келесі түрде белгілейміз:



. барлық үшін.

таза қосар болатындығы түсінікті, егер деп алсақ, барлық үшін, мұндағы – сәйкесінше және жиындарына іргелес класстар болып табылады.

*Анықтама 2.1.4* [3, с. 40]. қосарын қосарынан туындайтын туынды таза қосар деп атаймыз, егер және -ға ∼ эквивалентті инвариантты қатынасы болса, яғни түрде жазуға болады.

таза қосары басымырақ таза қосар деп атаймыз, егер қосарынан туындайтын  қосары табылса, яғни ..



Егер болатындай қосары таза қосарының туындысы болса, онда таза қосары таза қосарына басымырақ деп айтамыз.

*Анықтама 2.1.5* [3, с. 42]. ішкі жиындар жиынтығын (қатынасын) таза қосарының толық жиынтығы деп атаймыз, егер - алгебралық жүйеcіндегі барлық автоморфизмдердің группасы табылса (яғни, .

Айталық -кез келген таза қосарын рұқсат ететін кейбір тәсіл болсын, кейбір жүйесі - ға инвариантты қатынас болып табылады ( - қатынас деп аталады). таза қосары алгебралық жүйесінде интерпретацияланады, егер және сюръекциясы табылса.

толық түпбейнелері және теңдік қатынасы - да - қатынас болады. таза қосары - да интерпретацияланады, егер -  -да толық қатынастар жиынтығы табылса, мұнда - - да интерпретацияланады [3, с. 42].

*Теорема 2.1.1* [3, с. 40]. Егер және - таза қосарлар болса, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. қосары қосарынан басымырық;
2. - жиынының -инвариантты ішкі жиыны және сурьекциясы бар, яғни:

а) кез келгенүшінжәне кез келгенүшінболғанда;

ә) кез келген, кез келген – инварианттары үшін –ға*–*дің *m* – орынды қатынасы,–ға *–*дің -орынды қатынасы– инвариантты болады, мұндағы

.

*Теорема 2.1.2* [3, с. 40]*.* Егер таза қосары таза қосарда -интерпретацияланса, онда қосары - нан басымырық болады;

*Дәлелдеу:* [3, с. 40-42] әдебиетіндекөрсетілген

Әрі қарай толық теориялардың рұқсаттылықпен байланысы көрсетілген.

*Анықтама 2.1.6* [3, с. 43]*.* Айталық , модельдері сәйкесінше *А*, *В* жиындарында берілгенБурбаки [23] мағынасындағы кез келген математикалық структура болсын, яғни , (). Онда келесі түрде айтуға болады.



1. моделі моделіне рұқсат етеді (немесе моделін моделінде рұқсат етілсе), егер ;



1. қатынасты түрде - ға рұқсат етілсе, егер қосары қосарынан басым болса.

*Ескерту 2.1.1.* Егер моделі моделіне рұқсат етілсе, онда моделі қатынасты түрде моделіне рұқсат етеді.

Егер - математикалық структура класы болса, онда моделі класына рұқсат береді (қатынасты түрде рұқсат етіледі) сонда тек ғана сонда, моделі класындағы кейбір структураларына рұқсат етіледі (қатынасты түрде рұқсат етіледі). Егер класы аксиомалар жүйесі бойынша анықталса, онда « моделі аксомалар жүйесіне рұқсат береді» ( « қатынасты түрде - ға рұқсат береді») және « моделі класына рұқсат береді» (« қатынасты түрде класына рұқсат береді, сәйкесінше»).



Егер -бірінші ретті тілдің алгебралық жүйедегі толық теориясы болса, онда  теориясы (қатынасты) математикалық структура класына рұқсат береді деп айтамыз (немесе аксиомалар жүйесіне), егер теориясының монстр-моделі (қатынасты) класына рұқсат етілсе (сәйкесінше -ға).

Модельдер теориясының маңызды ұғымдарының бірі басқа бір жүйеде алгебралық жүйелердің анықталуы (интерпретациялануы) болып табылады.

алгебралық жүйесі алгебралық жүйесінде анықталған деп атайды, егер формалді тілінде моделі қатынасында табылса, яғни қосары қосарына изоморфты. Модельдер теориясының даму сатысында бұл ұғым жалпыланды және жалпыға ортақ (қазіргі кезеңде) анықтамаларды келесі түрде анықтауға болады.

Егер алгебралық жүйесі болса, − кардинал, онда жиынын ішкі жиынын айтамыз, егер жүйесінің тілінде -типті табылса, мұндағы және - –ны жүзеге асыратын - - дағы барлық -дардан тұрса. автоморфизмге қатысты инвариантты ішкі жиын болып табылады. Сондықтан - ны алгебралық жүйелердің ішкі жиындарының инвариантттарының анықталған класының тәсілі ретінде қарастыруға болады. Егер, − алгебралық жүйелер болса, онда егер моделі - ға - интерпрецияланса, онда - таза қосарға - интерпрецияланады [3, c. 45].

Егер болса, онда -интерпретациялау орнына формульді (элементарлы) интерпретациялау (анықталған) деп айтуға болады.

**2.2 Толық теориялардың таза үштігі**

Алдымен таза үштіктің анықтамасын негізгі [3, с. 49] жұмысынан еске түсірейік.

*Анықтама 2.2.1* [3, c. 49]. үштігін таза үштік деп атаймыз, егер:

1. таза қосар болып табылса;
2. - ішкі жиындарының орындалатындай кейбір класы болсын, барлық , үшін, мұндағы .

*Анықтама 2.2.2* [3, c. 49]*.* Егер ,−таза үштіктер болса, онда биекциясы табылады, онда нақты ұқсастық (изоморфизммен) деп аталады, егер:

1) ;

2).

Егер -таза үштік, қатынасы - -ға инвариантты эквиваленттік қатынас болса, онда қатынасы таза үштігіне конгруэнция болып табылады, егер , орындалатын болса.

*Сөйлем 2.2.1* [3, c. 49]. Егер қатынасы таза үштігіне конгруэнция болса, онда таза үштік болып табылады, мұндағы .

Егер ,− таза үштіктер болса, −сюръекция болса, онда

- ды ығысу, -ды созылу деп атаймыз егер:

1. қатынасы конгруэнция болып табылады, мұндағы ,;
2. бейнелеуі нақты ұқсастық болып табылады, мұндағы

*Анықтама 2.2.3* [3, c. 49].Айталық, −толық теория, −осы теорияның монстр-моделі, ), −қуаты бойынша кіші ішкі моделінің барлық элемантарлы класы болсын. Онда ( таза үштігін теориясының семантикалық үштігі деп атаймыз.

*Анықтама 2.2.4* [3, c. 49].және толық теорияларын нақты семантикалық ұқсастық деп атаймыз, егер оның семантикалық үштігі нақты ұқсас болса.

*Ескерту 2.2.1.* Теорияның нақты ұқсастық ұғымы монстр моделден тәуелсіз болады.

*Лемма 2.2.1.* (, таза үштігінде қатынасы конгруэнция болып табылады.

*Анықтама 2.2.5* [3, c. 50]. Егер теориясының семантикалық үштігі болсын, онда және теорияларын «–ұқсас» деп аталады егер және нақты ұқсас болса.

Толық теориялар класында «–ұқсастығы» эквиваленттілік қатынасы болып табылады.

*Анықтама 2.2.6* [3, c. 49]. және теорияларын - ұқсас деп атаймыз, егер , саналымды моделдері бар болса, және орындалатындай « – ұқсас» болады.

*Сөйлем 2.2.2* [3, c. 51]. 1) және теорияларын - ұқсас, , ([3, c.50, 9.2-ші сөйлем мағынасында]), онда және « – ұқсас» болады;

*2) «*- ұқсас» қатынасы эквиваленттілік қатынасы болып табылады.

Келесі – ұқсастық және - ұқсастық мысалы [3, c. 51] жұмысында көрсетілген.

- бүтін сандар жиыны болсын, кез-келген үшін .

),

=

1. және теориялары – ұқсас; 2) және , теориялары бір-бірімен - ұқсас болып табылады.

Келесі екі анықтама Т.Г.Мұстафин [7, p. 259] жұмысында келесі түрде көрсетілген.

*Анықтама 2.2.7* [7, p. 260].

1. таза үштік деп аталады, мұндағы құр емес жиын, – -ның ауыстырулар группасы және –-ның ішкі жиындарының жиынтығы, барлық үшін болғанынан орындалады;

2.Егер және ⟨⟩ таза үштіктер болса, және – биекция болса, онда изоморфизм болады, егер:

a)

b) .

*Анықтама 2.2.8* [7, p. 260]. ⟨⟩- таза үштігі теориясының семантикалық таза үштік деп аталады, мұндағы – теориясының монстр-моделінің жасаушысы– -ның автоморфизмдер группасы, –-ның барлық ішкі жиындар класы, әрқайсысы -ның сәйкес элементарлы ішкі моделінің жасаушысы болса.

**2.3 Толық теориялардың ұқсастығы**

Бұл параграфта толық теориялар үшін синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары туралы айтылған.

Келесі анықтама Т.Ғ. Мұстафинге тиесілі [7, p. 259].

Айтарлық – толық теория болсын, онда , мұндағы – бос айнымалысы бар формулалардың бульдік алгебрасы.

*Анықтама 2.3.1* [7, p. 259]. Айтарлық және – толық теориялар болсын. және синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ға дейін шектеуі және буль алгебраларының изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

Толық теориялардың синтаксистік ұқсастығының келесі мысалын [7, p. 259] жұмыста көрсетілген.

*Мысал 2.3.1.*  сигнатураның және теориялары синтаксистік ұқсас, мұндағы –бинарлы функциялар,

*Анықтама 2.3.2* [7, p. 260]. және толық теориялар семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың семантикалық үштіктері өзара изоморфты болса.

Толық теориялардың семантикалық ұқсастығының келесі мысалы [7, p. 260] жұмысында қарастырылған.

*Мысал 2.3.2 .* Келесі және теориялар семантикалық ұқсас, мұндағы

*Сөйлем 2.3.1* [7, p. 261]. Егер және теориялар синтаксистік ұқсас болса, онда және семантикалық ұқсас, керісінше дұрыс емес.

**2.4 Йонсондық теориялар туралы түсінік**

Модельдер теориясы бүгінгі таңда математика ғылымының жеке бөлімі болып табылады. Математикалық логикадан алынған негізгі түсінік - формальді тіл. Кез келген ғылым секілді модельдер теориясы да өзінің зерттеу пәні бар.

Зерттеудің негізгі объектілері модельдер (структурасы, алгебралық моделі). Ең негізгі зерттеу құралы болып математикалық логиканың тілі саналады, нақтырақ айтсақ предикаттық есептеу. Модельдер теориясының негізін қалаушылардың бірі Абрахам Тарский 1940 жылдан бастап АҚШ-тың батыс жағалауында тұрған, ал келесі негіз қалаушы А.Робинсон – 1967 жылдан бастап 1975 жылға дейін шығыс жағалауында тұрған. Бұл айырмашылық баяғыда өзінің шартты географиялық мағынасын жоғалтты, алайда математикалық көзқараспен өте тиімді.

Бұл параграфта йонсондық теориялардың негізгі түсініктерін, анықтамаларын қарастырамыз.

Бірінші ретті саналымды тіліндегі теориясын қарастырайық.

*Анықтама 2.4.1.* [9, б. 157].Теория Т йонсондық деп аталады, егер:

1) Теория -да ең құрығанда бір шексіз моделі болса;

2) Теория индуктивті болса;

3) Теория үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса (JEP).

4) Теория амальгама қасиетіне ие болса(АР).

*Анықтама 2.4.2.* [9, б. 157] Айталық болсын. теориясының моделі үшін -әмбебап деп аталады, егер қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның әрбір моделі -ге изоморфты енгізілсе; үшін -біртекті деп аталады, егер теориясының -нің ішкі модельдері болатын қуаттары қатаң түрде -дан кіші және кез келген екі моделі үшін және изоморфизмі үшін әрбір -ның моделіне дейін кеңейтілуі, -ның ішкі моделі және қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның моделі табылса, моделі -ді кеңейтсе және изоморфизмі -ті кеңейтсе.

-ның біртекті-әмбебап моделі –қуатты -ның –біртекті-әмбебап моделі деп аталады, мұндағы .

Анықтама 2.4.3. [9, б. 157]. Т теориясы үшін біртекті-әмбебап модель деп аталады қуаттылықтағы Т теориясы үшін –біртекті-әмбебап моделі болады, мұндағы .

*Факт 2.4.1. [9, б.* 157]. Әрбір Т йонсондық теория қуаттылығы болатын - біртекті-әмбебап моделге ие болады. Керісінше, егер теориясы индуктивті, шексіз модельге ие және - біртекті-әмбебап моделге ие болса, онда Т теориясы йонсондық деп аталады.

*Факт 2.4.2.* [9, б. 157].

1. йонсондық теория болсын. және екі моделі - біртекті – әмбебап үшін элементарлы эквивалентті болып табылады.
2. Егер қуаты тоериясы үшін моделі табылса, яғни -біртекті-әмбебап, онда ол изоморфизм дәлдігіне дейін жалғыз болады. Әрі қарай моделі қуаты біртекті, яғни  қатаң түрде кіші М моделінің және ішкі модельдері арасындағы кез-келген изоморфизмі, Т-ның модельдері болады және М автоморфизіне дейін жалғасады.

*Анықтама 2.4.4.* [9, б. 158]. Йонсондық теорияның С моделі теориясының семантикалық моделі деп аталады, егер - біртекті-әмбебап болса.

*Анықтама 2.4.5* [9, б. 158]. теориясының семантикалық модельдің элементарлы теориясы йонсондық теорияның семантикалық толықтыруы (центрі) деп аталады, яғни =.

*Анықтама 2.4.6* [9, б. 159].  теориясының *А* моделінің экзистенциалды тұйық деп аталады, егер кез келген моделі үшін және -дан алынған константаларымен кез келген экзистенциалды формуласында орындалса, егер - ішкі моделі және шарты орындалса.

*Лемма 2.4.1* [9, б. 160]. йонсондық теориясының семантикалық моделі - экзистенциалды тұйық болып табылады.

Келесі анықтаманы йонсондық теорияның семантикалық моделінің аясында береміз.

*Анықтама 2.4.7* [9, б. 159]. йонсондық теориясы кемел деп аталады, егер әрбір семантикалық моделі қаныққан моделі болып табылса.

Келесі нәтиже [24] жұмыстан алынған йонсондық теорияның толықтық анықтамасы бойынша да кемел екенін байқау оңай.

*Теорема 2.4.1*[9, б. 159].  кемел йонсондық теориясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - T модельді компаньоны;

2) ;

3) ,

- теориясының экзистенциалды тұйық моделі, -Кайзер қабықшасы (максималды теориясы, теориясымен өзара модельді үйлесімді), , - теориясының бірдей класы болса (мысалы Робинсонның шекті форсингі), - йонсондық теориясының модельді компаньоны болады.

*Ескерту 2.4.1* [9, б. 160]*.* Йонсондық теориясының кемелділігі  моделінің толықтығына эквивалентті.

Йонсондық теорияның компаньондарының қасиеттерін зерттейік.

*Анықтама 2.4.8* [10, p. 530].Екі және йонсондық теориясы косемантикалы деп аталады, егер болса.

*Тұжырым 2.4.1* [10, p. 531]. және йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) және косемантты;

2) және саналымсыз семантикалық модельдері бар;

3) семантикалық модельдері  және  сәйкес келеді;

*Лемма 2.4.2* [9, б. 160]. Айталық йонсондық теория болсын. Онда ең үлкен Т йонсондық теориясына қарағанда Т теориясымен косементикалы.

*Дәлелдеуі:* [9, б. 161] Айталық йонсондық теорияның кейбір семантикалық моделі болсын. Онда моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделі болады және және екендігі белгілі.

Сонымен қатар екендігі де белгілі, теориясының моделі -біртекті-әмбебап. Осыдан теориясы үшін моделі -біртекті-әмбебап болатынын көрсетеміз. Айтарық теориясының кез келген моделі және қатаң түрде қуатынан кіші болсын. моделі үшін әмбебап - күшінен - изоморфты енгізіледі. Айтарлық және модельдері -дан, қатаң түрде ішкі моделінің қуатынан кіші және изоморфизмі болсын.  және -ның модельдері. Айтарлық  кез келген -ның кеңеюі, қатаң түрде  ішкі моделінің -қуатынан кіші және - изоморфизмі -ке дейін жалғасатын болсын, яғни моделінің ішкі моделі болып табылады (және сәйкесінше  моделі) қатаң түрде  қуатынан кіші, онда  моделініңкеңеюі  ішкі моделі табылады, және изоморфизм ,-ке дейін жалғасады, ішкі моделінің -қуатының күші. Сәйкесінше  моделі үшін  - біртекті –универсалды. Сәйкесінше йонсондық теория. Демек және жалпы бірдей семантикалық моделі болады, яғни  және  косемантты.  йонсондық теориясы  косемантты деп ұйғарайық және - аксиоматизацияланатын теория, сондықтан анықтама бойынша орындалады. Сол себептен, және ең үлкен йонсондық теория, және -мен косемантты. Келесі нәтиже [10, p. 532] жұмыстан алынды.

*Салдар 2.4.*1 [10, p. 532]. Айталық йонсондық теория болсын. Онда ең үлкен йонсондық теориясы қарағанда косемантты. Осыдан егер йонсондық теория болса, онда екенін көруге болады.

Келесі нәтижелер [24, c. 70] жұмыстан алынған және жаңа анықтамалар аясында да дұрыс болады:

*Теорема 2.4.2* [24, с. 70].Айталық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) кемел;

2) - аксиоматизацияланған.

*Теорема 2.4.3* [24, с. 71]. Айталық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) кемел;

2) .

*Теорема 2.4.4* [24, с. 72]. Айталық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарт эквивалентті:

1) кемел;

2) модельді компаньоны бар.

*Теорема 2.4.5* [24, с. 72]. Айталық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1)  кемел;

2) -йонсондық теория;

3) -йонсондық теория;

4) -йонсондық теория, мұндағы ;

5) -толық теория;

6) - толық теория.

**2.5 Йонсондық теория компаньондары**

Бұл жұмыста келтірілген анықтамалар, теоремалар мен тұжырымдар [9, б. 162] монографиясынан алынған.

*Анықтама 2.5.1* [9, б. 162]*.* Айталық - йонсондық теория болсын. йонсондық теориясының компаньоны деп аталады, егер теориясы сол сигнатурадан болса және келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) ;

2) Егер , онда . кез келген йонсондық теория үшін болады.

3).

 компаньонының интерпретациясы болып табылады.

*Лемма 2.5.1*[9, б. 163]*.* Егер - йонсондық теориясының компаньоны және - Т модельді компаньоны болса, онда .

*Лемма 2.5.2* [9, б. 163]*.* және йонсондық теориясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) және модельдері өзара үйлесімді;

2) .

*Дәлелдеуі.* Егер және моделі өзара үйлесімді болса, онда . Осыдан, (компаньон анықтамасың 2-шарты бойынша). Кері жағдайда, егер болса, онда . Бірақ компаньонның анықтамасы бойынша және Осыдан, . Онда және модельдері өзара үйлесімді.

*Лемма 2.5.3* [9, б. 163]*.*  және йонсондық теориялар болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. және өзара модельді үйлесімді;
2. ;
3. ;
4. .

Келесі сұрақты қарастырайық. Кез-келген йонсондық теория үшін оның компаньоны йонсондық теория болып табыла ма?

Осыған байланысты келесі анықтамаларды берейік.

*Анықтама 2.5.2* [9, б. 164]*.*  йонсондық теориясы # йонсондық деп аталады, егер -йонсондық теория болса.

*Анықтама 2.5.3* [9, б. 164]*.*  йонсондық теория супер – йонсондық деп аталады, егер

осы теорияда кез келген компаньон табылып, ол йонсондық теория болып табылса.

Келесі нәтижеде йонсондық теорияның басқа компаньондары арасындағы ерекшелігі туралы айтады.

*Лемма 2.5.4* [9, б. 164]*.* йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - кемел;

2) – супер-йонсондық;

3) - йонсондық;

4) - йонсондық;

5) - йонсондық;

*Теорема 2.5.1* [9, б. 163]*.* -йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) - толық;

2) - модельді толық.

*Дәлелдеуі.* 1) 2) - толық йонсондық теория болсын. - теориясының центрнің толықтыруы -  болып табылады.

екені белгілі, бірақ  шарты толық теория, онда теория . Онда йонсондық теория болып табылады. Онда кемел критерийі бойынша теориясы кемел йонсондық теория болып табылады. Бірақ бұл теорияның центрі оның модельді компаньонына теңеседі, ал соңғысы модельді толық теория болады.

2)1) шығатынын дәлелдейік. Екі дәлелдеуін қарастырамыз. Біріншісі теориясының қасиетін қолданады және модельді толықтығын қарастырады. Ал, екіншісі йонсондық теория үшін компаньонының қасиетін қарастырады және жалпы айтқанда йонсондық теориясын ғана емес, сонымен қатар йонсондық теориялар арасындағы модельді-теоретикалық қасиеттерін және олардың компаньондары арасындағы модельді-теоретикалық қасиеттерін қарастырады.

а) Қарсы жағдайды қарастырайық, толық емес, онда теориясында сөйлемі табылады, мұндағы теориясында қорытылмайды және теориясының қорытылмайды. Олай болса, – қарама-қайшылықсыз сөйлемдер жиыны және -де қарама-қайшылықсыз сөйлемдер жиыны. Сондықтан және модельдері бар болады. Олай болса және . Сонда T – JEP үйлесімді енгізу қасиетін қабылдайтындықтан, мынандай изоморфты енгізулер бар болады және мұндағы, бірақ T модельді толық, сәйкесінше – элементарлы енгізулер. Сонда . Қарама-қайшылық пайда болды. Олай болса, Т – толық.

b) T модельді толық болсын, онда T және өзара модельді үйлесімді болғандықтан, Т – -ның модельді компаньоны болып табылады. T және өзара модельді үйлесімді, онда. Т теориясы JEP қасиетіне ие болғандықтан,  – толық теория болады, онда Т теориясы да толық болады.

*Салдар 2.5.1.* Өзара модельді үйлесімді толық йонсондық теориялар бір-бірімен логикалық эквивалентті.

Өзара модельді бірлескен йонсондық теориялар косемантикалық теориялар болып табылатындығын оңай аңғаруға болады. Не себепті? Осы ретпен біз кез-келген йонсондық теориялар үшін екі жағдайды аламыз:

1) Егер ол кемел болса, онда онымен өзара үйлесімді модельді теориялар класы келесі қиылыспайтын ішкі кластарға бөлінеді:

а) толық емес йонсондық емес теориялар;

ә) толық йонсондық емес теориялар;

б) толық емес йонсондық кемел теориялар;

в) толық йонсондық теориялар (жоғарыда айтылғандардың ішінен осы ішкі класс бір теориядан тұратындығын ескерген жөн).

2) Егер ол кемел емес болса, онда онымен өзара үйлесімді модельді теориялар класы келесі қиылыспайтын ішкі кластарға бөлінеді:

а) толық емес йонсондық емес теориялар;

ә) толық йонсондық емес теориялар;

б) толық емес йонсондық кемел теориялар.

**3 ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ СЕМАНТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ СИНТАКСИСТІК ҰҚСАСТЫҒЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ БОЙЫНША АЛЫНҒАН НЕГІЗГІ НӘТИЖЕЛЕР**

**3.1 Йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы**

Бұл параграф йонсондық теориялар арасындағы ұқсастықтың түрлі түсініктермен байланысты. [7, p. 259-263] жұмыстағы кейбір анықтамаларды жалпы талдап қорыту және йонсондық теорияларды зерттеу аясында техникасының арқасында, кемел -толық йонсондық теориялар класында йонсондық теориялардың енгізілген ұқсастықтар түсінігі [7, p. 259] мағынасында толық теориялардағы сәйкес түсініктермен сай келетіндігі алынды. Бірінші бөлімде модельдер теориясының негізгі ұғымдары мен тұжырымдары дәлелденген. Бұл бөлімде диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері дәлелдемелері және тұжырымдары көрсетіліп, дәлелденген.

Келесі анықтамаларды берейік.

Айталық, кез келген йонсондық теория болсын, онда , мұндағы - бос айнымалылары бар экзистенционалды формулалар торы, -йонсондық теориясының центрі, яғни , мұндағы – йонсондық теорияның семантикалық моделі. [10, p. 529]

*Анықтама 3.1.1* [9, 179 б]. Айталық және − йонсондық теориялар болсын. Біз және теорияларын йонсондық синтаксистік ұқсас деп атаймыз, егер биекциясы табылып, келесі шарттар орындалса:

1) -тің -ге дейінгі шектеуінің және , торларының изоморфизмы бар, ;

2) , , ;

3) .

*Анықтама 3.1.2.* [9, б. 179]. таза үштігі йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы – теориясының семантикалық моделінің жасаушысы, - автоморфизмдер группасы, - барлық ішкі жиындарының класы, сәйкесінше экзистенциалды тұйық ішкі модельдердің жасаушысы болып табылады.

*Анықтама 3.1.3.* [9, б. 179]. және екі йонсондық теория йонсондық семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың йонсондық семантикалық үштіктері таза үштіктер сияқты изоморфты болса.

[7, p. 259] жұмыстағы синтаксистік модельдің жаңа анықтамасымен байланысты келесі анықтаманы енгіземіз.

*Анықтама 3.1.4* [9, б. 180] йонсондық теориясы кемел деп аталады, егер әрбір мағыналық моделі -ның қаныққан моделі болып табылса.

Жоғарыдағы анықтамалармен байланысты келесі нәтижені аламыз. Бұл нәтиже профессор А.Р. Ешкеев тиесілі.

*Теорема 3.1.1* [9, б. 180] және – -толық кемел йонсондық теориялар болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті

1) және – -синтаксистік ұқсас,

2) және – синтаксистік ұқсас [7, p. 259] мағынасында).

Дәлелдеуі: Дәлелдеу үшін келесі екі факт қажет.

*Факт 3.1.1* [9, 180 б]. Кез келген йонсондық теориясы үшін келесі шарттар эквивалентті:

1. кемел;
2. -модельді толық.

*Дәлелдеуі:* йонсондық теориясының кемелділігі *-*ның теориясының модельді компоньоны болып табылатыны эквивалентті [25].

*Факт 3.1.2* [9, б. 181]. Кез келген толық ∃ сөйлем табылса, онда *Т* йонсондық теориясы үшін келесі шарттар эквивалентті:

1. - модельді-толық;
2. әрбір үшін бульдік алгебра, мұндағы - бос айнымалымен экзистенциалды формулалар торы.

3.1.1-ші фактінің дәлелдеуі [9, б. 181] көрсетілген.

Анықтамалар мен түсініктер, йонсондық теориялармен байланысты барлық белгісіздерді [9, б. 25] жұмыстардан табуға болады.

**3.2 Йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастығы және олардың рұқсаттылықпен байланысы**

Бұл параграфта йонсондық теориялардың интерпретациялауы және синтаксистік ұқсастылық ұғымдарымен байланысы қарастырылған. Йонсондық теорияларды зерттеу аясында бұл ұғымдар жаңадан анықталды. Негізгі мысал ретінде Буль алгебралар теориясы қарастырылды. Бұл ұғымдар бір теорияның басқа теориямен рұқсаттылылығы ұғымымен байланысты. Параграфтың негізгі нәтижесі ретінде қарастырылған мысалдар рұқсаттылылық, интерпретациялау және ұқсастылықты әртүрлі сигнатурадағы алгебраларда қарастырылуы мүмкін екенін көрсетеді.

Екінші бөлімдегі 2.3-ші және үшінші бөлімдегі 3.1-ші параграфтарында толық және йонсондық теориялар үшін синтаксистік және семантикалық ұқсастылықтың негізгі анықтамаларды айтылған болатын.

Біз нақты алгебралық мысалдарды келтіру арқылы синтаксистік ұқсастықтың кейбір түрлерін келтіреміз. Ол үшін осы мысалдарға байланысты Б. Пуаза [11, р. 81] еңбегіндегі негізгі анықтамаларды еске түсірейік.

Бульдік сақина деп бірлігі бар ассоциативті сақинаны айтамыз, мұндағы кез келген үшін ; онда , бірақ ; кез келген және үшін орындалады. Онда және сәйкесінше, әрбір үшін , сондықтан ; демек бульдік сақинаның сипаттамасы 2 болады және болғандықтан, ол коммутативті.

Бұл ұғымды аксиоматизациялау үшін біз екі константа 0 және 1 символдарын, екі бинарлық қатынас + және символдарын қамтитын тілді енгіземіз. Бульдік сақинада екі бинарлық амалды ∧,∨ және бір унарлы амалды ¬ келесідей анықтаймыз: ;

Осыдан барлық және үшін келесі аксомалардың орындалатындығын байқауға болады:

– (Морган заңдары немесе немесе екіжақтылық заңдары):

– (ассоциативтілік ):

– ( арқылы дистрибутивтілік):

– ( арқылы дистрибутивтілік):

– ( және коммутативтілігі):

–

–

–

тіліндегі структурасы осы әмбебап аксомаларды қанағаттандырады, оны Бульдік алгебра деп атайды.

*Факт 3.2.1* [11, р. 81]*.* Әрбір бульдік сақинада кейбір бульдік алгебраны интерпретациялауға болады.

*Дәлелдеу.* Бульдік сақинасымен кейбір буль алгебрасын байланыстырамыз; керісінше де дұрыс: егер буль алгебрасында болса, онда бульдік сақинасын аламыз және бұдан басқа орындалады. Осылайша, тілге дейін бульдік сақиналар мен буль алгебраларының структуралары бірдей, бульдік сақина канондық түрде буль алгебрасына және керісінше түрленеді, екі бағыттағы түрлендірулер кванторсыз формулалар арқылы жүзеге асырылатынын көреміз.

Бульдік алгебраның келесі мысалы абельдік группамен байланыстырады.

*Факт 3.2.2* [12, с. 224]. Әрбір бульдік алгебрада кейбір абельдік группаларды интерпретациялауға болады.

*Дәлелдеу.* бульдік алгебрасында деп алайық.

абельдік группа болып табылады және әрбір бірлік емес элемент 2 ретке ие болады.

группасының бірлік элементі 0 болып табылады және әрбір элементі өзіне қарасты: , барлық үшін.

Әрқайсының өз сигнатурасына сәйкес,, , арқылы бульдік алгебра, бульдік сақина және абельдік группаны белгілейміз.

Бұл параграфтың негізгі нәтижесін аламыз.

*Лемма 3.2.3.*, , йонсондық теориялардың мысалдары болып табылады.

Дәлелдеу. және [6, с. 179], [26] жұмысынан шығады.

*Теорема 3.2.1.* және теоиялары синтаксистік ұқсас және толық теория үшін де, йонсондық теория үшін де бір-бірімен өзара интерпретацияланады.

*Дәлелдеуі:.* 3.2.1-ші фактісінен шығады.

*Теорема 3.2.2.* теориясы теориясында толық теория үшін де, йонсондық теория үшін де интерпретацияланады.

*Дәлелдеуі*. 3.2.2-ші фактісінен және 3.2.1-ші теоремаcынан шығады.

**3.3 Кейбiр йонсондық теория полигондарымен йонсондық теорияның байланысы**

Бұл параграфта диссертациялық жұмыстың негiзгi нәтижесi кейбiр йонсондық теория полигонымен йонсондық теорияның байланысын және инварианттарға қатысты полигондардың көмегiмен алынған сипаттамасы қарастырылды.

Шектелген қарастыруда (группа моноидтың қатты дербес жағдайы болып табылады) теория үшiн кемелдiлiк және йонсондық қасиеттерi алынды. Сонымен қатар экзистенционалды толық кемел йонсондық теориясы үшiн кейбiр экзистенциалды толық кемел йонсондық теорияның полигоны табылып, осы екi теорияның йонсондық синтаксистiк ұқсас болатындығы көрсетiлдi.

Біз анықталған теория полигонымен йонсондық теория байланысын қарастырамыз. Дербес жағдайда, йонсондық теория экзистенциалды толық және кемел болып табылады. Бұл шектеулер йонсондық теория, жалпы айтқанда толық емес және экзистенциалды толық бұл формулалы кванторлардың минималды мүмкін болатын талабы.

Бір жағынан кемел емес жағдайда негізгі пайдалы нәтижелерді алу үшін алгебралық мысалдар өте аз. Йонсондық теорияның кемел емес жағдайына мысал ретінде теориялар группасын жатқызуға болады, оның модельді компаньоны бар екендігі дәлелденген. Йонсондық теорияны зерттеу аясындағы жетістіктеріміз модельді компаньондарға байланысты [27-30] жұмыстағы техникамен байланысты. Осы параграфтың негізгі идеясы [7, p. 259] жұмыста көрсетілгендей толық теория үшін синтаксистік ұқсастықты [31-33] жұмыста көрсетілгендей йонсондық теория үшін синтаксистік ұқсастылыққа ауыстырамыз. [7, p. 263] жұмыста көрсетілгендей кез келген толық теория анықталған полигонда синтаксистік ұқсас екендігі көрсетілген. Ағылшын тіліндегі әдебиеттерде  моноидының полигон термині  термині қолданылады [34-37]. Бұл параграфта біз профессор Т.Ғ. Мұстафин терминдерін қолданамыз, яғни полигондарға байланысты модельді теоретикалық ұғымдарын және сұрақтарын бірінші болып анықтап, тұжырымдаған.

Бізге қажетті анықтамалардың, ұғымдардың және олардың модельді-теоретикалық қасиетерінің тізімі берілген. Толық теориялар үшін синтаксистік және семантикалық ұғымы Т.Ғ. Мұстафинге [7, p. 259] тиесілі.

*Анықтама 3.3.1* [7, p. 263]. моноидының полигоны деп біз тек бір орынды функциясы бар структураны айтамыз яғни

1) , мұндағы моноидының бірлігі болып табылады;

2) , , .

*Анықтама 3.3.2* [14, p. 75]*.* теориясы модельді толық деп аталады, егер теориясының кез келген және модельдері үшін келесі шарт орындалса . Әрбір изоморфтық енгізу элементарлы енгізуге эквивалентті.

Келесі ұғымдарды модельді толықтыру, модельді компаньон және теориясымен үйлесімді модельдерді [38] әдебиеттен алуға болады.

*Анықтама 3.3.3* [14, p. 75]. және теориялары өзара модельді үйлесімді деп аталады, егер теориясының кез келген моделі теориясының моделіне изоморфты түрде енгізілсе. Және бір уақытта кері тұжырым дұрыс.

*Анықтама 3.3.4* [14, p. 75]*.* Айталық, және теориялары тілінің кейбір теориялары болсын. теориясы теориясының модельді толықтыруы деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. және өзара модельді үйлесімді;
2. модельді толық теория;
3. егер , онда - толық теория.

Егер 1), 2) шарттар орындалса, онда -модельді компаньон.

*Теорема 3.3.1* [7, p. 263].Әрбір теориясы үшін теория полигоны табылып, келесі шарттар орындалса:

1) егер теориясының сигнатурасы шекті болса, онда - қабықшасы болып табылады;

2) егер теориясының сигнатурасы шексіз болса, онда - қабықша дерлік болып табылады.

*Теорема 3.3.2* [15, с. 29]. Айталық - йонсондық теориясы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. – кемел.
2. - теориясы модельді компаньонга ие.

Параграфтың негізгі нәтижесі ретінде сәйкес келетін инварианттардың көмегімен осындай полигондардың сипаттамасын аламыз. Шектелген қарастыруда (группа моноидтың дербес жағдайы болып табылады) теория үшiн кемелдiлiк және йонсондық қасиеттерi алынды.

Енді келесі лемманы қарастырамыз.

*Лемма 3.3.1.*[16, с. 71]. Айталық - - йонсондық теория болсын және теориясының барлық толықтырулары кванторлардың элиминациясына рұқсат етіледі. Онда

1. – кемел.
2. - – йонсондық.

Бұл лемманың салдары ретінде келесі теореманың 1–ші пункті маңызды.

*Теорема 3.3.3.* [16, с. 71]. 1)Әрбір - йонсондық теорияның полигоны кемел және йонсондық болып табылады, .

Регулярлы полигон үшін [39] жұмыста көрсетілген модельді толық емес регулярлы болып табылады. Яғни, полигондардың жеткілікті түрде қаныққан емес семантикалық модельдері табылады.

Йонсондық теорияның центрлері толық теория болып табылады және біз йонсондық теорияның центрінің элементарлы қасиеттерін йонсондық теорияға көшіре аламыз.

А.Р. Ешкеев йонсондық экзистенциалды толық және кемел екі теориясы үшін синтаксистік және семантикалық ұқсастықтардың арасындағы байланысты алған:

Теорема *3.3.4* [15, c. 47]. Айталық және теориялары -толық кемел йонсондық теориялар болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. және теориялары йонсондық теориялары синтаксистік ұқсас.
2. және теориялары синтаксистік ұқсас [7, p. 259].

Келесі теорема осы параграфтың негізгі нәтижесі болып табылады және [14, p. 75] жұмыста көрсетілген.

*Теорема 3.3.5* [14, p. 75].Айталық теориясы **-** толық, кемел йонсондық теориясы болсын, онда йонсондық теориясы  **-** толық, кемел йонсондық теория полигоны табылып, келесі шарт орындалады:

теориясы теориясына синтаксистік ұқсас болып табылады.

*Дәлелдеу*: Дәлелдеу үшін келесі фактілерді ескереміз.

1. Егер йонсондық теориясы кемел болса, онда оның центрі йонсондық теория болып табылады, мұндағы – йонсондық теорияның семантикалық моделі болып табылады.
2. Егер және толық теориялары [7, p. 259] жұмыста көрсетілгендей бір бірімен синтакистік ұқсас болса, онда осы берілген теориялар бірі бірімен семантикалық ұқсас болып табылады. Дәлелдеуін [7, p. 261] жұмыстан алуға болады.

[7, p. 259] жұмыста көрсетілгендей теориялардың арасындағы семантикалық ұқсас элементтердің формулалық қасиеттеріне берілген теорияның ішкі жиындарына байланысты болатын бірінші ретті семантикалық қасиеттеріне қатысты инвариантты болады.

Келесі анықтама семантикалық қасиеттің анықтамасын береді.

*Анықтама 3.3.5* [7, p. 261]. Теориялардың (немесе модельдердің немесе модельдердің элементтерінің) қасиеті (немесе ұғымы) семантикалық деп аталады, егер ол семантикалық ұқсастыққа қатысты инвариантты болса ғана.

*Сөйлем 3.3.*1 [7, p. 261]. Келесі қасиеттер мен ұғымдар семантикалық болып табылады:

1) тип;

2) форкинг;

3) -стабильділік;

4) Ласкар рангі;

5) қатты тип;

6) Морли тізбегі;

7) ортогоналдылық, типтердің заңдылығы;

8) – спектральді функция.

4) Йонсондық теорияның болуы семантикалық қасиет болып табылады.

*Дәлелдеуі:* [7, p. 261; 10. p. 530] жұмыстарынан шығады.

*3.3.5 –ші теореманың дәлелдеуі:*

3.2.1-ші теоремадағы кез келген толық теория үшін кейбір теория полигоны табылады, дербес жағдайда теорема 3.3.4–тің шартын қанағаттандыратын кейбір толық йонсондық теориясын қарастырамыз, яғни теориясы - - толық кемел йонсондық теорияның центрі болып табылады. Онда теориясы [7, p. 259] жұмыста көрсетілгендей кейбір толық теория полигонына синтаксистік түрде ұқсас. Жоғарыда көрсетілген 1-4 факт бойынша және 3.3.1-ші және 3.3.4-ші теоремалар бойынша йонсондық теорияның - теория полигоны толық және модельді толық болып табылады.

Онда 3.3.4-ші теореманың шартын қанағаттандыратын  йонсондық теориясы табылып және - -теорияның центрі болып табылады. Онда 3.3.4- ші теорема бойынша ізделінді йонсондық теория полигоны, 3.3.5–ші теореманың шартын қанағаттандырады және біздің дәлелдегіміз келгені де осы еді.

**3.4 Йонсондық теориялардың ұқсастық ұғымының кейбір қасиеттері**

Бұл параграфта йонсондық теорияларды ұқсастылық ұғымы бойынша зерттеу. Бұл тәсіл йонсондық теорияларды қарастыру жағынан біріншіден жаңа және өзекті зерттеу әдісі болып табылады. Негізгі мысал ретінде Буль алгебралар теориясы келтіріледі. Қарастырылған ұқсастықты әртүрлі сигнатурадағы алгебраларда қарастырылуы мүмкін екенін көрсетеді.

Йонсондық теорияның аясында ұқсастылылық ұғымы йонсондық теорияның семантикалық үштiк тiлiнде қарастырылады.

Экзистенциалды жай дөңес йонсондық теорияның семантикалық моделiнiң кемел йонсондық iшкi жиындар фрагментiнiң синтаксистiк және семантикалық ұқсастылық сипаттамасы алынды.

Кейбір қажетті ұғымдардың анықтамалары (рұқсаттылылық пен интерпретациялау) толық теориялар үшін [3, с. 49] жұмыстан алуға болады. Бұл параграфта біз осы ұғымдарды толық теориялардың жалпыламасында қарастырамыз.

Синтаксистік және семантикалық ұқсастығы йонсондық теориялар үшін келесі дереккөзден алуға болады [6, с. 181].

Біз нақты алгебралық мысалдарды келтіру арқылы синтаксистік ұқсастықтың кейбір түрлерін келтіреміз. Ол үшін осы мысалдарға байланысты негізгі анықтамаларды Б. Пуаза [11, с. 80] еңбегінен алуға болады.

Йонсондық теорияларды зерттеу классикалық теория модельдің қызықты тапсырмаларының бірі болып табылады. [40, 41] жұмыстарынан осы типті зерттеудің негізгі аспектілерін алуға болады. Интерпретациялаудың мәселесін басқа ұғым арқылы қарастыруға болады, мысалы синтаксистік және семантикалық ұқсастылық арқылы.

*Анықтама 3.4.1* [17, 34 б]*.* жиыны теориясындайонсондық деп аталады, егер келесі шарттарды қанағанттандырса:

1) - семантикалық моделінің анықталған ішкі жиыны, мұндағы - теориясының семантикалық моделі;

2) - семантикалық моделінің кейбір экзистенцианальды тұйық ішкі жиынының тасымалдаушысы, мұндағы - теориясының йонсондық жиынының анықталған тұйықтамасы.

*Анықтама 3.4.2* [17, б. 34]*.*Барлық -ның кез келген салдары йонсондық теорияның фрагментіне ие деп атаймыз, егер -ның дедуктивті тұйық салдарында йонсондық теория бар болса.

- бірінші ретті саналымды тіл және осы тілдің кейбір индуктивті теориясы болсын, сәйкесінше осы теорияның келесі кластары және арқылы белгіленеді: барлық экцистенциалды тұйық модельдер класы және барлық алгебралық жай модельдер класы.

*Анықтама 3.4.3*[17, б. 35]*.* индуктивті теориясы экзистенциалды - жай деп аталады, егер ол алгебралық жай модельге ие болса және , - теориясының алгебралық жай модельдердің жиыны.

*Анықтама 3.4.4* [17, б. 35]*.* теориясы дөңес деп аталады, егер  теориясының модельдері болатын оның кез келген моделі үшін және оның ішкі структурасының кез келген жиынтықтары үшін қиылысуы теориясының моделі болады. Сонымен қатар, бұл қиылысу құр емес болуы мүмкін. Егер бұл қиылысу ешқашан құр емес болса, онда ол теория қатты дөңес деп аталады.

Индуктивті теориясы экзистенциалды жай қатты дөңес деп аталады, егер ол жоғары да айтылған 3.4.4- ші анықтаманы бір уақытта қанағаттандыратын болса және келесі түрде белгіленеді .

Айтарлық, – теориясының йонсондық жиыны және - семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделі болсын, мұндағы . Онда болсын, - йонсондық жиынының йонсондық фрагменті болып табылады.

Айталық, және кейбір EPSC йонсондық теориясындағы семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиындары болсын. Мұндағы және - және йонсондық жиындарының фрагменті болып табылады.

[42] жұмыста кейбір байытылған EPPCJ теориясы аясында синтаксистік ұқсастықтың нәтижесі алынған. EPPCJ класы барлық йонсондық теорияның ішкі класы болып табылады. Енді біз йонсондық теория үшін байытылған түрде емес келесі нәтижені қарастырамыз.

Бұл параграфтың негізгі нәтижесіне қол жеткіземіз.

Айталық теориясы - толық кемел йонсондық теория және және сәйкесінше және жиындарының фрагменттері болсын, мұндағы және -  теориясындағы семантикалық модельдің йонсондық ішкі жиыны.

Егер берілген теориясы -толық кемел йонсондық теориялар болып табылса, онда оның фрагменттері кемел болмауы мүмкін. Сондықтан, келесі теореманы кемелділік фрагменттер үшін талап етеміз.

*Теорема 3.4.1* [17, б. 35]*.*  және фрагменттері - толық кемел йонсондық теория болып табылады. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) және фрагменттері - йонсондық теория үшін синтаксистік ұқсас болып табылады [7, р. 259-264];

2) және - толық теория үшін синтаксистік ұқсас болып табылады [7, р. 259-264], мұндағы және қарастырылып отырған және жиындарының фрагменттерінің центрлері болып табылады.

*Дәлелдеу.*Дәлелдеу үшінкелесі фактілерді қарастырамыз.

*Факт 3.4.1* [15, с. 48]. йонсондық теорияcының кез келген толық экзистенциалды сөйлемдері үшін келесі шарттар эквивалентті:

1) - кемел;

2) - модельді-толық.

*Факт 3.4.1*[34, б. 36]. йонсондық теорияcының кез келген толық экзистенциалды сөйлемдері үшін келесі шарттар эквивалентті:

1)  - модельді - толық.

2) әрбір үшін бульдік алгебра, мұндағы - бос айнымалымен экзистенциалды формулалар торы. және фрагменттерінің кемелділігі бойынша және - йонсондық теория екендігін ескереміз.

1)2) шығатындығын көрсетеміз. Біз, әрбір үшін – - ға изоморфты екендігін көрсетейік. Айтарлық бұл изоморфизм бойынша болсын. 3.4.1-ші теореманың шарты бойынша және 3.4.1-ші және 3.4.2-ші деректер әрбір үшін және -бульдік алгебралар болады. Бірақ кемелділік бойынша және - және 3.4.1-ші дерек бойынша модельді толық, сондықтан әрбір үшін, кез келген -дан алынған формуласы үшін 3.4.1 - ші дерек бойынша )-дан алынған формуласы табылады және . Бірақ, теориясы экзистенцианальды сөйлемдер үшін толық және ), (, болғандықтан), орындалады. теориясы экзистенциалды сөйлемдер үшін толық және ), ( болғандықтан), ) орындалады. Әрбір үшін, -дан алынған үшін келесі бейнелеулерді береміз және :, мұнда , . қасиеті бойынша және жоғары айтылғандар бойынша -биекция болады, яғни және арасындағы изоморфизм. Сәйкесінше және -синтаксистік ұқсас [16, p. 862].

2)1) көрсетейік. Әрбір үшін --ға изоморфты болғандықтан және теореманың шарты бойынша және 3.4.1-ші, 3.4.2-ші деректері бойынша бұл изоморфизм барлық ішкі алгебраларда жалғасады.

Йонсондық теориямен байланысты барлық анықталмаған анықтамаларды және ұғымдарды келесі [6, c. 144] жұмыстан табуға болады.

*Лемма 3.4.1* [17, б. 36]*.* Кез келген екі косемантты - йонсондық теориялар синтаксистік ұқсас болып табылады.

*Лемма 3.4.2* [17, б. 36]*.*Егер екі кемел -толық йонсондық теориялар - синтаксистік ұқсас болып табылса, онда олар -семантикалық ұқсас болып табылады.

*Анықтама 3.4.5* [7, p. 262]. Теориялардың (модельдер немесе модельдердің элементтері) қасиеті (немесе ұғымы) семантикалық деп аталады, сонда тек ғана сонда, ол семантикалық ұқсастыққа инвариантты қатынас болса. Полигондар анықтамасын еске түсірейік.

*Анықтама 3.4.6* [7, p. 262]. моноидының полигоны деп біз тек бір орынды функциясы бар структураны айтамыз яғни

1) , мұндағы моноидының бірлігі болып табылады.

2) , , .

Осы параграфтың негізгі нәтижесіне қарастырайық.

*Теорема 3.4.2* [17, 36 б]*.* Әрбір -толық кемел йонсондық теориясы үшін оның центрі модельді толық болатындай полигонда -толық кемел йонсондық теориясының синтаксистік ұқсастық табылады.

Бізге [7, p. 261] жұмыста белгілі болғандай, кез келген толық теория үшін келесі 3.3.1-ші сөйлемде ақиқат, сондықтан йонсондық теориялар аясында 3.3.1-ші сөйлемдегі қасиеттерді және йонсондық теориялардың ұқсастық ұғымын зерттейміз. Осы бөлімнің 3.3-ші параграфында 3.3.1-ші сөйлемді [7, p. 261] қолданамыз.

*Дәлелдеу.*Дәлелдеуі келесі жұмыстарға ие [43] және [7, p. 264].

Осыдан 3.3.1-ші сөйлемде көрсетілген барлық қасиеттер йонсондық теориялардың зерттеу аясында семантикалық болады. Дәлелдеуі тривиалды және 3.3.1-ші сөйлемнен алынған негізгі түсініктердің йонсондық сәйкестіктерін қолдана отырып, 3.3.1-ші сөйлемнен алынады.

**3.5 Йонсондық спектр кластарының ұқсастығы**

Модельдер теориясында бiрiншi реттi тiлдiң синтаксистiк және семантикалық қасиеттерiн, жалпы айтқанда, толық емес теорияларды зерттеу математикалық логиканың өзектi мәселелерiнiң бiрi болып табылады. Бұл параграфта бiз йонсондық теорияларды зерттеймiз, олар алгебрадаrы классикалық мысалдардың көп болуымен орын алады және жалпы айтқанда, толық емес. Йонсондық теорияларды зерттеудiң жаңа және өзектi әдiсi – бұл теорияларды синтаксистiк және семантикалық ұқсастық ұғымдары арқылы зерттеу. Ең инвариантты ұғым-теориялардың синтаксистiк ұқсастығы болып табылады, өйткенi ол қарастырылып отырған теориялардың барлық қасиеттерiн сақтайды. Бұл параграфтың негiзгi нәтижесi келесi факт болып табылады: кез келген толық экзистенциалды сөйлемдер кемел йонсондық теорияның, полигон теориясына синтаксистiк тұрғыдан ұқсас екендiгiн көрсету болып табылады (-полигон, мұндағы моноид). Бұл нәтиже кез келген сигнатураның кез келген моделiнiң йонсондық спектрiнен алынrан йонсондық теорияның сәйкес кластарына кеңейтiледi.

Йонсондық теорияларға қатысты қажетті анықтамалардың барлығы екінші бөлімдегі 2.4-ші параграфта анықталып, тұжырымдалған. Йонсондық теорияның кемелдік критерийін А.Р. Ешкеев [6, с. 158] жұмыстан келесі түрде көрсеткен:

*Теорема 3.5.1* [6, с. 158] Кез келген йонсондық теориясы үшін келесі шарттар өзара эквивалентті:

1. - кемел;
2. - модельді компаньон.

Төмендегі 3.5.1-3.5.3-ші анықтамалар йонсондық теорияның жалпыланған теориялары [18, с. 137] жұмысынан алынды.

*Анықтама 3.5.1* [18, с. 137]. Айталық болсын. Онда:

1) белгілеуі, дегенді білдіреді, барлық үшін;

2) егер болса, онда тілінің барлық Γ-сөйлемдерінің жиынын белгілейді, -да ақиқат, мұндағы *i < j < β*;

3) бейнелеуі -енгізу деп аталады, егер кез келген жәнеүшін және ;

4) егер болса, онда белгісі екенін білдіреді;

5) , модельдерінің тізбегі -тізбек деп аталады, егер болса, мұндағы .

*Анықтама 3.5.2* [18, с.138].

1) теориясы -тізбектерінің бірігуіне қатысты тұрақты (немесе -индуктивті), егер модельдерінің кез келген -тізбектерінің бірігуі қайта моделі болса.

2) теориясы -үйлесімді енгізу қасиетіне ие (-), егер кез келген үшін бар болса және -енгізулері және ;

3) теориясы α-амальгама қасиетіне (-) ие, егер кез келген және -енгізулер үшін және бар және -енгізулер және, сонымен қатар болатындай.

*Анықтама 3.5.3* [18, с. 138].теориясы -йонсондық теория деп аталады, егер:

1) теориясының шексіз моделі бар болса;

2) теориясы - индуктивті;

3) теориясы үйлесімді енгізу қасиетіне ие болса ( -);

4) теориясы амальгама қасиетіне ие болса(-).

2.4.1-ші және 3.5.3-ші анықтамаларын салыстырсаңыз, олардың дәлдікпен айырмашылығы бар екенін байқай аласыз. Сонымен қатар, 3.5.3 -ші анықтамада үшін йонсондық теориялары, ал үшін бізде толық йонсондық теориялары бар.

Әрі қарай, біз 0-йонсондық теорияларымен жұмыс жасағанда, біз 0-ді түсіреміз. 2.4.1-ші анықтамадан йонсондық теориялар, жалпы айтқанда, толық емес екендігін ескеруіміз керек.

Т.Ғ. Мұстафин келесі салдарды [18, c. 139] жұмыста дәлелдеді: 3.5.1-ші салдар және 3.5.2-ші салдар шын мәнінде бізге - және - ұғымдарының синтаксистік эквивалентті екендігін көрсетеді.

Сөйлем 3.5.1 [18, с. 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы - қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін α- қасиетіне ие;

3) егер, және - кез келген формулалар жиындары болса, сонымен қатар және үйлесімді болса, онда үйлесімді болады.

*Салдар 3.5.2*[18, с. 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы - қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін - қасиетіне ие;

3) егер және - формулалар жиыны болса, ,

үйлесімді жиындар, онда жиыны үйлесімді болады.

4) кез келген және , жиыны үшін ол мынаған сәйкес келетін бірегей максималды қамтиды, теориясы тілінің -сөйлемдерінің жиыны.

Екі толық теория арасындағы ұқсастық ұғымы [7, p. 259] жұмысында енгізілді. Йонсондық теориялар үшін екі йонсондық теория арасындағы ұқсастықты [15, c. 46] жұмысында енгізілген. Екі жұмыста да екі жағдайда да синтаксистік және семантикалық ұқсастықты сипаттайтын кейбір нәтижелер алынды.

*Сөйлем 3.5.3* [7, p. 261]. Егер және теориялар синтаксистік ұқсас болса, онда және семантикалық ұқсас, керісінше дұрыс емес.

Семантикалық қасиеттің анықтамасы және 3.5.4-шісөйлемі [7, p. 261] жұмысында көрсетілген. Сонымен қатар моноиды арқылы полигон анықтамасы [7, p. 263] жұмысында көрсетілген.

Келесі нәтижелер (3.5.2-ші, 3.5.3-ші теоремалар) кез келген толық теорияның кейбір синтаксистік ұқсас теориясы бар екенін көрсетеді.

*Теорема 3.5.2* [7, p. 264]. Шекті сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы дерлік болады.

*Теорема 3.5.3* [7, p. 263]. Шексіз сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы болады.

Әрі қарай йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы ұғымы осы бөлімнің 3.1-ші параграфында айтылған болатын және нақты алгебралық мысалдарды келтіру арқылы синтаксистік ұқсастықтың кейбір түрлері келтірілді. Осы мысалдарға байланысты профессор Б. Пуаза [11, с. 80] еңбегіндегі негізгі анықтамаларды келтірген.

Сонымен бізге ыңғайлы болу үшін келесі белгілеулерді енгіземіз. және толық теориялар үшін синтаксистік ұқсастықтары және тиісінше семантикалық ұқсастық деп белгіленеді

және йонсондық теорияларын қарастыратын болсақ, - және теорияларының йонсондық синтаксистік ұқсастығын, арқылы және теорияларының йонсондық семантикалық ұқсастығын белгілеп аламыз.

*Теорема 3.5.4*[6, с. 182]. және теориялары -толық кемел йонсондық теориялары болсын, онда келесі шарттар эквивалентті болады:

1) ;

2).

Келесі Лемма 3.5.3-ші сөйлемнің йонсондыққа аналогы болып табылады.

*Лемма 3.5.1* [19, p. 135]*.* Егер және теориялары, -толық кемел йонсондық теориялары синтаксистік жағынан ұқсас болса, онда олар йонсондық семантикалық жағынан ұқсас болады. Керісінше, жалпы айтқанда, дұрыс емес.

*Дәлелдеу.* 3.5.4 –ші теорема мен 3.5.3 – ші сөйлемнен шығады.

3.5.4 –ші сөйлемді дәлелдеу үшін келесі техникалық лемма қажет.

*Лемма 3.5.2* [19, p. 136]*.* Айталық T - ∃-толық теория және болсын. Сонда үйлесімді болса, онда де үйлесімді болады (– кез келген жиын ∃-формулалар).

*Дәлелдеу.* теориясын ∃ -толық болатынын көрсету оңай, өйткені .

*Cөйлем 3.5.5* [19, p. 136]*.* Айталық – кемел йонсондық теория болсын, онда әрбір сөйлем үшін - теориясы йонсондық болып табылады.

*Дәлелдеу.* Йонсондық теория анықтамасының барлық шарттарының орындалуын тексерейік. теориясы кемел йонсондық теория болғандықтан, йонсондық теория болып табылады. болғандықтан, онда теориясы - аксиоматизацияланатын және шексіз моделіне ие. 3.5.2 –ші леммадан және -синтаксистік анықтамасынан ( үшін 3.5.1- ші сөйлем) теориясы қасиетіне ие екенін байқау қиын емес.

Айталық 2.4.1-ші анықтаманың 4) шартының орындалуын тексерейік. Айталық , , үйлесімді болсын, мұндағы , , - үшін 3.5.2 ші сөйлемдегі сияқты болады. Жалпы айтқанда, деп есептей аламыз. Сонда алдыңғы лемма бойынша және үйлесімді болады. Айталық экзистенциалды сөйлем болсын үйлесімді екені анық. Айталық үйлесімді болсын. Қарама-қарсы жориық, айталық үйлесімсіз болсын, онда үйлесімсіз болатындай табылады делік. үйлесімсіз, онда және дегенді білдіреді. Демек. Сонымен қарама-қайшылық алдық. Осылайша үйлесімді. Сонымен , үйлесімді. теориясы йонсондық теория болғандықтан, үйлесімді болады, яғни -да үйлесімді дегенді білдіреді. Егер болса, онда үйлесімді болады. Сонымен амальгама қасиетіне ие болады. Осыдан - йонсондық теория екендігі шығады.

Келесі анықтама профессор Т.Г. Мұстафинге тиесілі.

*Анықтама 3.5.4.* йонсондық теориясына йонсондық теориясы () косемантикалы деп аталады, егер, мұндағы - семантикалық моделі, .

Бұл анықтама келесі леммадан шығады.

*Лемма 3.5.3* [19, p. 136]*.* Кез келген йонсондық екі косемантикалы теория семантикалық жағынан ұқсас.

Айталық, саналымды тілдің кез келген моделі болсын. жиыны осы тілдегі йонсондық теориясы және моделінің йонсондық спектрі деп аталады.

Теориялар жиынтығы бойынша косемантикалық қатынас эквиваленттік қатынас болып табылады. Сонда - моделіне қатысты модельдің йонсондық спектрінің факторлық жиыны .

Йонсондық спектрінің тұжырымдамасын А.Р. Ешкеев [26, p. 864] жұмыста енгізді. Бұл ұғым келесі мағынада пайдалы болып шықты: [44] жұмыста тұжырымдамасын пайдалана отырып, абельдік группалар мен R-модульдер үшін косемантикалық критерийлері алынды, олар абельдік группалар [45] және -модульдердің [46] элементар эквиваленттігі туралы белгілі теоремаларды нақтылайды.

Бұл параграфтың негізгі нәтижесі келесі теоремаға ие.

*Теорема 3.5.5* [19, p. 136]*.* Кез келген йонсондық кемел -толық теориясы үшін, орындалатындай полигон теориясында йонсондық ∃-толық теория табылады.

*Дәлелдеу.* Айталық теориясы кемел -толық йонсондық теория болсын. толық болғандықтан, шекті сигнатура жағдайындағы 3.5.2- ші теорема бойынша және шексіз сигнатура жағдайында 3.5.3-ші теорема бойынша толық болады, толық теорияның полигоны болады, сондай ақ . Бірақ, онда 3.5.3-ші cөйлемге сәйкес екендігі шығады.Тип ұғымы семантикалық ұғым болғандықтан (3.5.4-ші сөйлем), формула ұғымысемантикалық. болатын 3.5.1-ші және 3.5.2-ші сөйлемдерден және қасиеттері шығадыкейбір формулалардың дәйектілігіне эквивалентті, яғни және семантикалық ұғымдар. Семантикалық модельде барлық аксиомалар ақиқат болғандықтан, -аксиоматизациялану да семантикалық қасиет екені анық.

Бұл «йонсондық теория» қасиетінің семантикалық тұжырымдама екенін білдіреді, сондықтан да йонсондық теория болып табылады.

кемел йонсондық теория болғандықтан, T теориясының семантикалық моделі қаныққан болады. Бірақ және семантикалық үштіктің анықтамасы бойынша бұл теориялардың семантикалық үштіктері бір-біріне изоморфты болады, онда , сондықтан -да қаныққан, яғни кемел йонсондық теория болып табылады. Енді қарастырайық. теориясы кемел болғандықтан .

Айталық, болсын, яғни - йонсондық теория және . Біз ∆ - толық йонсондық теория екенін көрсетеміз. бойынша, онда толық теориялар үшін семантикалық ұқсастық анықтамасынан ∆-кемел йонсондық теория болатыны шығады. Егер ∆-толық болса, онда орнына ∆, содан кейін 3.5.4-ші теорема бойынша аламыз, бұдан болатыны шығады. Егер -∃-толық болмаса, онда бұл теория үшін келесі толықтыру процедурасын орындаймыз. ретінде, кез келген экзистенциалды сөйлем үшін , сигнатура тілінің және болатындай, бірақ , әрі қарай теориясын қарастырайық. , және , - йонсондық теориясы болғандықтан, 3.5.5-ші сөйлемнен йонсондық теория екендігі шығады. Егер -∃ толық болмаса, онда экзистенциалды сөйлемдерді қосу процедурасын ∆--позитивті йонсондық теориясы ∃-толық болғанша жалғастырамыз.

Айталық, болсын, ∆ теориясын толықтыру процедурасының нәтижесі болсын, яғни - -толық және сонымен бірге ∆ - йонсондық теориясы. Біз екенін көрсетеміз, демек ∆ теориясының жетілдірілуі осыдан шығады. Керісінше, болсын делік, онда бірақ бұл дұрыс емес және кез келген сөйлем үшін , . Демек, және . Біз қайшылықты аламыз, яғни ). Бірақ қаныққан, сондықтан, - кемел йонсондық теориясы. Сонда 3.5.4-ші теорема бойынша аламыз, мұндағы .

Әрі қарай синтаксистік және семантикалық ұқсастық ұғымдарын кез келген сигнатура моделдерінің спектрлеріне кеңейтеміз.

*Анықтама 3.5.5* [19, p. 137]*.* Айталық , , , болсын. Сонымен қатар класы йонсондық синтаксистік класына ұқсас және кез келген теория үшін  
болса, онда түрінде белгілейміз, сонымен қатар .

*Анықтама 3.5.6* [19, p. 137]*.* Таза үштігі - класы үшін йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы - кластың семантикалық моделі, - моделінің барлық автоморфизмдер группасы, - класының барлық экзистенциалды түрде тұйықталған модельдерінің изоморфты бейнелерінің класы.

*Анықтама 3.5.7* [19, p. 137]*.* Айталық , , , болсын. класын класына йонсондық семантикалық ұқсас деп айтамыз, егер олардың семантикалық үштігі таза үштіктер сияқты изоморфты болса және түрінде белгілейміз.

*Лемма 3.5.4* [19, p. 137]*.* Йонсондық спектрінің екі класының синтаксистік ұқсастығынан олардың семантикалық ұқсастығы шығады. Керісінше тұжырым дұрыс емес.

Дәлелдеуі:

*Лемма 3.5.5* [19, p. 137]*.* Айталық, , , , - -толық кластар болсын, онда

*Дәлелдеу.* Айталық, болсын, онда әрбір теория үшін болатындай табылады, мұндағы және кемел ∃-толық йонсондық теориялар. Онда 3.5.4-ші теорема бойынша . Бірақ және , сондықтан .

Керісінше, болсын, онда 3.5.4-ші теорема бойынша кез келген теория үшін теориясы табылады, осылайша , яғни .

Төмендегі теорема сигнатурадағы кез келген моделінің йонсондық спектр класы үшін 3.5.5 - ші теореманың жалпыламасы болып табылады.

*Теорема 3.5.6* [19, p. 138]*.* Айталық болсын, онда әрбір кемел ∃-толық класы үшін, класы табылады, мұндағы – полигон теориясының сигнатурасы болатындай кейбір моделінің ∃-толық йонсондық теориясы.

*Дәлелдеу.* Айталық болсын, онда кемел -толық класс болсын, онда 3.5.5-ші теорема бойынша әрбір теориясы үшін, болатындай йонсондық ∃-толық полигон теориясы табылады. Онда 3.5.4-ші теорема бойынша , бірақ болады, онда .

- йонсондық теориясының кейбір моделінің сигнатурасы, онда және . Бірақ болады. Демек, екендігін аламыз. 3.5.5-ші лемма бойынша екендігі шығады.

**3.6 Бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделінің анықталған тұйықтамасы**

Кейбір бекітілген йонсондық теориялардың семантикалық моделінің ішкі жиындарында форкинг қылмайтын қатынас анықталған, егер бұл ішкі жиындар йонсондық болса, онда осы ішкі жиындарда алгеометрияны анықтайтын тұйықталу операторының тұжырымдамасын пайдалана отырып, біз осы тұйықталу операторын сипаттайтын нәтиже ұсына аламыз.

Бұл параграфта бекітілген йонсондық теориялардың семантикалық моделінің анықталатын ішкі жиындарының айтарлықтай кең класын зерттеумен байланысты. Осы параграфта қарастырылған келесі қызықты және маңызды мәселе - қарастырылып отырған семантикалық модельдің булеанындағы кейбір алгеометрияны анықтайтын тұйықталу операторының көмегімен семантикалық модельдің анықталатын ішкі жиындарын сипаттау идеясы.

Т.Г.Мұстафин толық теорияларды зерттеу аясында стабильді толық теорияның айтарлықтай үлкен моделінің ішкі жиындарында берілген кейбір тұйықталу операторының көмегімен таза қосар және семантикалық үштік ұғымын ұсынды. Т.Г.Мұстафин қарастырылып отырған толық стабильді теорияның монстр-моделінің арнайы ішкі жиындарында берілген тұйықталу операторының қасиеттерін сипаттайтын теоремалар алды, осы орайда осы оператордың қасиеттерін сипаттау семантикалық үштіктің элементтерінің бірімен, атап айтқанда берілген монстр-модельдің автоморфизмдер группасымен тығыз байланысты болды.

А.Р. Ешкеев жалпы айтқанда, бекітілген йонсондық теорияның толық емес йонсондық стабилділігін зерттеу аясында Т.Г. Мұстафиннің көзқарасын жүзеге асыру бойынша нәтижелерге қол жеткізді [6, с. 180]. Сондай-ақ, йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарын анықтау кезінде А.Р. Ешкеев йонсондық теориялар мен олардың семантикалық модельдері үшін таза қосар және семантикалық үштік ұғымдарын қайта анықтағанын атап өткен жөн [6, с. 181].

Толық теорияның анықталатын ішкі жиындарын зерттеу кезінде, әдетте, осы толық теорияның бекітілген модельдерінің осы формулалық ішкі жиындарын қанағаттандыратын кейбір аксиомалар беріледі. Біздің жағдайда біз бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің анықталатын ішкі жиындарының ерекше жағдайы үшін де солай жасаймыз. Атап айтқанда, бұл аксиомалар Морлидің рангінің функциясын оның «йонсондық» интерпретацияда, яғни міндетті түрде элементарлы емес тиісті мономорфизмдерде тек экзистенциалды тұйық кеңейтілімінде қарастырылатын жағдайларда анықтау мүмкіндігін алдын ала белгілейді.

Йонсондық теорияларға қатысты қажетті анықтамалар мен нәтижелерді осы бөлімнің 3.1-ші параграфта атап өттік.

Сонымен, йонсондық теорияның анықтамасы бойынша йонсондық теория, жалпы айтқанда, толық емес, яғни оның модельдерінің класы шексіз де, ақырлы модельдерді де қамтуы мүмкін, және қасиеттерінің анықтамасында элементарлы мономорфизмдер емес, изоморфты енгізуді қарастырады. Йонсондық теорияларды қанағаттандыратын классикалық алгебрадан көптеген мысалдар бар. Оларға группалар теориясы, Абельдік группалар теориясы, сақиналар, бекітілген сипаттаманың өрістері, Буль алгебралар, сызықтық реттер, векторлық кеңістіктер, бекітілген сақина аясындағы модульдер және т.б.

*Теорема 3.6.1* [6, с. 171]. Т йонсондық теориясы кемел сонда тек ғана сонда егер Т теориясының - модельді компаньоны бар болса.

Кез келген теорияның маңызды сипаттамасы стабильді болып табылады. Толық теориялар үшін стабильділік ұғымын 1969 жылы С. Шелах енгізді. Йонсондық теория аясында стабильділік ұғымын А.Р. Ешкеев [6, с. 201] жұмыста анықтады. Бұл ұғымның анықтамасын еске түсірейік.

Айталық Т- йонсондық теория болсын, – әрбір ақырлы үшін Т теориясымен үйлесімді болатын - тегі барлық экзистенциалды толық -типтерінің жиынын белгілейміз.

*Анықтама 3.6.1* [6, с. 201]. - йонсондық теориясы - стабильді деп аталады егер кез келген экзистенциалды тұйық моделінің теориясы үшін, болатындай А жиынының кез келген ішкі жиынынан болатындығы шығады.- йонсондық теориясы -стабильді деп аталады, егер кейбір үшін - стабильді болса.

Стабильділіктің классикалық ұғымымен стабильділіктің жоғарыда көрсетілген мағынасымен үйлесетіндігінің нәтижесі [6, с. 201] жұмыста алынды.

*Теорема 3.6.2* [6, с. 201]. Айталық Т теориясы -сөйлемдер үшін толық кемел йонсондық теория болсын, . Онда келесі шарттар эквивалентті болады:

1. Т теориясы - стабильді;
2. теориясы стабильді, мұндағы - йонсондық теорияның центрі.

Йонсондық теорияларды зерттеу аясында [47] жұмыста -алгеометрия (алғашқы геометрия) ұғымы енгізілді.

Айталық Т теориясы кейбір бекітілген йонсондық теория, , - X жиынының Буль жиыны және бейнелеуі жиынында кейбір тұйықталу операторы болсын. қосары -алгеометриясы (алғашқы геометрия) деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

1. егер болса, онда және ;
2. егер болса, онда ;
3. (ауыстыру принципі), және , онда .
4. егер және , онда орындалатындай ақырлы жиын табылады (ақырлы).

Әрі қарай кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің ішкі жиынында алгеометрияны анықтайтын cl операторын анықталатын түйықталған операторына алгебралық тұйықталу операторы тең деп есептейміз, яғни .

*Анықтама 3.6.2* [48]: йонсондық теориясының жиыны деп егер ол келесі қасиеттерді қанағаттандырса:

1. - семантикалық моделінің анықталған ішкі жиыны;
2. - ішкі моделінің кейбір экзистенциалды тұйық тасымалдаушысы бар.

Әрі қарай, жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, йонсондық ішкі жиындардардың йонсондық формульді Морли рангын сақтау үшін қосымша аксиомаларды жазамыз және бұл аксиомалар жүйесін (\*) арқылы белгілейміз. Йонсондық теориялардың йонсондық стабильділік эквиваленттілігі және кемел -толық теориясы үшін оның центріне сәйкес стабильділік нәтижесіне байланысты [49] және бұл аксиомалар осы мәтінде бекітілген йонсондық теорияның қарастырылған формулаларының Морли рангының модельді-теоретикалық қасиеттерінің шекараларын сақтап ғана қоймайды, сонымен қатар қарастырылып отырған теорияның семантикалық моделінің йонсондық булеаны бойынша алгеометрияны (алғашқы геометрияны) анықтайтын тұйықталу операторымен байланысты болады.

Сонымен қатар, экзистенциалды формула болып табылады, осы формуланың күшіне сәйкес, семантикалық модельдің өзі булеан болып табылатынын байқаймыз. Осы параграфтың негізгі нәтижесі енгізілген аксиоматиканың дұрыстығы және ішкі жиындарға қатысты тұйықталуын пайдаланылады.

Айталық кейбір йонсондық теория болсын, арқылы семантикалық моделінің барлық йонсондық ішкі жиындарын белгілейміз, , мұндағы –индексті жиын. Онда болады. семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиынының жиынтық ұғымын енгіземіз, арқылы семантикалық моделінің барлық анықталған йонсондық ішкі жиындардың жиынын белгілейміз, формулаларды анықтау ұзындығы -ге тең, мұндағы , , жиынында анықталатын формула ұзындығы -ге тең екендігін білдіреді.

Айталық - йонсондық ішкі жиынындағы келесі қасиеттерге ие болатын ең кіші жиынтық болсын:

1. болатындай әрбір үшін екендігі шығады;
2. -ақырлы Буль комбинацияларына қатысты тұйықталған, яғни қосындыларынің ішінен, , , екендігі шығады;
3. жиыны декарттық көбейтіндіге қатысты тұйықталған, яғни қосындыларынан ішінен екендігі шығады;
4. жиыны проекцияға қатысты тұйықталған, егер , , - йонсондық жиынының -ға проекциясы, онда болады.
5. жиыны специализацияға қатысты тұйықталған, егер , және , онда болады.
6. жиыны координаталарды ауыстыру кезінде тұйықталған, яғни егер , , ал - ауыстыру жиыны, онда

.

Форкинг ұғымы аксиоматикалық түрде берілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің йонсондық ішкі жиындарын зерттеу аясында және C. Шелах бойынша форкингтің эквиваленттілігі дәлелденген және кейбір йонсондық теорияның семантикалық моделінің ішкі жиындарының аясында экзистенциалды типтер үшін аксиоматикалық түрде форкингтің берілгені [6, с. 208] жұмыста көрсетілген.

Айталық - кейбір йонсондық теорияның - қаныққан семантикалық моделінің барлық йонсондық ішкі жиындарының класы, -барлық экзистенциалды типтердің класы болсын (толық болу міндетті емес). Айталық кейбір бинарлы қатынас болсын.

(йонсондық форкинг қылмайтын) үшін қойылған кейбір шарттарды аксиома ретінде жазайық:

Аксиома 1: Егер және изоморфты енгізу болса, онда .

Аксиома 2: Егер және болса, онда .

Аксиома 3: Егер және болса, онда сонда тек ғана сонда .

Аксиома 4: Егер , және болса, онда және орындалатындай табылады.

Аксиома 5: кардиналы табылады, егер және және болса, онда .

Аксиома 6: үшін кардиналы табылып және әрбір үшін егер болса, онда және болатындай, табылады.

Аксиома 7: Егер болса, онда болады.

*Теорема 3.6.1* [6, с. 210]. Айталық Т теориясы - сөйлемдері үшін кемел толық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1. Т теориясына қатысты қатынасы 1-ден 7-ге дейінгі аксиомаларды қанағаттандырады.
2. теориясы стабильді және кез келген , , қосары -ның аясында форкинг қылмайды (С. Шелахтың классикалық мағынасында [50]).

Әрі қарай, жазбасы екендігін білдіреді. Егер , онда түрінде жазамыз.

Тұйықталу операторына рұқсат беретін толық теориялардың кейбір қасиеттері [3, с. 51] жұмысында қарастырылды. Бұл параграфта Морли рангінің модельді-теоретикалық қасиеттеріне қатысты қосымша қарастырылған аксиоматикалық (\*) жүйе сияқты йонсондық теорияларды зерттеу аясында тұйықталу операторының кейбір қасиеттерін және берілген аксиоматиканы қанағаттандыратын және қарастырылып отырған семантикалық модельдің булеан мәніндегі алғашқы геометрияны анықтайтын тұйықталу операторының қасиеттерін қанағаттандыратын йонсондық ішкі жиындарының анықтамасының дұрыстығы қарастырылады.

толық теориясы тұйықталу операторына рұқсат береді дейміз, егер монстр моделінде теориясы тұйықталу операторына рұқсат береді әрбір және үшін орындалатынынын еске түсірейік [3, c. 51].

3.6.4-ші теореманың дәлелдеуі үшін [3, с. 52] жұмыстағы келесі техникалық лемма қажет болады.

*Лемма 3.6.1* [3, с. 52]. Айталық - толық теориясына рұқсат беретін кейбір тұйықталу операторы болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1. егер , онда ;
2. кез келген үшін ;
3. кез келген үшін .

Төмендегі анықтама А.Р. Ешкеевке тиесілі, ол жалпы толық емес теория үшін тұйықталу операторын анықтайды және йонсондық теория болып табылатындықтан әмбебап алгебраларда қолдану үшін кең мағынада қолданылуы мүмкін.

Айталық йонсондық теория, -(\*) аксиоматикасын қанағаттандыратын семантикалық модель болсын.

*Анықтама 3.6.3.* теориясын тұйықталу операторымен йонсондық теория дейміз, егер және үшін орындалса.

Айталық теориясын тұйықталу операторымен йонсондық теория болсын, -йонсондық жиын және , мұндағы -Т теориясының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы. Егер болса, онда - элементтерінен тізбегі алынған және табылады, cонымен үшін , , немесе орындалады. Бұл жағдайда n ұзындығының және арасындағы сыртындағы жолмен тізбегін атаймыз.

операторына қатысты кейбір шарттарды қарастырайық.

Аксиома 1. Егер , онда , .

Аксиома 2. Егер және , элементтерінен алынған , кортеждері, , онда .

Әрі қарай, тұйықталу операторының орнына, біз acl алгебралық тұйықталу операторын қоямыз, ол да бір уақытта анықталатын оператор болып табылады.

стабильді толық теориялар берілген теорияның кез келген типі (тиісінше, кез келген формула) кейбір Морли рангісіне ие болуымен сипатталатыны белгілі факт, яғни Морли рангі бойынша бағаланады. Біріншіден, - стабильділігі жалпы жағдайда -стабильділігімен сәйкес келмейді және қарастырылып отырған йонсондық теорияның центрінде -стабильділік шарты келесі 3.6.4-ші және 3.6.5-ші теоремалардың мәтінінде қарастырылмайды. Бірақ сонымен қатар, осы параграфтың басында біз аксиоматиканы (\*) анықтадық, ол анықталатын йонсондық ішкі жиындардың Морли рангіне сәйкес келеді. Сондықтан, 3.6.4-ші және 3.6.5-ші теоремаларындағы аксиоматика (\*) қарастырылып отырған тұйықталу операторы қарастырылатын семантикалық модельдің Морли рангіндегі ішкі жиындарына қатысты деген болжаммен қабылданады. Сондай-ақ, теориясының кемелдігіне байланысты семантикалық модель қуатында қаныққан болып табылады және кемел йонсондық теорияның центріне қатысты формулалық ішкі жиындардың рангі болуы жеткілікті екенін ескереміз.

*Теорема 3.6.4* [21, c. 229]*.*Айталық теориясы -сөйлемдері үшін тұйықталу операторымен толық кемел, - стабильді йонсондық теория болсын. аксиоматиканы (\*) қанағаттандыратын семантикалық модель болсын. Егер -1,2 аксиомаларын қанағаттандырса және барлық үшін орындалады.

*Дәлелдеу.* Сонымен шарт бойынша йонсондық теориясы - толық болады, онда барлық типтері толық болып табылады, яғни моделінде барлығы ақиқат. Бірақ семантикалық моделі экзистенциалды тұйық модель, сондықтан барлық типтері және М-де ақиқат. Әрі қарай болғандықтан, онда центрі үшін 1-ші лемма дұрыс, сондықтан теорияның кез келген экзистенциалды тұйық моделі үшін, кемел йонсондық теориясы бар. жазбасын қосу 1-ші леммадан шығады. Айталық – М сыртындағы – жол, яғни немесе болсын.

жолы бойынша ұзындығының индукция бойынша кері қосуды дәлелдейміз. Кез келген жағдайда теориясында болады. 3.6.2-ші теорема бойынша теориясы классикалық мағынада стабильді болып табылады. Онда 3.6.3-ші теорема бойынша –форкингтің йонсондық мағынасыда аламыз. Осыдан тұйықталу операторымен теориясымен және 2-ші аксиома бойынша екендігін аламыз. Айталық енді ұзындығының және арасындағы сыртындағы жолмен тізбегі болсын. Индукция бойынша және аламыз. Онда , яғни .

*Теорема 3.6.5* [21, c. 229]*.*Айталық теориясы -сөйлемдері үшін тұйықталу операторымен толық кемел, - стабильді йонсондық теория болсын. аксиоматиканы (\*) қанағаттандыратын семантикалық модель болсын. тұйықталу операторы бар сөйлемдер болсын, – тұйықталу операторы 1,2 –ші аксиомаларды қанағаттандырады , , онда:

1. ;
2. .

*Дәлелдеу.* 1) Айталық ) болсын. - формулаға қатысты N-нің элементарлы ішкі моделі болып табылмайды, яғни -N-нің экзистенциалды тұйық ішкі моделі болмайды. Онда  *э*лементі табылуы керек, орындалатындай экзистенциалды формула және және болады, бірақ барлық үшін . Осыдан теориясында және болады. 3.6.2-ші теорема бойынша теориясы классикалық мағынада стабильді болып табылады. Онда 3.6.3-ші теорема бойынша –форкингтің йонсондық мағынасыда аламыз. Сонымен , онда болады. Сонымен . 1-ші аксиома бойынша , ал 2-ші аксиома бойынша – форкингтің йонсондық мағынасы бойынша аламыз. Қарама-қайшылық алдық. 2) Айталық орындалатындай, , болсын. 1-ші пунктті қолдану арқылы индукция бойынша екендігін аламыз. Сонымен теорема дәлелденді.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Бұл диссертациялық жұмыста толық емес теорияларды зерттеу қарастырылды. «Йонсондық теориялардың ұқсастығы» тақырыбындағы диссертациялық жұмыс модельдер теориясындағы өзекті тақырыптардың бірі болып саналады. Модельдер теориясы қазіргі таңда математика ғылымының бір бөлімі болып есептелінеді. Йонсондық теориялардың ұқсастығын зерттеу өзекті ғылыми сұрақ болып табылады.

Диссертациялық жұмыста йонсондық теориямен байланысты негізгі ұғымдар қамтылған. Осы ұғымдарға амальгама мен үйлесімді енгізу қасиеті, экзистенциалды тұйық модельдер, йонсондық жиындар, йонсондық теориялардың косеманттылығы, толық және йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары, йонсондық спектр жатады.

Диссертациялық жұмыс өзара тығыз байланысқан үш тараудан тұрады. Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімінде модельдер теориясының негізгі ұғымдары қарастырылған, екінші бөлімде йонсондық теориялар мен толық теориялар аясында зерттелетін модельдер теориясының қажетті мағлұматтары көрсетілген. Диссертациялық жұмыстың үшінші бөлімінде йонсондық теориялардың ұқсастығы тақырыбындағы негізгі нәтижелер көрсетілді, атап айтсақ йонсондық спектірлерінің кластарының ұқсастықтары қарастырылған. Әр параграфта, сәйкесінше йонсондық теориялардың семантикалық және синтаксистік ұқсастығының байланысы, кейбір йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастығы және олардың рұқсаттылылықпен байланысы, йонсондық спектрлердің кластарының ұқсастықтарының негізгі тұжырымдары мен дәлелдемелері және бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі моделінің анықталған тұйықтамасының нәтжелері алынды.

Диссертациялық жұмыста алынған барлық нәтижелер мен тұжырымдар өзінің мазмұны, модельді-теоретикалық қасиеті бойынша модельдер теориясында маңызды рөл атқарады.

Байытылған сигнатурадағы - теориялардың ұқсастығын [33, p. 54-57] жұмыстан, өзара модельді-үйлесімді фрагменттердің центрлік типтерінің алгебрасы [51] жұмысында, йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастықтың рұқсаттылықпен байланысын [52], йонсондық жиындардың анықталған тұйықталуы және олардың ұқсастығы [53, 54], гибридтерінің синтаксистік және семантикалық ұқсастығын [55] жұмыстан табуға болады, мұралы теориялардың центрлік типтерінің ұқсастығын [56] жұмыста көрсетілген.

Сонымен, диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелерін қорытындылай келе, йонсондық теориялардың ұқсастығының өзектілігі мен ғылыми жағынан күрделілігі және қойылған сұрақтың маңыздылығын ескере отырып, модельдер теориясының әрі қарай дамуына жоғарыда алынған нәтижелер ықпал етуі мүмкін деп қорытынды жасауға болады.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Кейслер Х.Дж., Чэн Ч.Ч. Теория моделей / пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 667 с.
2. Мустафин Т.Г. Стабильные теории. – Караганда: Изд. КарГУ, 1981. – 93 с.
3. Мустафин Т.Г., Нурмаганбетов Т.А. Введение в прикладную теорию моделей. – Караганда: Изд. КарГУ, 1987. – 95 c.
4. Мустафин Т.Г. Число моделей теорий. – Караганда: Изд. КарГУ, 1983. – 104 с
5. Ешкеев А.Р. Совершенные йонсоновские теории // Матер. 3-й междунар. конф. по алгебре. – Красноярск, 1983. – С. 249.
6. Ешкеев А.Р., Касыметова M.T. Йонсоновские теории и их классы моделей. – Караганда: Изд-во Караганд. гос. ун-та, 2016. – 370 с.
7. Mustafin T.G. On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90: proceed. of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. – Helsinki, 1990. – P. 259-265.
8. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей / пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 191 с.
9. Ешкеев А.Р., Шаматаева Н.К. Кемел йонсондық теорияларды зерттеу тәсілдері: монография. – Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2016. – 395 б.
10. Mustafin Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson // The Journal of Symbolic Logic. – 2002. – Vol. 67, Issue 2. – P. 528-536.
11. Poizat B. A Course in Model Theory. – NY.: Springer, 2000. – 445 p.
12. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра / пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 400 с.
13. Ешкеев А.Р., Уркен Г.А. Синтаксическое подобие некоторых йонсоновских теорий и их связь с допустимостью // Современная математика: проблемы и приложения: сб. тр. 2-х междунар. науч. Таймановских Чтений, посв. 100-лет. А.Д. Тайманова. – Кызылорда, 2017. - С. 125-130.
14. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. Connection of Jonsson theory with some Jonsson polygons theories // Вестник Карагандинского университета. – 2018. – №3(95). – С. 74-78.
15. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории: учеб. пос. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250 с.
16. Мустафин Т.Г., Нурхайдаров Е.С. Описание йонсоновских теорий полигонов над группой // Исследования в теории алгебраических систем: cб. науч. тр. (межвуз.). – Караганда:Изд-во КарГУ, 1995. – C. 67-73.
17. Ешкеев А.Р, Уркен Г.А. Йонсондық теориялардың ұқсастылық ұғымның кейбір қасиеттері // Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті хабаршысы. – 2018. – №4(64). – Б. 32-37.
18. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические тр. – 1998. – Т. 1, №2. – С. 135-197.
19. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Urken G.A. Similarities of Jonsson spectra’s classes // Bulletin of the Karaganda University. – 2023. – Vol. 4, Issue 112. –P. 130-143.
20. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. Similarity of classes from Jonsson spectrum // Procced. the 16th Asian logic conf., 14th internat. conf. on Computability and Randomness. – Nur-Sultan, 2019. – P. 44-45.
21. Ульбрихт О.И., Уркен Г.А. Об определимом замыкании экзистенциально замкнутой подмодели семантической модели фиксированной йонсоновской теории // Матер. традиц. междунар. апрельс. матем. конф. в честь Дня работников науки Республики Казахстан. – Алматы, 2024. – С. 229-230.
22. Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум- гипотезы с аксиомами теории множеств // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3, №1(23). – С. 96-149.
23. Бурбаки Н. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 469 с.
24. Eшкеев A.Р., Оспанов Р.M. Cвязь йонсоновских теорий с теоремой Линдстрема // Сб. tр. 5-го Казахско-Французского коллоквиума по теории моделей. – Караганда: Издаделство КарГУ, 2001. – C. 65-75.
25. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические тр. – 1998. – Т. 1, №2. – С. 135-197.
26. Yeshkeyev A.R, Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. – Vol. 13. – P. 861-874.
27. Yeshkeyev A.R. Strongly minimal Jonsson sets and their properties // Bulletin of the Karaganda University. – 2015. – Vol. 80, Issue 4. – P. 47-51.
28. Poizat B., Yeshkeyev A.R. Positive Jonsson Theories // Logica Universalis. – 2018. – Vol. 12, Issue 1-2. – P. 101-127.
29. Yeshkeyev A.R., Kasymetova M.T. Properties of lattices of the existential formulas of Jonsson fragments // Bulletin of the Karaganda University. – 2015. – Vol. 79, Issue 3. – P. 25-32.
30. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I. On lattice of existential formulas for fragment of Jonsson set // Bulletin of the Karaganda University. – 2015. – Vol. 79, №3. – P. 33-39.
31. Ешкеев А.Р. О подобиях в йонсоновских теориях // Матер. 10-й межвуз. конф. по математике и механике. – Алматы, 2005. – Т. 1. – С. 182-184.
32. Ешкеев А.Р. Подобие теорий предметных областей // Знания -Онтологии - Теории: (ЗОНТ-09) ИМ СО РАН: матер. всерос. конф. – Новосибирск, 2009. – С. 207-212.
33. Yeshkeyev A.R. On similarities of - theories in enriched signature // Bulletin of the Karaganda University. – 2011. – Vol. 62, Issue 4. – P. 54-57.
34. Гоулд В., Михалев А.В., Палютин Е.А. и др. Теоретико-модельные свойства свободных, проективных и плоских *S*-полигонов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – Т. 14, №7. – С. 63-110.
35. Михалев А.В., Овчинникова Е.В., Палютин Е.А. и др. Теоретико-модельные свойства регулярных полигонов // Фундамент. и прикл. матем. –2004. – Т. 10, №4. – C. 107-157.
36. Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарная эквивалентность моноидов эндоморфизмов свободных полигонов // Чебышевский сб. – 2005. – Т. 6, №4. – С. 49-63.
37. Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарные свойства категории полигонов над моноидом // Aлгебра и логика. – 2006. – Т. 45, №6. – С. 687-709.
38. Справочная книга по математической логике: в 4 ч. / под ред. Дж. Барвайса; пер. с англ. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 392 с.
39. Овчинникова Е.В. Не линейно упорядоченный моноид, над которым класс регулярных полигонов полон, но не модельно полон // Алгебра и теория моделей. 3: сб. тр. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2001. – С. 83-98.
40. Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 166, Issue 5. – P. 646-654.
41. Yeshkeyev A. R. The structure of lattices of positive existential formulae of (- -theories // Scienceasia. – 2013. – Vol. 39. – P. 19-24.
42. Yeshkeyev A.R. The properties of central types with respect to enrichment by Jonsson set // Вестник Карагандинского университета. – 2017. – №1(85). – С. 36-40.
43. Yeshkeyev A.R. The Properties of Positive Jonsson’s Theories and Their Models // International Journal of Mathematics and Computation. – 2014. – Vol. 22, Issue 1. – P. 161-171.
44. Ешкеев А.Р., УльбрихтО.И. *JSp*-косемантичность *R*-модулей // Сибирские электронные математические Изв. – 2019. – №16. – С. 1233-1244.
45. Szmielew W. Elementary properties of Abelian groups // Fundamenta Mathematica. – 1955. – Vol. 41. – P. 203-271.
46. Ziegler M. Model theory of modules // Annals of Pure and Applied Logic. – 1984. – Vol. 26. – P. 149-213.
47. Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I. Independence and simplicity in Jonsson theories with abstract geometry // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol. 18, Issue 1. – P. 433-455.
48. Yeshkeyev A.R. Model-theoretic properties of Jonsson fragments // Bulletin of the Karaganda University. – 2014. – Vol. 4, Issue 76. – P. 37-41.
49. Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 166, Issue 5. – P. 646-654.
50. Shelah S. Classification theory: and the number of non-isomorphic models. – Amsterdam, 1990. – Vol. 92. – 740 p.
51. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. An algebra of the central types of the mutually model-consistent fragments // Bulletin of the Karaganda University. – 2021. – Vol. 1, Issue 101. – P. 111-118.
52. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. The admissibility and similarity of Jonsson theories // Вестник Карагандинского университета. – 2018. – №1(89). – С. 42-48.
53. Ешкеев А.Р., Уркен Г.А. Определимые замыкания йонсоновских множеств и их подобие // Известия Международного казахско-турецкого университета Ч.А. Ясави. – 2018. – Т. 2, №1(4). – С. 186-190.
54. Urken G.A. Syntactic similarity of definable closures of Jonsson sets // Вестник Карагандинского университета. – 2018. – №2(90). – С. 119-123.
55. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M., Urken G.A. Syntactic and semantic similarity of hybrids // Матер. традиц. Междунар. апрельс. матем. конф. в честь Дня работников науки Республики Казахстан Workshop «Problems of modelling progress in electrical contacts», посв. 80-лет. юб. С.Н. Харина. – Алматы, 2019. – С. 24-25.
56. Ешкеев А.Р., Уркен Г.А., Омарова М.Т. Подобия центральных типов наследственных теорий // Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры (EMJ - 2019): сб. тез. междунар. конф., посв. 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». – Нур-Султан, 2019. – С. 174.