Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова

УДК 510.67 На правах рукописи

**ТУНГУШБАЕВА ИНДИРА ОРАЗБЕКОВНА**

**Теоретико-модельные свойства алгебр,**

**теории который являются йонсоновскими**

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор

Ешкеев А.Р.

Зарубежный научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор

Судоплатов С.В.

Республика Казахстан

Караганда, 2024

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ 3](#_Toc183424106)

[Введение 4](#_Toc183424107)

[1 Необходимые элементы из курса алгебры и связанной с ними теории моделей 15](#_Toc183424108)

[1.1 Элементы теории колец и полей 15](#_Toc183424109)

[1.2 Основные понятия как «западного», так и «восточного» направлений классической теории моделей 19](#_Toc183424110)

[1.3 Теоретико-модельный подход в исследовании свойств дифференциальных алгебр 25](#_Toc183424111)

[1.4 Дифференциальные кольца и дифференциальные поля 28](#_Toc183424112)

[1.5 Дифференциальное замыкание дифференциального поля 35](#_Toc183424113)

[2 Йонсоновские теории 40](#_Toc183424114)

[2.1 Йонсоновские теории 40](#_Toc183424115)

[2.2 Примеры йонсоновских и нейонсоновских теорий, обеспеченные обогащением сигнатуры теории полей функциональным символом дифференциала 47](#_Toc183424116)

[2.3 AP-теории, JEP-теории, AJ-теории как частные случаи йонсоновских теорий 51](#_Toc183424117)

[2.4 Некоторые свойства косемантичных йонсоновских теорий 55](#_Toc183424118)

[2.5 О некоторых типах алгебр, задаваемых на структуре йонсоновского спектра 60](#_Toc183424119)

[2.6 О сравнении классов косемантичности в йонсоновском спектре 65](#_Toc183424120)

[Заключение 74](#_Toc183424121)

[СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 77](#_Toc183424122)

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

|  |  |
| --- | --- |
|  | – сигнатура |
|  | – язык сигнатуры |
|  | – множество универсальных формул языка |
|  | – множество экзистенциальных формул языка |
|  | – теория языка |
|  | – класс моделей теории |
|  | – элементарная теория структуры |
|  | – оболочка Кайзера класса |
|  | – является моделью теории |
|  | – каждая структура класса является моделью теории |
|  | – класс экзистенциально замкнутых моделей теории |
|  | – дедуктивное замыкание теории |
|  | – теория дифференциальных полей характеристики 0 |
|  | – теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0 |
|  | – теория дифференциальных полей характеристики |
|  | – теория дифференциально совершенных полей характеристики |
|  | – теория дифференциально замкнутых полей характеристики |
|  | *–* подполе констант дифференциального поля |
|  | – теория алгебраически замкнутых полей характеристики |
|  | – теория алгебраически замкнутых полей характеристики |
|  | – семантическая модель йонсоновской теории |
| AP | – свойство амальгамирования (Amalgamation Property) |
| JEP | – свойство совместного вложения (Joint Embedding Property) |
|  | – отношение косемантичности |
|  | – йонсоновский спектр класса структур языка |
|  | – робинсоновский спектр класса структур языка |
|  | – класс косемантичности теории |
| □ | – доказательство завершено |

Введение

**Общее описание работы.**

Данная диссертационная работа представлена как результат научного исследования, относящегося к одному из современных направлений фундаментальной математики – теории моделей. Теория моделей – раздел математики, возникший в результате комбинирования методов абстрактной алгебры, универсальной алгебры, математической логики, алгебраической геометрии и топологии. Основными предметами исследования теории моделей служат формальные языки и их модели. Название «теория моделей», или «theory of models», было предложено в 1954 году выдающимся польско-американским математиком Альфредом Тарским, занимавшимся математической логикой и формальной теорией истинности. Позже в англоязычной среде устоялось название «Model Theory».

Основной задачей теории моделей является описание фундаментальных взаимосвязей между синтаксисом и семантикой рассматриваемого формального языка (в нашем случае это язык первого порядка исчисления предикатов), что как раз говорит о формировании данной дисциплины как направлении, возникшем на стыке алгебры и логики. При этом, говоря о синтаксисе, мы подразумеваем логические свойства языка, а к семантике относим интерпретации данного языка, которые мы называем моделями, причём по устоявшейся практике под структурой подразумевается модель сигнатуры или языка.

На самом деле, проблемы синтаксиса и семантики существовали задолго до становления теории моделей как самостоятельного математического направления, однако не рассматривались в контексте их общности и взаимосвязи. Показательным примером здесь служит пятый постулат евклидовой геометрии о параллельности прямых, доказать который на протяжении долгого времени не представлялось возможным, что вовсе не являлось случайностью или математической неудачей: в XIX веке Н.И. Лобачевским и Я. Бойяи было показано существование другого типа геометрии, реализующего отрицание того самого постулата. Так, неевклидова геометрия, с точки зрения теории моделей, была представлена как модель новой системы аксиом, являющейся непротиворечивым множеством предложений и, соответственно, допускающим реализацию в виде геометрической структуры.

Другим величайшим математическим достижением математической логики стала теорема Курта Гёделя о неполноте арифметики, на основе которой пришло понимание того факта, что в рамках фиксированного языка и соответствующей его модели, вообще говоря, невозможно получить описание в виде выводимых формул определённых теорем или их отрицаний, что говорит о феномене самонедостаточности любой области математики относительно доказательства её непротиворечивости. В силу этой теоремы стало понятно, что в некоторых случаях требуется переход в более расширенный язык (или мета-язык), который позволит показать непротиворечивость того или иного описания рассматриваемых объектов в первоначальной версии языка. С одной стороны, это строго математический результат, который поставил отрицательную точку (в том смысле, что это неверно) в спорной гипотезе Давида Гилберта о формализации всей математики, а с другой стороны эта теорема по своему философскому значению не уступает знаменитому открытию физика Альберта Эйнштейна об относительности естественно-научных рассуждений с точки зрения физики. Философское значение также имеет диалектическое объяснение теоремы о полноте исчисления предикатов. Синтаксис и семантика в теории моделей образуют тот мостик между абстрактной алгеброй и математической логикой и тем самым подтверждают диалектический закон философии о борьбе и единстве противоположностей. Не менее важными теоремами являются теорема компактности и так называемые теоремы «вверх» и «вниз» Лёвенгейма-Скулема. Вместе с теоремой о полноте эти две теоремы являются базисными о построении основ теории моделей. Дальнейшее развитие теории моделей было обусловлено близостью с универсальной алгеброй и поэтому усилиями многих известных логиков, таких, как А. Тарский, Р. Воот, А. Робинсон и А.И. Мальцев, были получены фундаментальные результаты в теории моделей об описании аксиоматизируемых классов и применении вышеуказанной теоремы компактности в этих классах. В последующие годы бурное развитие теории моделей привело к понятию теории стабильности и в этом стриме прошли 70-80-е годы прошлого века. Стоит отметить следующие фамилии и их результаты, повлекшие качественные изменения технического аппарата теории моделей и соответственно новые постановки задач: Дж. Кейслер, Дж. Барвайс, М. Морли и выдающийся израильский математик С. Шелах.

Традиционно в теории моделей сложилось два направления, которые условно были названы «восточным» и «западным». Такие названия связаны с географическим расположением проживания основоположников теории моделей, а именно Альфреда Тарского и Абрахама Робинсона. Как хорошо известно, А. Тарский проживал на западном побережье Соединённых Штатов Америки, тогда как А. Робинсон – на восточном. Исследования, базирующиеся на применении методов «западной» теории моделей, как правило, связаны с вопросами математического анализа и алгебраической геометрии и предполагают полноту используемого языка, тогда как аппарат «восточной» теории моделей развивался исходя из постановок актуальных проблем универсальной алгебры, а также различных подразделов абстрактной алгебры. Данное диссертационное исследование относится к «восточному» направлению теории моделей и связано с исследованием неполных теорий, а именно класса йонсоновских теорий.

Класс йонсоновских теорий, а также их некоторые важнейшие свойства, впервые были выделены в работах Бьярни Йонсона, в честь которого данные теории и получили своё название. Бьярни Йонсон (1920-2016 гг.) – известный исландский математик и логик, занимавшийся теорий множеств, универсальной алгеброй, теорией решёток и теорией моделей, эмеритус, заслуженный профессор математики Университета Вандербилт, член Американского Математического Сообщества. Свою докторскую степень (PhD) Б. Йонсон получил в 1946 году в Университете Бёркли под руководством Альфреда Тарского. Имя Б. Йонсона связано не только с классом йонсоновских теорий, но и такими известными математическими понятиями, как йонсоновские алгебры, -йонсоновские функции, йонсоновские кардиналы и многие другие.

Йонсоновские теории представляют собой особый подкласс класса индуктивных теорий, для которого выполняются следующие теоретико-модельные свойства: существование бесконечных моделей, свойство амальгамирования и свойство совместного вложения. При этом заметим, что, согласно определению, йонсоновские теории, вообще говоря, не являются полными. Учитывая тот факт, что класс неполных теорий гораздо более обширен по сравнению с классом полных теорий, становится очевидным, что изучение неполных теорий и классов их моделей представляет собой более сложную и весьма актуальную задачу. Однако, в силу отсутствия свойства элементарной эквивалентности между моделями неполных теорий и ряда других теоретико-модельных свойств, такая постановка задачи представляется неподъёмной, и именно поэтому в качестве предмета исследования был выделен класс индуктивных теорий, в рамках которого мы сосредоточили своё внимание на изучении йонсоновских теорий. К классу йонсоновских теорий относятся такие теории, как теория групп, теория абелевых групп, теория полей фиксированной характеристики, теория линейных порядков и многие другие. Перечисленные теории являются неполными, однако существуют также примеры и полных йонсоновских теорий: теория делимых абелевых групп, теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики, теория плотных линейных порядков без концевых элементов и так далее. Таким образом, выбранный нами класс не только представлен достаточным количеством классических примеров, но и является весьма разнообразным, а потому интересным для проведения теоретико-модельных исследований.

**Современное состояние и актуальность темы исследования.** Йонсоновские теории берут своё начало в исследованиях Б. Йонсона [1], [2], а также М. Морли и Р.Л. Воота [3]. Различие между двумя описанными направлениями теории моделей сказались и на формировании теоретико-модельного аппарата, использованного указанными авторами для описания понятий, касающихся йонсоновских теорий: так, работы М. Морли и Р.Л. Воота имеют отношение к «западному» направлению теории моделей, при этом Б. Йонсон был сторонником «восточного» подхода.

Принципиальное различие в работах Б. Йонсона и работах М. Морли и Р. Воота состоит в том, что соответствующее понятие элементарных мономорфизмов заменяется на понятие изоморфизма и гомоморфизма. Тем самым, формулы, которыми оперирует специалист в «восточной» теории моделей при соответствующих морфизмах, имеет пренекс, как правило, не превышающий двух. При этом при превышении числа два, возникают специальные сложности относительно как синтаксических, так и семантических свойств рассматриваемых моделей и их теорий. Второй немаловажный факт связан с неполнотой рассматриваемых объектов – как теорий, так и их моделей, причём, если в «западном» смысле под теорией модели подразумевается всегда элементарная теория, то в «восточном» варианте аналог элементарной теории модели – это необязательно полная теория и она зависит от аксиоматизации изначальной йонсоновской теории.

Современные исследования, направленные на изучение йонсоновских теорий, во многом представлены работами членов Карагандинской школы теории моделей, и основные труды – статьями Т.Г. Мустафина, Е. Нурхайдарова, Е.Т. Мустафина и А.Р. Ешкеева. На данный момент эта работа активно продолжается в Карагандинском университете им. академика Е.А. Букетова под руководством профессора А.Р. Ешкеева.

Многие понятия и результаты, послужившие основой для построения математического аппарата изучения йонсоновских теорий, принадлежат Т.Г. Мустафину. В последующем некоторые из введённых Т.Г. Мустафиным определений, такие, как определение семантической модели, определение совершенной йонсоновской теории, были переопределены Е.Т. Мустафиным в целях уточнения и утончения техник, применяемых при исследовании йонсоновских теорий. Дальнейшее расширение «йонсоновского» технического инструментария стало возможным благодаря А.Р. Ешкееву, определившему множество новых теоретико-модельных понятий для описания свойств йонсоновских теорий и классов их моделей с самых различных позиций. Результаты, полученные А.Р. Ешкеевым и его учениками, представляют собой достаточно подробное теоретико-модельное описание различных классов структур и связанных с ними йонсоновских теорий в фиксированном и обогащённом языках первого порядка.

В настоящей работе представлены новые инструменты для изучения йонсоновских теорий – как семантического, так и синтаксического характера. При этом диссертационное исследование поводилось по двум направлениям.

Первое направление берёт своё начало в изучении классических алгебраических структур дифференциальной алгебры с позиции исследования йонсоновских теорий. В работе были использованы известные результаты Л. Блюм, и К. Вуд о важнейших теоретико-модельных свойствах дифференциальных полей нулевой и положительной характеристик. Однако стоит заметить, что в работах указанных авторов в основном был использован поход «западной» теории моделей и применены техники изучения полных теорий. В настоящей диссертационной работе представляются результаты с использованием инструментария «восточной» теории моделей и, в первую очередь, применяется арсенал изучения йонсоновских теорий.

В первую очередь приводятся новые примеры йонсоновских теорий, а именно теория дифференциальных полей характеристики 0, теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0, теория дифференциально совершенных полей характеристики , теория дифференциально замкнутых полей характеристики . При этом замечено, что теория дифференциальных полей характеристики не является йонсоновской. Причиной этого является отсутствие свойства амальгамирования у данной теории, и данный факт представляет интерес в контексте изучения свойств амальгамирования и совместного вложения и их связи между собой. В ходе дальнейшего исследования наше внимание привлекла связь между этими свойствами и в классах моделей теорий и . В целях обобщения результатов, полученных в ходе изучения вышеуказанных свойств данных теорий, в рамках данного диссертационного исследования были определены особые подклассы индуктивных теорий относительно теоретико-модельной связи между свойствами амальгамирования и совместного вложения, построены различные примеры, а также приведены некоторые достаточные условия, описывающие эту связь.

Второе направление работы имеет отношение к расширению аппарата изучения йонсоновских теорий в контексте применения так называемого семантического метода, впервые появившегося в работах Мустафина Т.Г. Данный метод заключается в исследовании свойств йонсоновских теорий путём характеризации семантических моделей этих теорий и, как правило, подразумевает построение йонсоновского спектра для некоторого заданного класса структур счётного языка первого порядка. Дальнейшее применение данного метода для изучения свойств многих конкретных йонсоновских теорий и классов их моделей развивалось в трудах Ешкеева А.Р. Введённое Т.Г. Мустафиным понятие косемантичности для йонсоновских теорий явилось предтечей понятия косемантичности моделей йонсоновских теорий. Причём косемантичность моделей, как оказалось, является обобщением классического понятия элементарной эквивалентности моделей полных теорий – одного из важнейших понятий в «западной» теории моделей. Следующим шагом в рамках исследования йонсоновских теорий явилось определение понятия йонсоновского спектра, предложенного Ешкеевым А.Р. Причём с помощью йонсоновского спектра было переопределено понятие косемантичности моделей йонсоновских теорий. Понятие йонсоновского спектра является основным инструментом семантического метода, а потому получение различных результатов, позволяющих описать йонсоновский спектр фиксированного класса структур, имеет большое значение в дальнейшем формировании и совершенствовании аппарата изучения йонсоновских теорий и их классов моделей. В диссертационной работе демонстрируется применение семантического метода в исследовании свойств классов косемантичности йонсоновских теорий йонсоновского спектра для фиксированного класса структур рассматриваемого языка, а также приведены результаты относительно построения некоторых типов алгебраических структур на йонсоновском спектре и классах косемантичности данного спектра.

Исходя из вышеизложенного, можно заключить, что изучение йонсоновских теорий остается актуальным в свете современных достижений теории моделей, благодаря чему формируются новые методы исследования как полных, так и неполых теорий, и совершенствуется имеющийся математический исследовательский аппарат. При этом расширение технического инструментария с применением как семантического, так и синтаксического подхода, создает основу для дальнейшего изучения различных алгебраических структур. Таким образом, продолжающееся развитие этой области имеет большое значение как для самой теории моделей, так и для смежных областей математики.

**Цель работы.** Целью данного диссертационного исследования является изучение теоретико-модельных свойств фиксированных теорий относительно априори определённых логических взаимоотношений между основополагающими понятиями, задающими рассматриваемые в диссертации йонсоновские теории. К ним относятся следующие свойства: совместного вложения, амальгамирования, аксиоматизации, полноты, категоричности, совершенности, выпуклости, алгебраизации классов косемантичности рассматриваемого йонсоновского спектра и различных взаимосвязей этих классов.

**Объект исследования.** Основным объектом исследования данной диссертации являются фиксированные йонсоновские теории и их классы моделей.

**Предмет исследования.** В данной диссертации исследуются теоретико-модельные свойства йонсоновских теорий и их классов моделей, в том числе рассматриваемые формулы этих теорий относительно их моделей.

**Методика исследования.** Основными методами, используемыми в ходе данного диссертационного исследования, являются как классические методы математической логики и универсальной алгебры, так и современные методы, применяемые специализированно в контексте изучения йонсоновских теорий.

Под классическими методами математической логики подразумевается использование технического синтаксического аппарата исчисления предикатов логики первого порядка; к методам универсальной алгебры мы относим прежде всего семантический подход к изучению различных алгебраических структур, таких, как группы, абелевы группы, кольца, поля, решётки.

Что касается методики, используемой для исследования йонсоновских теорий, мы выделяем метод переноса свойств полных теорий на случай неполных теорий, а также семантический метод. Оба данных метода были предложены Ешкеевым А.Р.

В силу того, что йонсоновские теории в общем случае не полны, инструментарий для их изучения несколько ограничен, и поэтому подбор подходящих методов, применяемых, как правило, при изучении полных теорий, для получения результатов относительно йонсоновских теорий не просто имеет смысл, но и вполне оправдан тем фактом, что центр йонсоновской теории является полной теорией, что позволяет перенести некоторые важные теоретико-модельные свойства центра на саму теорию.

Суть семантического метода заключается в изучении свойств семантической модели как семантического инварианта заданной йонсоновской теории, что даёт возможность охарактеризовать как семантически, так и синтаксически не только данную теорию, но и целый класс теорий, косемантичных ей. Как было упомянуто выше, основным инструментом семантического метода является понятие йонсоновского спектра класса структур фиксированного языка. Базовый алгоритм применения семантического метода, как правило, строится на следующих шагах: выполняется подбор подходящего класса структур заданного языка первого порядка; для данного класса структур строится йонсоновский спектр, частным случаем которого может также и быть робинсоновский спектр; на построенном йонсоновском спектре вводится отношение косемантичности йонсоновских теорий; выбирается произвольный класс косемантичности либо класс косемантичности, удовлетворяющий некоторым заданным условиям; через описание свойств семантической модели данного класса косемантичности изучаются свойства теорий этого класса. В данной работе не только демонстрируется применение семантического метода, но и приводятся результаты, позволяющие усилить его арсенал и расширить возможности для получения новых потенциальных теоретико-модельных результатов.

**Задачи исследования.** В рамках проведения диссертационного исследования были поставлены следующие задачи:

1. Найти новые примеры йонсоновских теорий среди классических структур дифференциальной алгебры и показать их совершенность;
2. Получить достаточное условие йонсоновости для полных теорий относительно свойства категоричности и свойств класса экзистенциально замкнутых моделей;
3. Для рассматриваемой теории получить достаточные условия того, что является AP-теорией;
4. Описать связь между робиноновскими теориями и косемантичными им йонсоновскими теориями;
5. Найти достаточное условие конечности класса косемантичности фиксированной йонсоновской теории;
6. Показать связь класса экзистенциально аксиоматизируемых теорий с классом йонсоновских теорий с использованием техники семантического метода;
7. Описать алгебраическую структуру йонсоновского спектра и классов косемантичности йонсоновского спектра фиксированного класса -структур.

**Научная новизна.** В ходе проведения диссертационного исследования в целях изучения теоретико-модельных свойств фиксированных йонсоновских теорий были определены следующие понятия: AP-теория, JEP-теория, AJ-теория. Данные понятия являются новыми, не предлагались ранее другими авторами, однако при этом показали свою необходимость и полезность в расширении инструментария для исследования не только йонсоновских теорий, но теорий рассматриваемого языка в целом. Также все результаты, полученные в рамках данного диссертационного исследования, представляют собой теоремы, не публиковавшиеся ранее в работах иных авторов, и демонстрируют новый, свежий подход в развитии аппарата теории моделей и смежных областей.

**Теоретическая и практическая ценность работы.** Представленная диссертационная работа относится к исследованиям из области фундаментальной математики и потому носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при проведении исследований, связанных с различными направлениями теории моделей, математической логикой, универсальной алгеброй и другими смежными дисциплинами.

**Апробация полученных результатов.** Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования, были представлены и апробированы на следующих научных конференциях и семинарах:

1. Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы, 4-9 апреля 2022 г.) [4],
2. IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры» (Актобе, 24-28 мая 2022 г.) [5],
3. Международная научная конференция «Актуальные задачи математики, механики и информатики»: посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (Караганда, 8–9 сентября 2022 г.) [6], [7], [8],
4. Труды международной научной конференции «Математическая логика и компьютерные науки» (Астана, 7-8 октября 2022 г.) [9],
5. VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory. Abstracts. Claude Bernard Lyon 1 University, Camille Jordan Institute (Lyon, November 14-18, 2022) [10],
6. Международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения – 2022», посвященная 105-летию доктора физико- математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова (Уральск, 30 ноября, 2022 г.) [11],
7. Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы, 5-7 апреля 2023 г.) [12],
8. LOGIC COLLOQUIUM 2023. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. University of Milan (Italy, 5-9 June 2023) [13],
9. XIII International Conference of the Georgian Mathematical Union. Batumi Shota Rustaveli State University (Georgia, 4-9 September) [14],
10. VII World Congress of Turkic World (TWMS Congress-2023) (Turkistan, September 20-23) [15],
11. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (16-19 апреля 2024 г., ИМММ, КазНПУ им. Абая Кунанбаева, г. Алматы, Международный математический Центр СО РАН, г. Новосибирск) [16], [17], [18], [19],
12. Международная научная конференция студентов и молодых учёных «Gylym jane Bilim» (14 апреля 2024 г., ЕНУ им. Л.Н. Гумилёва, г. Астана) [20],
13. Международная научная конференция «Математика в созвездии наук», посвящённая 85-летию со дня рождения академика РАН В.А. Сидоровича (1-2 апреля 2024 г., КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Астана),
14. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024 (19-20 апреля 2024 г., КФ МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Астана) [21],
15. Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (26 июня-2 июля 2024 г., г. Казань) [22],
16. XVI международная летняя школа-конференция «Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры» (8-13 июля 2024 г., ИМ СО РАН, г. Новосибирск),
17. Объединённый семинар «Теория моделей» им. Е.А. Палютина (25 мая 2022 г. и 3 мая 2023 г., Институт математика СО РАН, г. Новосибирск, ИМММ, г. Алматы).
18. Традиционная международная конференция «Мальцевские чтения» (11-15 ноября 2024 г., ИМ СО РАН, г. Новосибирск) [23].

Также результаты диссертационного исследования регулярно представлялись в докладах на семинаре «Теория моделей» кафедры алгебры, математической логики и геометрии им. профессора Т.Г. Мустафина Карагандинского университета им. академика Е.А. Букетова.

**Опубликованность результатов.** Все результаты диссертационной работы опубликованы в 25 научных работах, среди которых

5 статей, опубликованы в журналах, входящих в базу Scopus с процентилем не ниже 35: [24], [25], [26], [27], [28];

20 тезисов докладов, опубликованных в трудах международных и зарубежных конференций: [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23].

**Основные положения, выносимые на защиту.** На защиту представляются следующие основные результаты диссертационного исследования:

1. Теории , , , – совершенные йонсоновские теории [24].
2. Пусть – полная -категоричная теория, класс экзистенциально замкнутых моделей которой не пуст. Тогда – совершенная йонсоновская теория [16].
3. Пусть -теория является сильно выпуклой и пусть допускает свойство амальгамирования. Тогда является AP-теорией [24].
4. Пусть – робинсоновская теория, а – йонсоновская теория, косемантичная . Тогда [28].
5. Пусть – произвольный класс -структур (возможно, содержащий только одну структуру), – фактор-множество робинсоновского спектра по отношению косемантичности. Тогда каждый класс косемантичности содержит ровно одну теорию. Другими словами, для любых двух робинсоновских теорий и языка отношение косемантичности эквивалентно равенству теорий, т.е. [28].
6. Пусть ‒ йонсоновская теория, и ‒ конечно аксиоматизируемая теория. Тогда число теорий, косемантичных , конечно [28].
7. Любая экзистенциально аксиоматизируемая теория является йонсоновской теорией, косемантичной пустой теории [28].
8. Пусть – йонсоновские теории языка , такие, что множество предложений непротиворечиво и найдётся хотя бы одна модель бесконечной мощности. Тогда – йонсоновская теория [28].
9. Пусть – язык первого порядка, и пусть – класс -структур, такой, что в содержится хотя бы одна бесконечная -структура, – йонсоновский спектр . Тогда является коммутативным моноидом [28].
10. Для любого класса косемантичности , где – класс -структур, содержащий хотя бы одну бесконечную структуру, представляет собой решетку относительно операций и [28].

**Структура и объём диссертации.** Объём представленной диссертации –82 страницы. Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и списка использованной литературы.

Глава 1 «Необходимые элементы из курса алгебры и связанной с ними теории моделей» состоит из 5 параграфов и представляет изложение теоретических сведений, необходимых для понимания содержания данной работы. В параграфе 1.1 приведены сведения о классических алгебраических структурах, имеющих отношения к данному исследованию. В параграфе 1.2 приводятся определения понятий и освещаются известные результаты из курса классической теории моделей. Параграфы 1.3 представляют собой теоретико-модельное описание некоторых дифференциальных алгебр, также касающихся данной диссертационной работы.

Глава 2 «Йонсоновские теории», состоящая из 6 параграфов, посвящена изучению йонсоновских теорий и содержит необходимую информацию о данном классе теорий, а также представляет полученные в ходе проведения диссертационного исследования результаты. Параграф 2.1 излагает основные сведения о йонсоновских теориях с позиции как классической, так и современной теории моделей. В параграфах 2.2-2.3 представлены результаты о дифференциальных полях, полученные в ходе данного диссертационного исследования, а также описаны некоторые свойства подклассов йонсоновских теорий с позиции изучения свойств амальгамирования и совместного вложения, к которым относятся упомянутые дифференциальные алгебры. Параграфы 2.4-2.6 представлены как результат исследования классов косемантичности йонсоновских теорий и алгебраической структуры йонсоновского спектра в целях расширения арсенала семантического метода для дальнейшего изучения йонсоновских и индуктивных теорий и их классов моделей.

Нумерация глав и параграфов в представленной диссертации – сквозная. Нумерация определений, теорем, лемм, фактов, предложений, замечаний, следствий, уравнений, примеров и рисунков независима и является сквозной в рамках каждого параграфа. Список литературы представлен 88 источниками.

**Благодарность.** Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность отечественному научному консультанту – доктору физико-математических наук, профессору Ешкееву Айбату Рафхатовичу за постановку задачи, ценные консультации и всестороннюю поддержку при выполнении диссертационной работы, а также выражает признательность и благодарность зарубежному научному консультанту – доктору физико-математических наук, профессору Новосибирского государственного университета Судоплатову Сергею Владимировичу за внимание к работе, поддержку и ценные рекомендации во время научной стажировки автора в Новосибирском академгородке.

Диссертационная работа выполнена на кафедре алгебры, математической логики и геометрии имени профессора Т.Г. Мустафина Карагандинского университета имени академика Е.А. Букетова.

# Необходимые элементы из курса алгебры и связанной с ними теории моделей

## Элементы теории колец и полей

Данный параграф отражает содержание тех необходимых понятий и их примеров, касающихся таких алгебраических структур, теоретико-модельные свойства которых будут рассматриваться в данной диссертации. Также следует заметить, что наши интересы будут связаны не со всеми типами структур, а только с теми, в которых определён дополнительный функциональный символ, играющий роль производной в классическом понимании математического анализа, а также с теми, что имеют отношение к построению некоторых классических типов алгебр на классе рассматриваемых йонсоновских теорий. Поэтому мы будем приводить достаточно ограниченный, но только необходимый теоретико-алгебраический аппарат и результаты из теоретико-модельной алгебры, необходимые для описания полученных результатов данной диссертации в рамках дифференциальной алгебры и развития аппарата семантического метода для изучения йонсоновских теорий.

Мы начнём с основных алгебраических определений, имеющих непосредственное отношение к данному исследованию.

Пусть ‒ произвольное множество, в котором для любых двух элементов и однозначно определены сумма () и произведение (), также являющиеся элементами данного множества. Другими словами, множество замкнуто относительно операций сложения () и умножения ().

Определение 1.1.1 [29, с. 49] Кольцом называется алгебраическая система, представляющая собой множество с вышеупомянутыми свойствами, для которого выполняются следующие законы:

1. Законы сложения:

(С1) закон ассоциативности: для любых ;

(С2) закон существования нулевого элемента: для всех ;

(С3) закон существования обратного элемента: для всех ;

(С4) закон коммутативности: для любых ;

II. Законы умножения:

(У1) закон ассоциативности: для любых ;

III. Законы дистрибутивности:

(Д1) ;

(Д2) .

Другими словами, есть универсальная алгебра , представляющая собой коммутативную группу по операции сложения (), полугруппу по операции умножения (), а также обладающая свойством дистрибутивности относительно обеих операций () и ().

Приведём несколько классических примеров колец.

Пример 1.1.1 Множество с определёнными на нём операциями сложения () и умножения (), как показано выше, представляет собой тривиальное кольцо. Заметим, что данная структура является единственным кольцом, в котором роль нейтрального элемента как по сложению, так и умножению играет один и тот же элемент 0.

Пример 1.1.2 – кольцо целых чисел. Данный пример очень важен, так как любое кольцо может быть рассмотрено в качестве алгебры над .

Пример 1.1.3 Следующий пример берёт начало в классической теории чисел: – кольцо вычетов по модулю , . Кольца вычетов имеют большое значение при исследовании конечнопорождённых абелевых групп и построении -адических чисел.

Пример 1.1.4 – кольцо рациональных чисел, также являющееся одним из основных объектов исследований в теории чисел.

Пример 1.1.5 Пусть – произвольное коммутативное кольцо, тогда для всегда может быть построено кольцо многочленов от переменных, обозначаемое как , причём коэффициенты многочленов данного кольца взяты из .

Определение 1.1.2 [29, с. 49] Подкольцом кольца называется подмножество такое, что само является кольцом.

Определение 1.1.3 [29, с. 49] Характеристикой кольца называется наименьшее число , такое, что

причём в случае, когда не существует такого , характеристика кольца считается нулевой.

Отметим, что характеристика кольца всегда есть простое число либо нуль.

Зачастую кольца обладают некоторыми дополнительными алгебраическими свойствами, исходя из чего мы получаем некоторые особые частные случаи колец, имеющих больше значение в алгебраических и теоретико-модельных исследованиях. Опишем некоторые из таких случаев.

Определение 1.1.4 [29, с. 54] Кольцо называется телом, если:

(Т1) в есть хотя бы один элемент, отличный от нуля;

(Т2) уравнения

разрешимы при .

Далее мы приходим к определению важного типа колец, имеющего непосредственное отношение к данному диссертационному исследованию.

Определение 1.1.5 [29, с. 54] Тело называется полем, если выполняется закон коммутативности для операции умножения:

(У2) для любых .

В неявном виде данным понятием оперировал в своих работах Э. Галуа (1830 г.), которому удалость сформулировать критерий существования решения в радикалах для уравнения от одной переменной, при этом была использована идея алгебраического расширения поля. Позже благодаря применению техники теории Галуа было доказано, что решение некоторых классических задач, таких как задачи о квадратуре круга, трисекции угра, удвоении куба, невозможно.

В явном виде понятие поля впервые встречается в работах Ю.В.Р. Дедекинда (1871 г.), однако заметим, что Дедекиндом использовался термин «körper», что означает «тело». Термин «поле» был введён позже в 1893 году американским математиком Э.Г. Муром.

Отметим, что характеристика поля есть характеристика как кольца. Другими словами, характеристика поля представляет собой, по своей сути, тоже понятие, что характеристика кольца. Аналогично, подполем поля называется подкольцо , такое, что само является полем.

Приведём некоторые примеры полей.

Пример 1.1.6 Кольцо из примера 1.1.1 является полем. Данное поле называют тривиальным.

С тривиальным полем связано следующее важное определение теории полей.

Определение 1.1.6 [29, с. 50] Поле называется простым, если оно не содержит тривиального поля в качестве подполя.

Пример 1.1.7 Кольцо из примера 1.1.4 является полем. Данное поле имеет характеристику 0 и изоморфно любому простому подполю характеристики 0 произвольного поля той же характеристики при условии наличия у простого подполя.

Пример 1.1.8 Кольцо из примера является полем тогда и только тогда, когда равно некоторому простому числу . При этом поле изоморфно любому простому подполю характеристики произвольного поля характеристик , при условии, что имеет простое подполе.

Пример 1.1.9 Множество действительных чисел с заданными на нём операциями сложения и умножения чисел также представляет собой поле.

Далее мы опишем некоторые важные свойства полей нулевой и положительной характеристики. В качестве мы будем обозначать кольцо многочленов от переменных с коэффициентами из .

Определение 1.1.7 [29, с. 161] Поле называется алгебраически замкнутым, если всякий многочлен нулевой степени, взятый над полем , имеет хотя бы один корень, являющийся элементом данного поля.

Хорошо известно, что для всякого поля существует алгебраическое замыкание  , то есть, алгебраическое расширение поля , являющееся алгебраически замкнутым полем.

Определение 1.1.8 [29, с. 164] Многочлен над полем называется сепарабельным, если все его неприводимые множители не имеют кратных корней в алгебраическом замыкании поля .

Определение 1.1.9 [29, с. 165] Поле называется совершенным, если каждый неразложимый в многочлен сепарабелен.

Приведём условия, при которых поле фиксированной характеристики является совершенным:

Теорема 1.1.1 [29, с. 165] Любое поле нулевой характеристики является совершенным.

Теорема 1.1.2 [29, с. 166] Поле характеристики совершенно тогда и только тогда, когда для любого корни -й степени элемента также принадлежат .

Зачастую рассматривается не единственное поле, а некоторый класс полей фиксированной характеристики, и в таком случае мы всегда обращаем внимание на взаимные вложения полей в данном классе и соответствующие характеристики таких вложений. Приведём определение, также имеющее большое значение для данного исследования.

Определение 1.1.10 [30, с. 24] Пусть и – произвольные поля. Композитом называется минимальное поле, такое, что и .

Существование композита для любых двух полей и обусловлено тем фактом, что его можно определить как пересечение всех полей, содержащих и . Примером композита может служить порождённое числами и расширение , являющееся композитом расширений и . Кроме того, построение композита возможно благодаря следующей теореме:

Теорема 1.1.3 [30, с. 24] Пусть – произвольное поле, и – расширения поля , причём найдутся такие числа , что . Тогда .

Далее мы переходим к описанию другого типа структур, имеющих непосредственное отношение к данном исследованию.

В параграфе 2.5 будет рассмотрено множество теорий языка первого порядка, на котором мы покажем задание некоторого типа алгебры, описывая таким образом структурные алгебраические свойства этих теорий. Описываемые далее понятия являются классическими и относятся к курсу универсальной алгебры. Мы приводим очень их краткий обзор, так как данное исследование в первую очередь направлено всё же на исследование теоретико-модельное описание структур и их теорий.

Напомним определение частично упорядоченного множества.

Определение 1.1.11 [31, с. 11] Частично упорядоченным множеством называется множество, на котором определено бинарное отношение , удовлетворяющее следующим условиям для каждой тройки элементов :

(Р1) (рефлексивность);

(Р2) если и , то (антисимметричность);

(Р3) если и , то (транзитивность).

Определение 1.1.12 [1, с.18] а) Верхней гранью подмножества в частично упорядоченном множестве называется элемент , такой, что для всех выполняется .

б) Точной верхней гранью подмножества называется верхняя грань , для которой верно, что для любой верхней грани подмножества .

Определения нижней грани и точной нижней грани подмножества строятся двойственно.

И наконец, напомним определение решётки.

Определение 1.1.13 [31, с. 18] Решёткой называется частично упорядоченное множество, в котором любые два элемента и имеют точную нижнюю грань обозначаемую как , и точную верхнюю грань, обозначаемую как .

Как было отмечено во введении, основным предметом данного диссертационного исследования являются йонсоновские теории и их модели. В параграфе 2.5 на спектре йонсоновских теорий для определённого класса структур языка первого порядка будет построена решётка, что в перспективе позволит рассматривать чисто логические понятия с помощью инструментов универсальной алгебры.

## Основные понятия как «западного», так и «восточного» направлений классической теории моделей

В данном параграфе будут изложены основные сведения из курса классической теории моделей, необходимые дл я полноценного понимания содержания диссертационной работы.

В параграфах 1.3 1.5 будут также описаны теоретико-модельные основы изучения некоторых классических дифференциальных алгебр, имеющих непосредственное отношение к объекту диссертационного исследования.

Приступим к описанию основных понятий из курса классической теории моделей, необходимых для понимания содержания данной диссертационной работы. Весь материал, изложенный в это параграфе, может быть найден в следующих классических работах: [32], [33], [34].

Сигнатурой называется следующий набор символов данного алфавита:

где – набор предикатный символов (символов отношений), – набор функциональных символов, – набор константных символов. Язык есть множество всех формул данной сигнатуры . Множество предложений называется непротиворечивым, если не найдётся ни одного такого -предложения , что и . Под теорией мы понимает любое непротиворечивое множество предложений данного языка .

Теория называется полной, если для любого предложения языка верно, что или . В противном случае теория называется неполной. В данной диссертационной работе будут в основном рассмотрены, вообще говоря, неполные теории. Впрочем, теория может быть неполной в целом, но обладать всё же некоторой степенью полноты. Таким образом, мы называем теорию -полной, или полной для экзистенциальных предложений, если для любого экзистенциального -предложения верно, что или . Заметим, что теория -полна тогда и только тогда, когда она -полна. Аналогично определяется -полнота теории.

Теории и языка назовём логически эквивалентными, если для любого -предложения верно, что , и наоборот, для любого верно, что . При этом, как можно заметить, .

Структурой языка мы называем любое непустое множество , на котором проинтерпретированы все символы данной сигнатуры . Структура называется моделью теории , если в истинны все предложения . В этом случае мы говорим, что принадлежит классу моделей теории , то есть . Мы называем множество предложений языка набором аксиом теории , если . Если мы можем построить такое конечное множество аксиом для теории , то мы говорим, что теория конечно аксиоматизируема.

Теория называется универсально аксиоматизируемой, или -аксиоматизируемой, или -теорией, если она может быть аксиоматизируема посредством универсальных предложений. Аналогично мы говорим об экзистенциально аксиоматизируемых теориях (-теориях) и об универсально-экзистенциально аксиоматизируемых теориях (-теориях).

Приведём известную классическую теорему, известную благодаря Дж. Лосю и А. Тарскому.

Теорема 1.2.1 [32, с. 69] Теория устойчива относительно подструктур (т.е., каждая подструктура модели теории также является моделью ) тогда и только тогда, когда универсально аксиоматизируема.

Следующее теоретико-модельно понятие, имеющее отношение к данному исследованию, является понятием категоричности теории.

Определение 1.2.1 [32, с. 69] Пусть . Теория языка называется -категоричной, если все модели мощности изоморфны.

Другими словами, -теория категоричная в мощности , если она имеет единственную модель мощности с точностью до изоморфизма.

В работе [35] один из основоположников теории моделей, а именно А. Робинсон, определил семантическое свойство выпуклости теорий, которое сформулировал следующим образом.

Определение 1.2.2 [35, с. 118] Теория языка называется выпуклой, если для каждой модели теории и каждого семейства подструктур , где для любого , также является моделью , если оно не пусто. В случае, когда данное пересечение всегда не пусто, будет называться сильно выпуклой.

Классическими примерами сильно выпуклых теорий служат теория групп, теория абелевых групп, теория полей; к выпуклым, но не сильно выпуклым теориям мы можем отнести теорию эквивалентностей. Кроме того, легко заметить, что любая универсально аксиоматизируемая теория является выпуклой.

Понятие выпуклости представляется нам весьма важным, так как немалая часть примеров йонсоновских теорий, занимающих центральное место в данном исследовании, как раз представлена выпуклыми или, если быть точнее, сильно выпуклыми теориями. В параграфе 2.3 будет продемонстрирован результат, связанный с этим свойством.

Говоря об изучаемом нами подклассе теорий, мы обязаны упомянуть определение индуктивной теории. Следует отметить, что проблемы «восточной» теории моделей зачастую имеют отношение именно к индуктивным теориям.

Определение 1.2.3 [32, с. 62] Теория называется индуктивной, если объединение любой возрастающей цепи

моделей снова является моделью этой теории.

Следующая теорема представляет собой классический критерий индуктивности теории.

Теорема 1.2.2 [32, с. 62] Теория является индуктивной тогда и только тогда, когда она -аксиоматизируема.

Класс индуктивных теорий весьма широк, существует огромное количество естественных примеров индуктивных теорий. К ним относятся теория групп, теория абелевых групп, теория полей, теория полей фиксированной характеристики, теория линейных порядков и многие другие. Примером неиндуктивной теории является теория цикличных групп, так как аксиома, содержащая информацию о цикличности групп, является экзистенциально-универсальным предложением.

При изучении индуктивных теорий большую роль играет класс их экзистенциально замкнутых моделей. Напомним определение экзистенциально замкнутой модели.

Определение 1.2.4 [36] Структура называется экзистенциально замкнутой моделью теории , если и для любой модели теории

Класс экзистенциально замкнутых моделей теории будем обозначать через .

Следующие факты о экзистенциально замкнутых моделях хорошо известны:

Теорема 1.2.3 [36] Пусть – индуктивная теория. Тогда каждая модель может быть изоморфно вложена в некоторую экзистенциально замкнутую модель теории .

Таким образом, для любой индуктивной теории мы можем утверждать, что класс её экзистенциально замкнутых моделей не пуст, то есть .

Следующие две теоремы позволяют установить факт экзистенциальной замкнутости модели теории .

Теорема 1.2.4 [36] Eсли , где и – экзистенциально замкнутая модель , то также является экзистенциально замкнутой моделью .

Теорема 1.2.5 [36] Пусть – некоторая -теория. Для любой модели теории следующие условия эквивалентны:

(i) экзистенциально замкнута в ;

(ii) экзистенциально замкнута в .

Говоря об изоморфных вложениях внутри класса моделей теории , мы обязаны также взять во внимание понятия совместного вложения и амальгамирования моделей.

Напомним определение свойства совместного вложения.

Определение 1.2.5 [32, с. 80] Теория допускает свойство совместного вложения (JEP), если для любых двух её моделей и найдётся модель в классе моделей теории и изоморфные вложения .

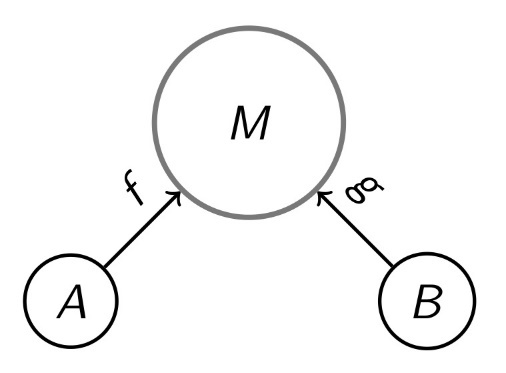


Рисунок . – свойство совместного вложения (диаграмма вложений)

При изучении теорий, допускающих JEP, больше значение имеет следующая теорема, доказанная У. Ходжесом:

Теорема 1.2.6 [37, с. 363] Пусть – -теория, допускающая JEP, и – экзистенциально замкнутые модели данной теории. Тогда каждое -предложение, истинное в , истинно и в .

Другими словами, для любой теории её любые экзистенциально замкнутые модели элементарно эквивалентны по универсально-экзистенциальным предложениям, если обладает свойством совместного вложения.

Теперь напомним определение свойства амальгамирования.

Определение 1.2.6 [32, с. 68] Класс -структур обладает свойством амальгамирования (AP), если для любых моделей и изоморфных вложений найдутся модель и изоморфные вложения , такие, что .

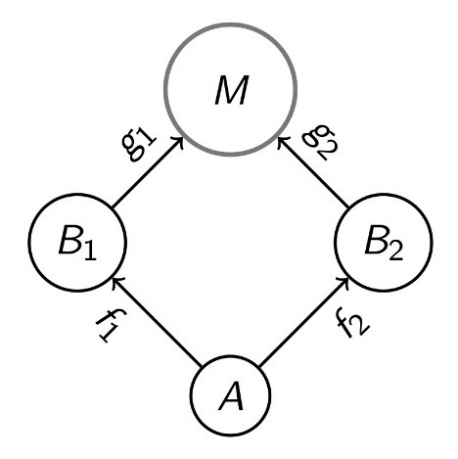


Рисунок . – свойство амальгамирования (диаграмма вложений)

Определение 1.2.7 [32, с. 68] Теория допускает свойство амальгамирования (AP), если класс её моделей обладает этим свойством.

Понятия AP и JEP являются фундаментальными в аппарате исследования йонсоновских теорий. К тому же, как хорошо известно, класс экзистенциально замкнутых моделей любой теории, при условии, что он не пуст, всегда является амальгамируемым. И хоть класс не всегда является элементарным, то есть не всегда аксиоматизируем, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.7 [38] Пусть – -теория, у которой класс экзистенциально замкнутых моделей не пуст. Тогда любых и изоморфных вложений существуют и изоморфные вложения , такие, что . Другими словами, класс обладает свойством амальгамирования (AP).

В случае, когда класс экзистенциально замкнутых моделей теории всё-таки аксиоматизируем, мы будем говорить о модельном компаньоне теории . Техника, связанная с модельными компаньонами, берёт своё начало в трудах А. Робинсона и хорошо себя показывает и при проведении современных теоретико-модельных исследований. В частности, её часто применяют теоретико-моделисты для описания свойств йонсоновских теорий. Подробнее об этом будет изложено в параграфе 2.1 а сейчас напомним некоторые необходимые определения, касающиеся этой техники, и приведём классические примеры.

Определение 1.2.8 [32, с. 62] Говорят, что теория допускает элиминацию кванторов, если для любой формулы языка найдётся такая бескванторная формула того же языка, что

Определение 1.2.9 [32, с. 146] Теория языка называется модельно полной, если любое вложение моделей является элементарным.

Приведём примеры модельно полных теорий.

Пример 1.2.1 Любая теория, допускающая элиминацию кванторов, является модельно полной.

Пример 1.2.2 Теория алгебраически замкнутых полей модельно полна.

Пример 1.2.3 Теория вещественно замкнутых полей в языке упорядоченных колец также является модельно полной.

Хорошо известен следующий факт:

Теорема 1.2.8 [36] Теория является модельно полной тогда и только тогда, когда каждая её модель экзистенциально замкнута в классе моделей теории .

Определение 1.2.10 [32, с. 156] Пусть – теория языка , – теория того же языка. будет называться модельным компаньоном теории , если выполнены следующие два условия:

1. Теории и взаимно модельно совместны, то есть для каждой модели теории найдётся модель теории , такая, что изоморфно вкладывается в , и наоборот, если для каждой модели теории найдётся модель в классе моделей теории , такая, что изоморфно вкладывается в ;
2. Теория является модельно полной.

Далее приведём некоторые примеры теорий и их модельных компаньонов.

Пример 1.2.4 Очевидно, если – модельно полная теория, что является модельным компаньоном сама для себя.

Пример 1.2.5 Пусть – теория полей. Тогда теория алгебраически замкнутых полей является модельным компаньоном для .

Пример 1.2.6 Пусть – теория абелевых групп. Модельным компаньоном для служит теория делимых абелевых групп.

В качестве примера теории, не имеющей модельного компаньона, мы можем привести теорию групп.

Следующий результат также принадлежит А. Робинсону.

Теорема 1.2.9 [32, с. 158] Теория может иметь не более одного модельного компаньона с точностью до логической эквивалентности.

Определение 1.2.11 [32, с. 156] Теория языка будет называться модельным пополнением -теории , если выполнены следующие условия:

1. – модельный компаньон для ;
2. для любой модели верно, что – полная теория, где – диаграмма модели , то есть множество всех атомарных формул и их отрицаний, истинных в модели .

В примерах 1.2.4-1.2.6 перечислены теории и их модельные пополнения. Пример теории, обладающей модельным компаньоном, который не является модельным пополнением, будет приведён в параграфе

Следующая теорема была доказана математиком Эли Берс и показывает, в каком случае модельный компаньон теории будет являться модельным пополнением данной теории.

Теорема 1.2.10 (Эли Берс) [39] Пусть теория имеет модельный компаньон . Тогда имеет модельное пополнение, если и только если допускает свойство амальгамирования.

Следует заметить, что, вообще говоря, вопрос существования модельного компаньона у теории до сих пор не закрыт, а потом результаты, полученные в этом направлении, весьма ценны для развития аппарата теории моделей «восточного» направления. Хорошо известна следующая теорема, принадлежащая П. Эклофу и Дж. Саббагу:

Теорема 1.2.11 [39] -теория обладает модельным компаньоном тогда и только тогда, когда её класс экзистенциально замкнутых моделей является элементарным, то есть существует теория языка , классом моделей которых и является в точности .

При этом теория, аксиоматизирующая класс в условии теоремы 1.2.11, и будет являться модельным компаньоном теории .

Следующий классический результат принадлежит Д. Сарацино и будет использован нами в получении при доказательстве одной из теорем в параграфе 2.3

Теорема 1.2.12 [40] Пусть – -категоричная -теория, все модели которой являются бесконечными. Тогда существует -категоричный модельный компаньон теории .

## Теоретико-модельный подход в исследовании свойств дифференциальных алгебр

В данном параграфе представлен краткий обзор исследований из области дифференциальной алгебры в контексте формирования тенденции применения теоретико-модельного подхода в изучении некоторых дифференциальных алгебраических структур. В последующих двух параграфах будут описаны основные понятия и некоторые известные результаты, касающиеся дифференциальных полей и полученные с помощью методов теории моделей. В частности, приводится описание языка дифференциальных колец и полей, представлена аксиоматика теории дифференциально замкнутых полей, приведены теоремы, демонстрирующие, почему каждое дифференциальное поле характеристики 0 имеет единственное простое дифференциально замкнутое расширение, называемое дифференциальным замыканием .

Дифференциальные поля, как известно, представляют собой одно из классических понятий дифференциальной алгебры. Существует несколько разных подходов к изучению предмета дифференциальной алгебры. Так, И. Капланский в своей монографии [41], [42] описывал эту область математики следующим образом: «Дифференциальную алгебру легко описать: она состоит на 99% из работ Ритта и Колчина», тогда как в обзоре А.М. Васильева [43] дифференциальная алгебра понимается как раздел дифференциальной геометрии, в котором исследуются симметрии дифференциальных уравнений. Е.Р. Колчин [44] считал, что «выделение дифференциальной алгебры как отдельной математической ветви может быть обременено сложностями в силу того, что любое исследование, посвящённое дифференциальным уравнениям, так или иначе связано с дифференциальной алгеброй». Большие трудности также возникали при попытках провести чёткую черту между дифференциальной алгеброй, алгебраической геометрией, дифференциальной геометрией, гомологической алгеброй, компьютерной алгеброй.

Первыми трудами по дифференциальной алгебре, которые считаются «точкой отсчёта» формирования этого направления как самостоятельной математической дисциплины, являются работы Дж. Ф. Ритта [45], [46]. Многие проблемы, сформулированные в этих книгах, остаются нерешёнными до сих пор. В 1966 году на Московском Математическом Конгрессе Е.Р. Колчин в своём докладе [44] сформулировал несколько открытых вопросов, определивших основной курс исследований в дифференциальной алгебре, и на некоторые из них также всё ещё не получен ответ. Кроме того, проблематика выделенных в докладе [44] направлений дифференциальной алгебры хорошо освещена в [47].

Одними из основных понятий предмета исследования дифференциальной алгебры являются понятие дифференциального кольца, а также его частный случай –дифференциальное поле. Первые попытки описать эти алгебраические структуры с помощью теоретико-модельного аппарата принадлежат А. Робинсону, С. Шелаху, Л. Блюм. В работе [48] Е.Р. Колчиным представлено единое изложение на языке дифференциальной алгебры работы, проделанной в этой области как логиками, так и алгебраистами.

Как пишет в своей работе [49] Л. Блюм, преимуществом теоретико-модельного подхода прежде всего является то, как многие очень конкретные результаты естественным образом следуют из логических и теоретико-модельных свойств теорий и очень общих принципов. Прекрасным примером этого является работа Дж. Акса и С. Кохена [50] о гипотезе Артина. В случае дифференциальных полей характеристики 0 многие результаты следуют из существования модельного пополнения теории дифференциальных полей характеристики 0, которым является теория дифференциально замкнутых полей той же характеристики, с достаточно простым аксиоматическим описанием (для каждой пары дифференциальных многочленов от одной переменной существует решение (), если порядок больше, чем порядок ), и существования дифференциальных замыканий.

О преимуществе теоретико-модельного подхода Дж. Сакс [51] высказывался следующим образом: «методы теории моделей оказались весьма полезны при изучении дифференциальных полей, поскольку понятие дифференциальной замкнутости намного сложнее, чем аналогичные понятия алгебраической замкнутости, вещественной замкнутости или хенселизации. И прежде всего преимущество теоретико-модельного подхода заключается в лаконичности формальной записи алгебраической характеризации, связанной с элиминацией кванторов».

Также Сакс писал: «когда речь идёт непосредственно о теории моделей, может показаться, что предмет её исследования является «слишком общим», чтобы иметь какое-либо конкретное математическое содержание. Однако это не так, и в противовес этому можно привести несколько теорем, одна из которых принадлежит Р. Вооту [52]: пусть ‒ любая счетная полная теория, тогда число счетных моделей (с точностью до изоморфизма) не может быть равно 2. Другими словами, для каждого положительного целого числа 2 существует только счетных моделей ».

Еще один результат, подтверждающий слова Дж. Сакса, принадлежит М. Морли [53]. И хоть этот результат не имеет непосредственного отношения к данной диссертации, однако же техника, которая был разработана М. Морли в рамках получения этого результата, была использована Л. Блюм [54] для доказательства существования дифференциального замыкания.

До появления диссертации Л. Блюм [54] (1968 г.) все приложения теории моделей к алгебре являлись по своей сути следствиями того, что логики называют теоремой компактности. Главной фигурой в построении и выявлении взаимосвязи основных концепций теории моделей и алгебры стал Абрахам Робинсон, сформулировавший в 1950-х годах утверждение, позже названное Дж. Саксом [51] «принципом Робинсона». Данный принцип имеет весьма большое значение в исследовании полей посредством методов теории моделей. В своей простейшей форме он гласит: пусть ‒ предложение, истинное в каждом поле характеристики 0; тогда существует целое число такое, что истинно в каждом поле характеристики .

Использование принципа Робинсона имеет место при доказательстве асимптотической формы гипотезы Артина для и -адических чисел, приведенном Аксом и Коэном. Лэнг показал, что гипотеза Артина верна в , поле формальных степенных рядов над целыми числами для всех . В силу принципа Робинсона существует структура , являющаяся полем характеристики 0, удовлетворяющая следующему свойству: каждое предложение, истинное в для любого конечного числа также истинно в . Аналогично существует структура , представляющая собой поле с оценкой характеристики 0, которое связно с так же, как и с . Нетрудно доказать, что поля и изоморфны как поля с оценкой. Тогда гипотеза Артина справедлива в по Лэнгу, а следовательно, и в , и это значит, что каждый случай гипотезы Артина, поскольку она выражается одним предложением в логике первого порядка, имеет место в для всех конечных . Все существенные алгебраические факты, необходимые для доказательства изоморфизма и можно найти в работе И. Капланского [55]. Наиболее краткое, но полное изложение вышесказанного можно найти в работе Робинсона [56]. Обобщения на группы значений, отличные от целых чисел, см. в работе Ершова [57].

## Дифференциальные кольца и дифференциальные поля

Перейдём к описанию некоторых фундаментальных понятий дифференциальной алгебры, имеющих отношение к данному диссертационному исследованию. Первым из них является понятие дифференциального кольца. Пусть – некоторое кольцо в классическом алгебраическом смысле согласно определению 1.1.1. Под дифференцированием кольца понимается отображение

(1.4.)

на которое налагаются следующие два условия:

1. отображение (1.4.1) аддитивно, то есть ;
2. для любых выполняется свойство .

называется производной элемента , при этом сам называют интегралом элемента . Для производных мы можем записать правило Лейбница следующим образом:

.

В случае, когда элемент и его производная коммутируют, выполняется . Для колец, обладающих единичным элементом и обратным для элементом, т.е. , верным является следующее равенство:

Заметим, что в этом случае производная от единичного элемента в кольце равна нулевому элементу, т.е. .

В дифференциальной алгебре хорошо известна следующая теорема.

Теорема 1.4.1 [41, с. 7] Для всякого дифференцирования в произвольной области целостности существует единственное продолжение на соответствующее поле отношений.

Теперь мы можем привести определение дифференциального кольца.

Определение 1.4.1 [41, с. 7] Дифференциальным кольцом называется коммутативное кольцо с единицей, на котором введено отображение (1.4.1).

Следующие примеры, также описанные в [41], хорошо иллюстрируют суть данного определения.

Пример 1.4.1 Пусть – произвольное кольцо. Рассмотрим в качестве дифференцирования кольца тривиальное дифференцирование, т.е. для любого . Тогда является дифференциальным кольцом.

Из примера 1.4.1 следует, что любое кольцо является частным случаем дифференциального кольца. Кроме того, заметим, что на кольце целых чисел и в поле рациональных чисел невозможно ввести никакое дифференцирование, кроме тривиального.

Пример 1.4.2 Пусть – кольцо бесконечно дифференцируемых функций. Тогда обычное дифференцирование на , задаваемое в математическом анализе и теории функций, является примером отображения (1.4.1). При этом, кольцо бесконечно дифференцируемых функций замкнуто относительно дифференцирования.

Пример 1.4.3 Пусть теперь – кольцо целых функций. Тогда на также можно ввести дифференцирование в привычном смысле. Следует заметить, что в отсутствуют делители нуля, тогда как в примере 1.4.2 они присутствуют. Отсутствие делителей нуля в кольце целых функций влечёт за собой тот факт, что у имеется поле отношений.

Пример 1.4.4 Пусть – некоторое дифференциальное кольцо. Тогда существует порождённое им кольцо многочленов от с коэффициентами из . В случае, когда является полем, то за обозначим поле рациональных функций от . По теореме 1.4.1 дифференцирование, заданное на кольце (поле) может быть продолжено на и . При этом полагается, что , и далее дифференцирование продолжается линейно.

Пример 1.4.5 Пусть – дифференциальное кольцо. Через обозначим кольцо многочленов от бесконечного числа неизвестных , где каждый последующий элемент является производной предыдущего , т.е. если , то . Таким образом мы можем определить дифференцирование в однозначно. Данный процесс называют присоединением дифференциального неизвестного. Проделав эту процедуру, это получаем в результате дифференциальное кольцо, элементы которого называются дифференциальными многочленами. По своей сути, эти элементы представляют собой обычные многочлены от переменной и её производных.

В случае, когда ‒ поле, то кольцо является дифференциальной областью целостности, и теорема 1.4.1 даёт нам возможность единственным образом продолжить дифференцирование на соответствующее поле отношений , элементы которого называются дифференциальными рациональными функциями от .

Определение 1.4.2 [41, с. 8] Пусть – произвольное дифференциальное кольцо. Кольцо , порождённое элементами производная которых равна 0, называют кольцом констант поля .

Причём, в случае, когда является полем, то , соответственно, также будет являться полем. Кроме того, поле констант содержит внутри себя подполе, порожденное единичным элементом .

Немалое значение в изучении особенностей дифференциальных колец имеет их характеристика. По мере усложнения структуры кольца и постепенного превращения его в поле, характеристика играет всё большую роль. Как известно, дифференциальные поля с нулевой характеристикой неплохо изучены, тогда как случай с положительной характеристикой остается более сложным и имеет множество нюансов. Один из них имеет отношение непосредственно к йонсоновости рассматриваемой теории и будет описан в данной диссертации.

Мы рассматриваем поля характеристики и . Приведём важные сведения о дифференциальных полях характеристики 0 и рассмотрим их некоторые теоретико-модельные свойства.

Впервые понятие дифференциального поля зафиксировано в работе А. Робинсона [58]. В ней А. Робинсон описал дифференциальные и дифференциально замкнутые поля следующим образом.

Определение 1.4.3. [58] Дифференциальным полем называется поле , на котором задан оператор дифференцирования такой, что

(1.4.2)

где . Сигнатура, используемая для изучения дифференцильных полей, представляет собой множество . Здесь оператор дифференцирования играет роль одноместного функционального символа. Язык этой сигнатуры в этом и следующем параграфе будем обозначать как .

Таким образом, теория дифференциальых полей характеристики 0 задаётся аксиомами теории полей и аксиомами (1.4.2).

Как было упомянуто выше, каждое дифференциальное поле имеет так называемое подполе констант , состоящее из всех элементов поля, для которых .

Пусть ‒ дифференциальное поле. Тогда над может быть определено кольцо дифференциальных многочленов как следующее кольцо многочленов от бесконечного числа переменных:

где .

Если , то порядком является наибольшее , такое, что встречается в для некоторого . Если ‒ константа, мы говорим, что имеет порядок -1.

Некоторые важные теоретико-модельные свойства теории описаны в параграфе 2.2 В частности, показано, что данная теория является выпуклой.

Что касается свойств JEP и AP, изучением так называемых свойств амальгамирования занимался Б. Йонсон [1], который в качестве примеров теорий, обладающих данными свойствами, привёл DF\_0. Доказательство в [41] представил И. Капланский. А. Робинсон [58], в свою очередь, отметил, что данный факт является следствием существования модельного компаньона у рассматриваемой теории. Следует заметить, что в оригинальном тексте работы [54] при доказательстве вышеупомянутых свойств Л. Блюм ссылается на теорему 0.3.7, утверждающую, что при наличии у универсальной теории модельного компаньона обладает «свойствами амальгамирования», которые подразумевают под собой и свойство амальгамирования, и свойство совместного вложения в нашем понимании. Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 1.4.2 [54] Теория дифферециальных полей характеристики 0 допускает свойства амальгамирования и совместного вложения.

Теперь рассмотрим дифференциальные поля характеристики . Изучением дифференциальных полей положительной характеристики занималась К. Вуд. В своих работах [59], [60], [61] К. Вуд описала основные свойства моделей теории дифференциальных полей характеристики с использованием как алгебраического, так и теоретико-модельного подхода.

Для аксиоматического задания данной теории, аналогично, к стандартным аксиомам теории полей характеристики следует добавить предложения (1.4.2), получая таким образом теорию дифференциальных полей характеристики . Таким образом, теория , как и , является универсально аксиоматизируемой.

Пусть – дифференциальное поле характеристики . Как было определено выше, элемент является константной в , если . Множество констант в замкнуто относительно операций сложения, умножения, вычитания (обратной операции для умножения, с помощью которой мы можем получить противоположный элемент в поле ), деления (аналогично, операции, обратной для умножения), а также дифференцирования. Очевидно, элементы 0 и 1 в поле являются константами. Таким образом, множество констант определяет подмодель в поле , которую называют дифференциальным (под)полем констант в . Кроме того, имеем следующее отношение:

(1.4.)

где – множество всех элементов , возведённых в степень , т.е.

Истинность отношения (1.4.3) вытекает из следующего факта: для каждого . В каждую модель теории вкладывается простое поле характеристики , в том числе оно вкладывается и в поле констант, так как

Таким образом, теория имеет единственную с точностью до изоморфизма простую модель , которая совпадает со своим полем констант.

Следует также заметить, что любое поле характеристики также является моделью теории , так как на нём можно задать тривиальное дифференцирование.

В работе [59] К. Вуд был получен следующий результат:

Теорема 1.4.3 [59] Теория дифференциальных полей характеристики не обладает свойством амальгамирования.

Из этого факта, а также из теоремы 1.2.10 следует, что не может иметь модельного пополнения.

Отсутствие свойства амальгамирования у класса моделей обусловлено существованием констант, не имеющих корней -й степени. К. Вуд была поставлена задача аксиоматизировать класс дифференциальных полей характеристики , допускающий AP, с учётом этого факта. По этой причине в [59] было определено понятие дифференциально совершенного поля характеристики , а также изучены некоторые свойства теории дифференциально совершенных полей характеристики .

Определение 1.4.4 [59] Дифференциально совершенным полем характеристики называется дифференциальное поле характеристики , для которого истинно следующее предложение:

(1.4.)

Таким образом, теория дифференциально совершенных полей характеристики есть теория , дополненная аксиомой (1.4.4), а модели есть модели , замкнутые относительно извлечения корней -й степени.

Следующий факт является следствием определения 1.4.4.

Предложение 1.4.1 Дифференциальное поле характеристики является дифференциально совершенным тогда и только тогда, когда его поле констант совпадает со множеством , т.е.

Заметим, что понятие дифференциальной совершенности не совпадает в общем случае с совершенностью поля в смысле определения 1.1.9, т.е. совершенное дифференциальное поле является дифференциально совершенным, однако обратное, вообще говоря, неверно. Таким образом, имеем следующие два замечания:

Замечание 1.4.1 [24] Каждое дифференциальное поле характеристики 0 является совершенным и дифференциально совершенным.

*Доказательство.* Пусть – дифференциальное поле характеристики . Согласно теореме 1.1.1, оно является совершенным. По определению оно замкнуто относительно извлечения корней -й степени для каждого , следовательно, оно дифференциально совершенно. □

Замечание 1.4.2 [24] Совершенное дифференциальное поле характеристики является дифференциально совершенным. Обратное, вообще говоря, неверно.

*Доказательство.* Пусть – дифференциальное поле характеристики , и пусть совершенно. По теореме 1.1.2 оно также содержит в себе корни -й степени для каждого своего элемента, следовательно, является дифференциально совершенным. Более того, в обоих рассматриваемых случаях поле совпадает со своим полем констант, так как каждый элемент может быть представлен в виде для некоторого подходящего , и, как показывает включение (1.4.3), . Таким образом, все совершенные дифференциальные поля являются полями с тривиальным дифференцированием, при этом все дифференциальные поля характеристики 0 автоматически становятся совершенными и дифференциально совершенными. Теперь пусть – дифференциально совершенное поле характеристики . По теореме 1.1.2, оно будет являться совершенными, если и только если , но в этом случае снова совпадёт со своим полем констант, что рассматривалось выше. В тех случаях, когда , но , дифференциально совершенное поле совершенными являться не будет. □

О теории дифференциально совершенных полей характеристики известны следующие результаты:

Теорема 1.4.4 [59] Теория является взаимно модельно совместным расширением теории .

Теорема 1.4.5 [60] Для любого дифференциального поля существует расширение такое, что является дифференциально совершенным полем.

Теорема 1.4.6 [59] обладает свойством амальгамирования.

Как мы можем заметить, теория не является универсальной теорией в стандартном языке дифференциальных полей, так как аксиома (1.4.4) является -предложением, а не -предложением. Впрочем, индуктивна. Добиться универсальной аксиоматизируемости можно, добавив в сигнатуру новый одноместный функциональный символ , с помощью которого аксиому (1.4.4) мы заменим на следующее предложение, как это сделала К. Вуд [60]:

Однако, так как полученная теория будет уже теорией нового языка

рассматривать её в контексте связи с затруднительно. Этому есть две причины. Во-первых, при использовании обогащённой сигнатуры простое расширение моделей данной  -теории в теоретико-модельном смысле в целом отличается от дифференциально-алгебраического простого расширения дифференциально совершенного поля, поскольку последнее может содержать константы без корней -й степени. Во-вторых, любое экзистенциальное -предложение эквивалентно дизъюнкции конечного числа конъюнкций дифференциальных полиномиальных уравнений и неравенств, при этом в экзистенциальных предложениях языка   может присутствовать функциональный символ . Однако мы можем несколько исправить эту ситуацию. Пусть ‒ такое экзистенциальное -предложение, и пусть оно эквивалентно предложению

, где .

Мы можем заменить вхождение каждого терма вида в предложение , скажем, на переменную . Также в каждую конъюнкцию, содержащую , добавим предложение , а затем свяжем переменную , добавив в начале полученной формулы . Таким образом мы получим экзистенциальное -предложение , такое, что

Далее мы можем работать с вместо  , принимая во внимание дополнительные кванторы в .

## Дифференциальное замыкание дифференциального поля

В 1959 году А. Робинсон [58] показал, что теория дифференциальных полей имеет модельное пополнение. В этой же работе Робинсон также ввел понятие дифференциально замкнутого поля и поставил перед собой задачу определить аксиомы теории дифференциально замкнутых полей (), что представляло большую сложность для дифференциальных алгебраистов на тот момент. Изучив понятия алгебраической замкнутости, вещественной замкнутости и хенселизации, он пришел к выводу, что должна обладать следующими тремя свойства:

1. Каждое дифференциально замкнутое поле является дифференциальным полем.
2. Каждое дифференциальное поле характеристики 0 может быть расширено до некоторого дифференциально замкнутого поля.
3. Пусть ‒ дифференциальное поле характеристики 0, и пусть ‒ конечная система дифференциальных уравнений и неравенств в нескольких переменных с коэффициентами в . Пусть и ‒ дифференциально замкнутые расширения . Тогда имеет решение в тогда и только тогда, когда имеет решение в . Другими словами, дифференциальное уравнение в переменных является многочленом от переменных при этом и . Порядок дифференциального уравнения равен максимуму из .

Свойства 1 и 2 являются вполне понятными и естественными. К выводу о свойстве 3 Робинсон пришёл благодаря теореме о нулях (Nullstellensatz) Гильберта, алгоритму Штурма и лемме Хенселя. Робинсон показал на чисто теоретико-модельном языке, что существует не более одной теории, удовлетворяющей всем трём вышеперечисленным свойствам. Результат в общем виде звучит следующим образом: теория имеет не более одного модельного пополнения. После с использованием некоторых алгебраических фактов из работы Зейденберга [62] Робинсоном было показано, что существует по крайней мере одна теория, удовлетворяющая свойствам 1, 2 и 3. Наконец, он назвал эту единственную теорию, удовлетворяющую этим требованиям, теорией дифференциально замкнутых полей характеристики 0, т.е. .

Единственный недостаток результата Робинсоном о является следствием общности предложенного им метода. К сожалению, как отмечает Дж. Сакс [51], Робинсон не сформулировал подходящих аксиом для *,* а лишь доказал, что они существуют. Недостающие аксиомы были сформулированы Л. Блюм [54]: они состоят из аксиом теории , а также следующих двух предложений:

1. Каждый неконстантный полином от одной переменной имеет решение.
2. Если и ‒ дифференциальные уравнения, такие, что порядок выше порядка , то имеет решение, не являющееся решением .

Таким образом, дифференциально замкнутое поле определяется следующим образом.

Определение 1.5.1 [54] Дифференциальное поле называется дифференциально замкнутым, если всякий раз, когда имеет ненулевое значение и порядок больше порядка , существует такое, что и .

Особенность аксиом, сформулированных Блюм, заключается в том, что в них не упоминаются дифференциальные уравнения более чем с одной переменной, но, тем не менее, из них следует свойство 3 (выше), имеющее отношение к уравнениям с несколькими переменными. Хорошо известно, что сведение нескольких переменных к одной является достаточно распространённым приёмом в алгебре. Примером применения этой техники может служить следующее: поле алгебраически замкнуто, если каждый непостоянный многочлен от одной переменной имеет решение, но каждое алгебраически замкнутое поле удовлетворяет теореме о нулях Гильберта, которая относится к многочленам от нескольких переменных. Редукция, т.е. сведение случая с несколькими переменными к случаю с одной переменной стала в итоге достаточно распространенным методом, предложенным Блюм, имеющим широкое применение в изучении модельных пополнений всех универсальных теорий [63, с. 94].

Стоит также упомянуть, что позже, отвечая на вопрос Робинсона о модельном пополнении теории дифференциальных полей, Б. Пуаза [64] показал, что является модельным пополнением и, более того, полной теорией. Таким образом, имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.5.1 [64] Теория полна.

Теорема 1.5.2 [64] Теория является модельным пополнением теории .

Пусть ‒ дифференциально замкнутое расширение дифференциального поля характеристики называется простым расширением над , если для каждого дифференциально замкнутого поля , расширяющего , существует мономорфизм (сохраняющий операции над полем и производную) , расширяющий отображение тождеств на ; т.е. простое дифференциально замкнутое расширение содержится в каждом дифференциально замкнутом расширении. Блюм [54] показала, что каждое дифференциальное поле имеет простое дифференциально замкнутое расширение, и предположила, что оно единственно. Ее результат вытекает из общего результата Морли [53]: если ‒ -стабильная теория и является подструктурой модели из , то существует простое расширение модели . Блюм оставалось только убедиться, что является -стабильной теорией (то есть тотально трансцендентной), и это сводилось к замечанию, что счетное дифференциальное поле характеристики 0 имеет только счетно много простых расширений с точностью до изоморфизма. Другими словами, два простых расширения и изоморфны, если отображение тождества на может быть расширено до изоморфизма и , который переводит в .

Типичным примером общего подхода Морли является доказательство следующего утверждения: пусть ‒ конечная система дифференциальных уравнений и неравенств в одной переменной над с решением в некотором расширении , тогда существует конечная система такая, что имеет решение в некотором расширении из и такая, что все такие решения изоморфны над . Доказательство достаточно общее и применимо ко всем -стабильных теорий. При конструировании прямого предела можно предположить, что является счетной. Пусть есть множество всех классов изоморфизмов простых расширений из . Для каждой конечной системы над пусть есть множество всех простых расширений таких, что является решением . Зафиксируем в качестве основы для топологии . Тогда компактно, хаусдорфово и абсолютно несвязно, следовательно, является пространством Стоуна. Поскольку является счетным пространством Стоуна, его изолированные точки плотны. непусто, поэтому существует такое, что имеет только один элемент.

Метод Морли основан на определенном контравариантном функторе , который связывает пространство Стоуна с каждой подструктурой . Наиболее важным свойством является его тенденция сохранять пределы. Более подробная информация о свойстве приводится в [63].

С. Шелах в своей работе [65] показал, что расширение простой модели Морли единственно для всех -стабильных теорий. Его доказательство представляет собой сложную индукцию по рангу Морли простого расширения, обобщение понятия порядка дифференциального уравнения с конечных целых чисел на счетные ординалы. (Важность -стабильных теорий состоит в том, что каждое простое расширение модели -стабильной теории имеет ранг Морли, что позволяет доказывать теоремы о -стабильных теориях индукцией по рангу). Отсюда следует, что любые два простых дифференциально замкнутых расширения дифференциального поля характеристики 0 изоморфны на . Через обозначим единственное простое дифференциально замкнутое  
расширение . По своей сути, является дифференциальным замыканием .

Определение 1.5.2 [51] Замыкание дифференциального поля называется минимальным на , если не существует дифференциально замкыкания такого, что и .

В рассматриваемом нами случае мы не можем утверждать, что минимально для любого . Алгебраическое замыкание, вещественное замыкание и хенселизация обладают соответствующим свойством минимальности, поэтому логично было бы предположить, что дифференциальное замыкание также обладает таким свойством. Пусть – поле рациональных чисел, тогда есть наименьшее дифференциально замкнутое поле характеристики 0. Сакс [51] предполагал, что минимально над однако о известен лишь результат Л. Харрингтона [66] о том, что является вычислимым. (Счетное дифференциальное поле вычислимо, если существует взаимно-однозначное соответствие между и множеством натуральных чисел, которое преобразует сложение, умножение и производную от в вычислимые функции). Доказательство Харрингтона сочетает в себе конструкцию в стиле Хенкина и теорему о конечном базисе для идеалов радикальных дифференциалов. Его конструкция далеко не очевидна, потому что не известно ни одного алгоритма для решения вопроса следующего вида: пусть ‒ конечная система дифференциальных уравнений и неравенств в нескольких переменных над дифференциальным полем характеристики 0; являются ли все решения во всех расширениях изоморфными над ? Стоит заметить, что существует алгоритм [62] для определения того, имеет ли имеет ли решение в любом расширении . Данный алгоритм сводится к вычислению нескольких дифференциальных уравнений с коэффициентами из и выяснению в каждом случае, является ли полученное решение ненулевым.

Доказательство единственности дифференциального замыкания, полученное С. Шелахом [65], также дает множество нетривиальных автоморфизмов . Напомним некоторые определения.

Определение 1.5.3 [65] Пусть – дифференциальное поле и пусть . и называются сопряжёнными над , если они являются решениями одних и тех же дифференциальных уравнений над .

Определение 1.5.4 [65] называется множеством сопряженных, если каждое его конечное подмножество является таковым; является конечным множеством сопряженных, если каждая перестановка из является решением одних и тех же конечных систем дифференциальных уравнений над , что и .

Предположим, что являются сопряжёнными над . Тогда тождественное отображение на может быть продолжено до автоморфизма , отображающего в . Стоит также заметить, что по общим теоретико-модельным принципам, минимально над тогда и только тогда, когда каждый множество сопряженных в конечно над .

Л. Блюм было сделано следующее предположение: если дифференциально замкнуто и является решением некоторого дифференциального уравнения на , то имеет решение в . Из предположения Блюм тривиально следует, что является минимальным над .

Изучение свойств теории дифференциально замкнутых полей характеристики в настоящее время несколько более затруднительно. Связь теорий и аналогична связи и К. Вуд [60] описывала аксиоматическое построение следующим образом. Пусть – предложение в   (но фактически, является -предложением), утверждающее, что для каждой пары дифференциальных многочленов и от одной дифференциальной переменной, таких, что и имеют порядок и степень не больше и порядок выше, чем порядок , для любого целого , найдётся решение для уравнений . Тогда

В свой работе [67] К. Вуд показала, что обладает всеми тремя свойствами, описанными для А. Робинсоном. В частности, верны следующие теоремы:

Теорема 1.5.3 [61] Теория полна и модельно полна.

Теорема 1.5.4 [67] Теория является модельным компаньоном теории .

Кроме того, известен следующий результат.

Теорема 1.5.5 [60] Теория является модельным пополнением .

Однако Вуд также показала, что не -стабильна, и на данный момент вопрос о существовании простых дифференциально замкнутых расширений дифференциальных полей характеристики остаётся открытым.

# Йонсоновские теории

## Йонсоновские теории

Как уже было упомянуто во введении, традиционно исследования в области теории моделей разделяются на два условных направления, названных Г.Дж. Кейслером в [32] «восточным» и «западным» направлениями. Данная работа относится именно к «восточной» теории моделей. При этом, в силу сложности и обширности стоящих перед нами вопросов, мы вынуждены придерживаться некоторых ограничений для получения более плодотворных результатов. Принимая во внимание важнейшие синтаксические и семантические свойства многих классических алгебр, мы ограничиваемся изучением индуктивных, или, что эквивалентно, -аксиоматизируемых теорий. Среди индуктивных теорий нами выделяется особый подкласс, а именно подкласс йонсоновских теорий, занимающий уникальное место в теоретико-модельных исследованиях, берущих начало в работах Абрахама Робинсона и предложенном им подходе.

Мы работаем в рамках определения йонсоновской теории, данного в русскоязычном издании монографии Дж. Барвайса «Справочная книга по математической логике. Том 1. Теория моделей» [32].

Определение 2.1.1 [32, с. 80] Непротиворечивое множество предложений языка называется йонсоновской теорией, если выполнены следующие условия:

1. имеет по меньшей мере одну бесконечную модель;
2. является индуктивной теорией, или, что эквивалентно, аксиоматизируема с помощью универсально-экзистенциальных предложений;
3. допускает свойство совместного вложения (JEP);
4. допускает свойство амальгамирования (AP).

Существует большое количество примеров йонсоновских теорий. Многие из них являются теориями классических классов алгебр. Приведём некоторые из них:

1. теория моноидов,
2. теория групп,
3. теория абелевых групп,
4. теория полей фиксированной характеристики,
5. теория всех булевых алгебр,
6. теория решёток,
7. теория линейных порядков,
8. теория модулей и т.д.

Для изучения йонсоновских теорий в последние десятилетия был создан особый теоретический аппарат, включающий в себя различные методы и техники. Принято считать, что первые результаты по изучению основных теоретико-модельных свойств, имеющих непосредственное отношение к йонсоновским теориям, а именно свойств амальгамирования и совместного сложения, индуктивности теории, насыщенности моделей в контексте их комбинирования друг с другом, принадлежат Б. Йонсону [2], в честь которого йонсоновские теории и получили своё название. Следует заметить, что Б. Йонсоном использовался подход, основанный на технике «восточной» теории моделей, и в этом ключе Б. Йонсоном уделялось значительное внимание исследованию насыщенных моделей йонсоновских теорий, тогда как М. Морли и Р.Л. Воот [3] предпочитали инструментарий «западной» теории моделей и, соответственно, привели описание насыщенных моделей таких теорий уже в ином представлении. При этом также заметим, что в силу различий между двумя подходами, понятие насыщенности в «восточном» смысле не эквивалентно одноименному понятию в «западном» ключе. По этой причине мы придерживаемся только одного выбранного нами подхода, а именно подхода Б. Йонсона, и понятия, описываемые в данном параграфе, несут дух «восточной» теории моделей.

В последнее десятилетие одним из основных центров исследования йонсоновских теорий стала Карагандинская школа теории моделей, основанная Мустафиным Т.Г. и успешно продолжающая свою работу под руководством Ешкеева А.Р. В целях всестороннего изучения класса йонсоновским теорий основателем Карагандинской школы теории моделей Мустафиным Т.Г. был создан особый теоретический аппарат, в рамках которого в последующем Мустафиным Т.Г. и Ешкеевым А.Р. была разработана методология исследования данного класса теорий, введены различные новые понятия, связанные с йонсоновскими теориями, и получено множество результатов. Так, например, в работе [68] введено и изучено понятие центрального типа фиксированной йонсоновской теории, в [69] определено понятие гибрида йонсоновских теорий. Кроме того, появились «йонсоновские аналоги» различных понятий, используемых в работе с полными теориями. Так, например, Ешкеевым А.Р. в работе [70] была определена йонсоновская стабильность йонсоновских теорий, в [71] определён йонсоновский форкинг и описано свойство независимости в йонсоновском смысле, в работе [72] предложены йонсоновские аналоги синтаксического и семантического подобия теорий, ранее определённых Мустафиным Т.Г. в [73] для исследования полных теорий, в работе [74] определено понятие семантической пары – аналог понятия прекрасной пары, предложенного Б. Пуаза в [75], в [76] авторами были описаны аналоги различных типов малых моделей в смысле работы [77] в рамках изучения йонсоновских теорий, и так далее.

В данной диссертационной работе освещаются лишь основные труды, имеющие отношение к исследованию йонсоновских теорий, и приводятся только необходимые для данного исследования понятия и известные результаты.

Возвращаясь к вопросу различия между подходами к изучению насыщенных моделей, отметим, что в данном исследовании мы используем «восточную» технику, и для конкретизации установленных рамок нуждаемся в первую очередь в определениях -универсальной и -однородной модели. Описываемый нами в данном исследовании вариант определений -универсальности и -однородности моделей был предложен Мустафиным Е.Т. в стат ье [78].

Определение 2.1.2 [78] Пусть , и пусть – -теория. Модель называется -универсальной моделью , если всякая модель такая, что , может быть изоморфно вложена в .

Рисунок 2.1.1 демонстрирует диаграмму изоморфных вложений произвольных моделей мощности меньше в модель также мощности меньше в случае, когда – -универсальная модель теории .

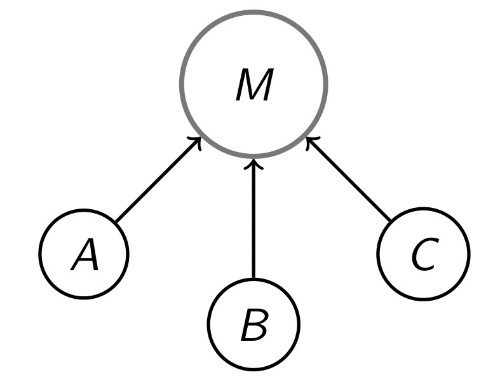


Рисунок 2.1. – -универсальная модель теории (диаграмма вложений)

Определение 2.1.3 [78] Пусть , и пусть – -теория. Модель будет называться -однородной моделью , если для любых двух моделей , изоморфно вкладывающихся в , таких, что и , и любого изоморфизма следует, что для всякого расширения модели , такого, что и , и изоморфно вкладывающегося в , найдутся расширение модели , изоморфно вкладывающееся в , и изоморфизм , продолжающий .

На рисунке 2.1.2 схематично показана диаграмма изоморфных вложений произвольных моделей , в соответствующие расширения в случае, когда – -однородная модель .

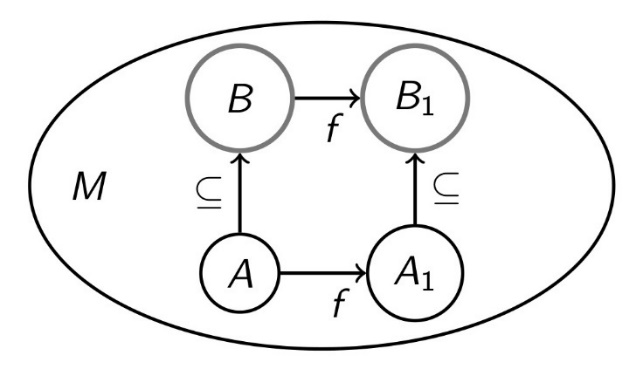


Рисунок 2.1.2 – -однородная модель теории (диаграмма вложений)

Определение 2.1.4 [32, с. 137] Пусть . Структура языка называется -насыщенной, если для любого подмножества мощности меньше каждый тип в реализуется в . будет называться насыщенной, если она -насыщенна и . В случае, когда является -насыщенной структурой языка и моделью -теории , будет называться -насыщенной моделью теории .

Следует заметить, что в «западном» варианте теоретико-модельных исследований из однородности и универсальности модели следует её насыщенность, тогда как в контексте «восточной» теории моделей это следствие не всегда имеет место. В этом и заключается одно из основных отличий работ М. Морли и Р.Т. Воота и работ Б. Йонсона. Заметим также, что, так как мы придерживаемся понятий «восточной» теории моделей, и определения, данные выше, несут в себе характер именного «восточного» направления.

Одним из особых понятий в контексте изучения йонсоновских теорий является понятие семантической модели йонсоновской теории. Семантическая модель представляет собой семантический инвариант рассматриваемой йонсоновской теории, и поэтому для нас представляется возможным изучить свойства заданной йонсоновской теории и её класса моделей посредством описания её семантической модели. Напомним определение семантической модели.

Определение 2.1.5 [78] Пусть – йонсоновская теория. Семантической моделью теории называется структура мощности , такая, что и является -однородной -универсальной моделью теории .

Следующая теорема принадлежит Е.Т. Мустафину и показывает, что для любой йонсоновской теории её семантическая модель является её семантическим инвариантом.

Теорема 2.1.1 [78] Пусть – индуктивная теория. является йонсоновской теорией, если и только если существует -однородная -универсальная модель .

Следующий результат также принадлежит Е.Т. Мустафину:

Теорема 2.1.2 [78] Пусть – йонсоновская теория, – её семантическая модель. Тогда .

Определение 2.1.6 [78] Йонсоновская теория называется совершенной, если её семантическая модель -насыщенна.

Хорошо известен следующий результат, называемый критерием совершенности йонсоновской теории и доказанный Ешкеевым А.Р.:

Теорема 2.1.3 [79, с. 162] Пусть – йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1. – совершенная йонсоновская теория;
2. – модельный компаньон теории ;
3. .

Определение 2.1.7 [79, с. 154] Пусть – йонсоновская теория. Тогда теория называется центром теории .

Как следствие определения 2.1.7 известен следующий факт.

Следствие 2.1.1 [79, с. 155] Пусть – йонсоновская теория, – ее центр. Тогда и взаимно модельно совместны.

Следующее определение имеет большое значение для данного диссертационного исследования и было введено Мустафиным Т.Г.

Определение 2.1.8 [79, с. 175] Пусть и – йонсоновские теории языка , , – их семантические модели, соответственно. и называются косемантичными йонсоновскими теориями, если они имеют общую семантическую модель, т.е. .

Отношение косемантичности йонсоновских теорий обозначается следующим образом: .

Свойства косемантичных йонсоновских теорий также изучались Мустафиным Е.Т. [78]

Отношение косемантичности йонсоновских теорий служит важным техническим инструментом в аппарате изучения йонсоновских и, вообще говоря, неполных теорий в первую очередь потому, что является отношением эквивалентности. Покажем это.

1. Если – йосноновская теория, то, очевидно, , так как , т.е. отношение косемантичности теорий рефлексивно.
2. Пусть , тогда , так как, если , то , т.е. отношение косемантичности теорий также является и симметричным.
3. Пусть и , тогда в силу того, что, если и , то , что говорит о транзитивности данного отношения.

В рамках изучения йонсоновских теорий косемантичность используется в первую очередь как инструмент сравнения йонсоновских теорий с позиции исследования их семантических инвариантов, то есть семантических моделей. Многие важные теоретико-модельные свойства косемантичных йонсоновских совпадают, а потому при изучении этих свойств мы можем работать не просто с одной йонсоновской теорией, а с целым классом теорий, косемантичных ей. Такой подход имеет прямое отношение к так называемому семантическому методу, предложенному Ешкеевым А.Р. и успешно используемому изучении йонсоновских и, вообще говоря, индуктивных теорий.

Хорошо известен также следующий факт:

Предложение 2.1.1 [79, с. 175] Две йонсонвские теории и косемантичны тогда и только тогда, когда их центры и совпадают.

Таким образом, мы можем говорить о косемантичности йонсоновских теорий, опираясь на информацию об их центрах.

Приведём примеры косемантичных и не косемантичных йонсоновских теорий.

Пример 2.1.1 Пусть – язык полей, – теория полей характеристики , где – нуль или простое число, – теория алгебраически замкнутых полей той же характеристики. Тогда .

Пример 2.1.2 Пусть – язык групп, – теория групп, – теория абелевых групп. и являются не косемантичными йонсоновскими теориями.

Следующее утверждение известно из работы Мустафина Е.Т. [78] и демонстрирует связь двух бинарных отношений между теориями – косемантичностью и взаимной модельной совместностью.

Предложение 2.1.2 [78] Пусть – йонсоновская теория, ‒ индуктивная теория, такая, что и взаимно модельно совместны. Тогда – йонсоновская теория, косемантичная .

Как было упомянуто выше, при работе с йонсоновскими теориями использовать инструмента из арсенала для изучения полных теорий зачастую может быть нецелесообразно в силу того факта, что йонсоновские теории, как следует из их определения, не являются, вообще говоря, полными. Впрочем, между йонсоновскими теориями и полными теориями, несомненно, существует некоторая связь. Так, в параграфе 2.3 представлено достаточное условие йонсоновости полной теории, полученное в рамках данного диссертационного исследования (теорема 2.3.2) Однако в случае, когда рассматриваемая йонсоновская теория полной не является, как правило, мы применяем следующие два метода или же их комбинацию.

Первый метод заключается в переносе свойств полных теорий на случай неполных теорий. Заметим, что некоторые свойства полных теорий и йонсоновских теорий пересекаются. Например, полные теории допускают свойства совместного вложения, и этим же свойством по своему определению обладают йонсоновские теории. К тому же, у любой йонсоновской теории существует семантическая модель согласно теореме 2.1.1 и, разумеется, центр (определение 2.1.7). Центр йонсоновской теории является полной теорией, что позволяет нам использовать инструменты аппарата изучения полных теорий для описания его свойств. К тому же, зачастую йонсоновские теории всё же имеют некоторую степени полноты, то есть могут быть, например, полными для универсальных предложений или универсально-экзистенциальных предложений.

Второй метод носит название «семантического» и был предложен Ешкеевым А.Р. Суть данного метода заключается в изучении свойств заданной йонсоновской теории посредством описания свойств её семантической модели. Так как одна и та же структура может быть семантической моделью для различных йонсоновских теорий рассматриваемого языка, мы имеем возможность с помощью такого метода описывать целый класс йонсоновских теорий, семантическая модель которхы совпадает. Кроме того, работая с данным методом, мы исследуем алгебраические структуры через описание теорий этих структур в фиксированном языке первого порядка. И основным инструментом семантического метода является понятие йонсоновского спектра, предложенное Ешкеевым А.Р.

Пусть – класс некоторых -структур. При работе с данным классом мы строим спектр всех йонсоновских теорий, которым удовлетворяет каждая структура данного класса. Таким образом, имеем следующее определение.

Определение 2.1.9 [80] Пусть – класс -структур. Йонсоновским спектром класса мы называем следующее множество теорий:

йонсоновская теория и

Понятие йонсоновского спектра было определено в работе [80], где авторы представили йонсоновский аналог свойства Шрёдера-Бернштейна для абелевых групп, использовав для этого йонсоновский спектр. Также это понятие использовалось авторами в [81] для описания свойств -модулей и обобщения отношения элементарной эквивалентности между структурами.

В параграфах 2.5 и 2.6 будут продемонстрированы результаты, связанные с описанием йонсоновского спектра как алгебраической структуры, а также показаны некоторые свойства классов косемантичности фиксированного йонсоновского спектра.

Кроме того, понятие йонсоновского спектра было использовано при обобщении понятия элементарной эквивалентности -структур. В следующем определении описано специальное бинарное отношение между произвольными структурами языка первого порядка, являющееся отношением эквивалентности и позволяющее сравнивать структуры с помощью их йонсоновских теорий.

Определение 2.1.10 [79] Две -структуры и называются косемантичными, если верно следующее:

Данное определение было предложено Ешкеевым А.Р. В параграфе 2.6 оно будет обобщено на случай классов -структур.

Мы можем рассмотреть особый случай построения йонсоновского спектра, когда работаем только с универсально-аксиоматизируемыми йонсоновскими теориями. Легко заметить, что многие классические примеры йонсоновских теорий являются как раз универсально аксиоматизируемыми теориями, например, теория групп, теория абелевых групп и так далее. Следуя работе А. Пилая [82], Ешкеевым А.Р. было предложено называть такие теории робинсоновскими. Таким образом, имеем следующее определение.

Определение 2.1.11 [28] Робинсоновской теорией называется универсально аксиоматизируемая йонсоновская теория.

Основываясь на этом определении, для любого класса -структур мы можем построить йонсоновский спектр, состоящий только из робинсоновских теорий. Такой спектр мы будем называть робинсоновским.

Определение 2.1.12 [81] Пусть – класс -структур. Робинсоновским спектром класса мы называем следующее множество теорий:

робинсоновская теория и

В параграфе 2.4 будет продемонстрирован важный результат, описывающий структуру робинсоновского спектра произвольного класса -структур.

## Примеры йонсоновских и нейонсоновских теорий, обеспеченные обогащением сигнатуры теории полей функциональным символом дифференциала

В данном параграфе будет показано, что теории дифферециальных полей и дифференциально замкнутых полей характеристики 0, теория дифференицально совершенных полей и теория дифференциально замкнутых полей положительной характеристики являются совершенными йонсоновскими теориями. Также будут показаны некоторые важные теоретико-модельные свойства данных теорий. Результаты данного параграфа опубликованы в статье [24].

Приступим к рассмотрению теоретико-модельных свойств дифференциальных полей с точки зрения изучения йонсоновских теорий. Пусть – теория дифференциальных полей характеристики 0.

Теорема 2.2.1 [24] – йонсоновская теория.

*Доказательство*. 1) Легко видеть, что имеет бесконечные модели.

2) Так как –-аксиоматизируемая теория, она является и -теорией. А значит, она индуктивна.

3-4) Как уже было отмечено в теореме 1.4.2, обладает свойством амальгамирования (АР) и свойством совместного вложения (JEP). Факт наличия AP у данной теории верен также в силу универсальной аксиоматизируемости и существования модельного пополнения . Причём, в рассматриваемом случае для свойство JEP следует из AP: два дифференциальных поля и всегда имеют непустое пересечение, которое также будет являться дифференциальным полем (в частности, у них может быть общее поле констант), изоморфно вкладывающимся в оба эти поля. Тогда в силу AP существуют изоморфные вложения и в некоторое дифференциальное поле . Роль может играть, например, композит полей и ‒ пересечение всех дифференциальных полей характеристики 0, содержащих и , на котором соответствующим образом продолжено дифференцирование. □

Теорема 2.2.2 [24] – совершенная йонсоновская теория.

*Доказательство*. Доказательство следует из факта существования у модельного пополнения, которым является . Проведём его более подробно. Согласно теореме 1.5.2, у теории дифференциальных полей характеристики 0 имеется модельное пополнение теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0, которая, конечно же, является также и её модельным компаньоном. Кроме того, как гласит теорема 2.2.2, у в силу её йонсоновости должна быть семантическая модель и, соответственно, центр . Если , то в силу теоремы 2.1.3 будет совершенной. Покажем это.

Доказательство будем проводить от противного: допустим, . В этом случае, так как полна и модельно полна, для любого предложения рассматриваемой сигнатуры верно либо

(.)

либо

(.)

Однако и , и , и , очевидно, модельно совместны, и при этом их модели изоморфно вкладываются в семантическую модель теории . Используя этот факт, мы можем с легкостью получить противоречие для обоих случаев (2.2.1) и (2.2.2). А значит, . Следовательно, – совершенная йонсоновская теория. □

Таким образом, как мы можем видеть, результат наличия свойства AP вытекает из наличия AP у теории дифференциальных полей характеристики 0. Этот факт является следствием того, что – сильно выпуклая теория.

Теорема 2.2.3 [24] – совершенная йонсоновская теория.

*Доказательство*. Для начала покажем, что теории – йонсоновская.

1. имеет бесконечные модели;
2. является -теорией, а следовательно, она индуктивна;
3. – модельно полная теория, а значит, и по теореме 1.2.7 обладает свойством амальгамирования;
4. Наличие свойства совместного вложения следует из того, что теория является полной.

Совершенность следует снова из того факта, что рассматриваемая теория является модельно полной, а значит, представляет модельный компаньон для самой себя. □

Следующие результаты демонстрируют поведение теорий , и с точки зрения изучения йонсоновских теорий.

Теорема 2.2.4 [24] Теория дифференциальных полей характеристики не является йонсоновской теорией.

*Доказательство*. Так как, согласно теореме 1.4.3, не обладает свойством амальгамирования, она, следуя определению 2.1.1 не является йонсоновской. □

Данный факт представляется нам примечательным в силу того, что, как было сказано ранее, хоть теория полей характеристики в стандартном языке полей является йонсоновской, введение нового одноместного функционального символа , интерпретацией которого является дифференцирование, в рассматриваемую сигнатуру лишает этого свойства. При этом йонсоновость появляется при преобразовании дифференциального поля характеристики 0 в дифференциально совершенное:

Теорема 2.2.5 [24] – совершенная йонсоновская теория.

*Доказательство*. Снова проведём доказательство, следуя определению йонсоновской теории.

1. , очевидно, обладает бесконечными моделями;
2. является -теорией, следовательно, данная теория индуктивна;
3. допускает AP по теореме 1.4.6;
4. Как было упомянуто выше, любое поле констант в дифференциальном поле содержит подполе, порождённое единичным элементом. Такое поле является дифференциально совершенным по определению и может служить моделью , которая изоморфна вкладывается в любых два дифференциально совершенных поля и . Далее в силу наличия AP найдётся такая модель , в которую изоморфно вкладываются и . Их этого следует, что теория допускает JEP.

Доказательство совершенности аналогично доказательству теоремы 7 и следует из того факта, что обладает модельным пополнением (и, соответственно, модельным компаньоном), которым является теория , как утверждает теорема 1.5.5. □

Теорема 2.2.6 [24] – совершенная йонсоновская теория.

*Доказательство*. В первую очередь покажем, что теория – йонсоновская.

1. имеет бесконечные модели;
2. универсально-экзистенциально аксиоматизируема, следовательно, она индуктивна;
3. , согласно теореме 1.5.3, модельно полна, а значит, обладает свойством амальгамирования как следствие теоремы 1.2.7.
4. Из [59] известно, что теория имеет простую модель , которая единственна. Поскольку каждое дифференциально замкнутое поле является дифференциальным, это означает, что для любых двух моделей и из существует модель , которая может быть вложена в и , и далее в силу наличия свойства амальгамирования существует модель такая, что и вкладывается в . Это значит, что теория допускает свойство совместного вложения. □

Заметим, что, хоть не является йонсоновской теорией, она обладает модельным пополнением , являющимся йонсоновской теорий, при этом совершенной (в йонсоновском смысле). При этом другим важным замечанием, которое мы можем сделать на основе полученных результатов, является следующий факт: сепарабельность подполя констант дифференциального поля является достаточным условием для того, чтобы теория дифференциальных полей заданной характеритсики была совершенной йонсоновской.

Теперь рассмотрим некоторые важные теоретико-модельные свойства теорий , , с точки зрения классической робинсоновской теории моделей. Как ранее было упомянуто, А. Робинсоном были введены определения выпуклой и сильно выпуклой теории (определение 1.2.2), и далее мы рассмотрим свойства теорий , , с точки зрения данных определений.

Теорема 2.2.7 [24] Теория является сильно выпуклой.

*Доказательство.* Пусть – дифференциальное поле характеристики 0, – также дифференциальные поля характеристики 0. Хорошо известно, что пересечение двух полей определённой характеристики является полем той же характеристики. Дифференцирование на поле может быть определено так же, как и в полях или . Таким образом, является дифференциальным полем характеристики 0, и теория является выпуклой в соответствии с определением 1.2.2. Кроме того, выпуклость теории следует из её универсальной аксиоматизируемости и теоремы 1.2.1. □

Аналогичный результат верен и для теории дифференциальных полей характеристики :

Теорема 2.2.8 [24] Теория − сильно выпуклая теория.

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2.7. □

Теперь рассмотрим теорию дифференциально совершенных полей характеристики в языке . не является универсальной теорией в языке , однако для неё верен следующий результат:

Теорема 2.2.9 [24] Теория является сильно выпуклой теорией.

*Доказательство.* Проведём доказательство подробно. Пусть – некоторое дифференциально совершенное поле характеристики , и пусть и – два его дифференциально совершенных подполя, т.е. и . Рассмотрим пересечение . Как уже было упомянуто выше, пересечение двух полей всегда не пусто. Согласно теореме 2.2.8, данное пересечение также представляет собой дифференциальное поле характеристики . Осталось показать его дифференциальную совершенность. Рассмотрим произвольный элемент . Так как поле является дифференциально совершенным, и , где – поле констант дифференциального поля . Кроме того, аналогично, и , где есть поле констант дифференциального поля . Следовательно, и , т.е. , где – поле констант дифференциального поля . Теперь покажем, что . Предположим, что . Тогда найдётся некоторый элемент , и, следовательно, . Так как дифференцирование на поле продолжает дифференцирование на поле , в поле также равно 0. То же мы можем сказать и относительно поля . Это значит, что в полях и элемент принадлежит и соответственно. Тогда, согласно определению 1.4.4, и , а значит, . Из этого следует, что и согласно предложению 1.4.1 – дифференциально совершенное поле характеристики . Таким образом, пересечение двух произвольных подмоделей любой модели теории также является моделью этой теории, и – сильно выпуклая теория. □

Далее в параграфе 2.3 на основании результатов теорем 2.2.7-2.2.9 будут сделаны выводы о теориях , , .

## AP-теории, JEP-теории, AJ-теории как частные случаи йонсоновских теорий

Данный параграф посвящён исследованию взаимосвязи свойств амальгамирования и совместного вложения классов моделей индуктивных теорий. В параграфе будут представлены определения особых подклассов теорий, обладающих данными свойствами и для которых эти свойства являются логически связанными, а также показаны некоторые семантические и синтаксические достаточные условия принадлежности рассматриваемой теории к одному из этих подклассов.

Результаты, представленные в данном параграфе, были опубликованы в работе [24].

Напомним, что определения свойств амальгамирования и совместного вложения были даны в параграфе 1.2 (определение 1.2.5 и определение 1.2.6).

Наличие либо отсутствие данных свойств у класса моделей исследуемой теории является одной из важнейших характеристик этой теории и, хоть изначально возможность таких особых видов вложений моделей внутри класса моделей рассматривалась и была интересна именно с алгебраической точки зрения, AP и JEP уже давно стали классическими понятиями в контексте теоретико-модельных исследований.

Как было уже упомянуто, в рамках данного диссертационного исследования изучаются различные свойства йонсоновских теорий. В параграфе 2.2 было показано, что теория дифференциальных полей характеристики 0 и теория дифференциально совершенных полей характеристики являются йонсоновскими, при этом теория дифференциальных полей характеристики йонсоновской не является по причине отсутствия свойства амальгамирования. Данный случай представляется нам интересным, и именно он стал причиной начала изучения такого типа теорий с точки зрения взаимосвязи свойств амальгамирования и совместного вложения.

Под взаимосвязью свойств AP и JEP мы будем подразумевать импликацию одного свойства из другого и их логическую эквивалентность. Наша цель – рассмотреть особые случаи, когда такие логические взаимосвязи представляются возможными. Однако в первую очередь следует заметить, что общем случае, как показал У. Форрест в [83], свойства амальгамирования и совместного вложения не следуют друг из друга, т.е. являются независимыми. В своей работе У. Форрест, используя инструменты теории моделей для полных теорий, строит особые классы алгебр и реляционных структур, удовлетворяющие некоторым естественным алгебраическим условиям и называемые универсальными классами. Приведём определение универсального класса.

Определение 2.3.1 [83] Класс структур языка называется универсальным классом, если найдётся универсально аксиоматизируемая -теория , такая, что .

На примере универсальных классов У. Форрест показал, что свойства AP и JEP не следуют друг из друга:

Теорема 2.3.1 [83] Свойства совместного вложения и амальгамирования являются независимыми свойствами для универсальных классов.

В доказательстве данной теоремы автором были построены различные примеры универсальных классов, наличие свойства амальгамирования для которых сочетается с отсутствием свойства совместного вложения, и наоборот. Тем самым У. Форрест показывает независимость свойств AP и JEP друг от друга.

При этом следует заметить, что существуют примеры теорий, в классах моделей которых как раз наблюдается зависимость AP и JEP. На основании этого факта Ешкеевым А.Р. в работе [24] было предложено следующее определение.

Определение 2.3.2 [24] -теория называется

1. AP-теорией, если допускает свойство амальгамирования и из этого факта следует, что обладает свойством совместного вложения, т.е. ;
2. JEP-теорией, если допускает свойство совместного вложения и из этого факта следует, что обладает свойством амальгамирования, т.е. ;
3. AJ-теорией, если обладает свойствами AP и JEP и наличие каждого из них влечёт наличие другого, т.е. .

В классе йонсоновских теорий могут быть выделены особые подклассы теорий в зависимости от построения связи между двумя вышеупомянутыми свойствами. Однако в данном параграфе мы рассматриваем более общую ситуацию, не налагая на рассматривая теории условия наличия бесконечных моделей и индуктивности.

Приведём примеры для каждого класса теорий из определения 2.3.2. Первый пример относится к определению AP-теории.

Пример 2.3.1 Теории и являются AP-теориями. В самом деле, данные теории допускают свойство амальгамирования и, как было показано в доказательстве теорем 2.2.7 и 2.2.9, в силу того, что и являются сильно выпуклыми, они допускают также и свойство совместного вложения.

Заметим, что теория в силу отсутствия свойства амальгамирования не является AP-теорией.

Следующие примеры демонстрируют, какие теории являются JEP-теориями.

Пример 2.3.2 Пусть – язык унаров. Рассмотрим теорию всех унаров языка . Данная теория является пустым множеством предложений. Нетрудно заметить, что теория обладает свойство совместного вложения. В случае, когда две модели и данной теории имеют общую подмодель , они вкладываются в третью модель и при этом вкладывается в единственным образом, что говорит о наличии свойства амальгамирования.

Пример 2.3.3 Пусть – полная теория, класс экзистенциально замкнутых моделей, которых является элементарным. В силу полноты допускает свойство совместного вложения. Так как элементарен, по теореме 1.2.11 теория обладает модельным компаньоном . Однако, так как , получаем, что . Тогда , и, в силу теоремы 1.2.7 и определения 1.2.7, допускает свойство амальгамирования. Следовательно, в случае элементарности класса экзистенциально замкнутых моделей полная теория является JEP-теорией. Примерами теорий, удовлетворяющих данным условиям, могут служить теория алгебраически замкнутых полей характеристики 0, теория алгебраически замкнутых полей характеристики (, теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0, теория дифференциально замкнутых полей характеристики (.

Хорошо известно, что, хоть полные теории обладают свойством совместного вложения, они могут не допускать свойство амальгамирования. В примере 2.3.3 описано условие, при котором полная теория обладает AP, то есть является JEP-теорией. Для построения ещё одного примера JEP-теории мы снова рассмотрим случай полной теории, однако теперь мы приведём другое условие, позволяющее получить следствие . Далее будет представлен результат, не только демонстрирующий пример JEP-теории, но и описывающий условия, при которых рассматриваемая полная теория будет йонсоновской.

Теорема 2.3.2 [16] Пусть – полная -категоричная теория, класс экзистенциально замкнутых моделей которой не пуст. Тогда – совершенная йонсоновская теория.

*Доказательство.* Так как теория полна, это значит, что все её модели являются либо конечными, либо бесконечными, так как количество элементов модели может быть записано в виде универсально-экзистенциального предложения. Значит, силу -категоричности теории все её модели бесконечны. Тогда по теореме 1.2.12 у существует -категоричный модельный компаньон . Покажем, что . Как хорошо известно, классом моделей является класс , из чего следует, что . При этом является полной теорией, и тогда единственной теорией, куда она может быть включена как множество, является она сама. Следовательно, . Из этого мы делаем вывод, что модельно полна, так как модельный компаньон по определению является модельно полной теорией, и . Согласно теореме 1.2.7, класс амальгамируем, а значит, весь класс моделей теории является таковым. Следовательно, теория обладает свойством амальгамирования. Кроме того, она индуктивна, так как модельно полна и имеет бесконечные модели. В конце концов, как хорошо известно, полные теории обладают свойством совместного вложения (это также легко следует из теоремы 2.3.3). Из всего этого следует, что теория является йонсоновской согласно определению 2.1.1 и совершенной в силу наличия модельного компаньона и согласно теореме 2.1.3. □

Приведём пример теории, удовлетворяющей условиям теоремы 2.3.2.

Пример 2.3.4 Теория плотных линейных порядков без концевых элементов является полной -категоричной теорией. Как известно, данная теория -аксиоматизируема, а значит, класс её экзистенциально замкнутых моделей не пуст. является совершенной йонсоновской теорией (при этом она также является центром и модельным компаньоном теории линейных порядков). Кроме того, данная теория представляет пример JEP-теории.

Далее мы перейдём к построению примеров для следующего класс теорий относительно взаимосвязи свойств AP и JEP.

Пример 2.3.5 Самым простым примером AJ-теории служит пустая теория в пустом языке, т.е. и . Моделями данной теории служат множества. Очевидно, для класса моделей свойства амальгамирования и совместного вложения следуют друг из друга.

Определение 2.3.2 подразумевает логическую импликацию и эквивалентность, так как из работ [84] и [85] известно, что свойства совместного вложения и амальгамирования могут быть формализованы синтаксически. Теорема 2.3.3, доказанная А. Робинсоном, представляет собой синтаксический критерий свойства совместного вложения; теорема 2.3.4 описывает синтаксическую природу свойства амальгамирования и была доказана Д. Брайарсом. Существуют также обобщения этих теорем, которые можно найти в [86].

Теорема 2.3.3 [85] Пусть ‒ теория языка первого порядка . Тогда следующие условия эквивалентны:

1) обладает JEP;

2) Для любых -предложений , языка , если , то либо , либо .

3) Если и – -предложения, такие, что множества предложений и совместны, то совместно.

Теорема 2.3.4 [84] Следующие утверждения эквивалентны:

1) допускает свойство амальгамирования;

2) для любых , если , то найдутся такие , что и .

Теперь приведём некоторые результаты, полученные в рамках изучения взаимосвязи свойств AP и JEP в контексте определения 2.3.2.

Теорема 2.3.5 представляет собой семантическое достаточное условие свойства «быть AP-теорией».

Теорема 2.3.5 [24] Пусть -теория является сильно выпуклой и пусть допускает свойство амальгамирования. Тогда является AP-теорией.

*Доказательство.* Предположим, что – сильно выпуклая теория рассматриваемого языка и допускающая свойство AP. Пусть – две произвольные модели теории . Так как является сильно выпуклой, пересечение и . Пусть . Так как верно, что изоморфно вкладывается в модели и , в силу наличия свойства амальгамирования у мы можем построить такую модель , что найдутся изоморфизмы и . Таким образом, для произвольных моделей и теории мы смогли найти третью модель , в которую и изоморфно вложились, что означает по определению 1.2.5, что теория допускает свойство совместного вложения, и, следовательно, является AP-теорией. □

## Некоторые свойства косемантичных йонсоновских теорий

В данном и последующих параграфах представлены результаты относительно изучения косемантичных йонсоновских теорий, алгебраической структуры йонсоновского спектра класса -структур и классов косемантичности фиксированного йонсоновского спектра. Все упомянутые результаты имеют прямое отношение к развитию техники семантического метода для исследования йонсоновских теорий.

Напомним определение косемантичных йонсоновских теорий (определение 2.1.8): йонсоновские теории и называются косемантичными, если их семантические модели совпадают.

Далее перейдём к изложению полученных результатов относительно косемантичных йонсоновских теорий. Продемонстрируем связь между косемантичными йонсоновскими теориями и классами их моделей.

Предложение 2.4.1 [28] Пусть , – йонсоновские теории, такие, что . Тогда класс экзистенциально замкнутых моделей теории совпадает с классом экзистенциально замкнутых моделей теории .

*Доказательство*. Для начала покажем что условие влечёт за собой , т.е. что и . Заметим, что, так как , , является экзистенциально замкнутой моделью для и . Кроме того, -универсальна. Пусть – экзистенциально замкнутая модель теории . Тогда, по теореме 1.2.6, . Из этого следует, что . Кроме того, согласно определению 1.2.4, . Следовательно, по теореме 1.2.4, является экзистенциально замкнутой моделью теории . В силу произвольности мы можем утвержать, что . Обратный факт, т.е. то, что , доказывается аналогично.

Легко видеть, что для любых двух индуктивных теорий и и взаимно модельно совместны, если . Действительно, тот факт, что и взаимно модельно совместны, эквивалентен факту . Итак, если , то, согласно теореме 1.2.5, и , следовательно, . И наоборот, если , то для любой модели существует экзистенциально замкнутая модель , такая, что . Но и . То же самое относится и к произвольной модели : в найдётся такая, что , и . Таким образом, и взаимно модельно совместны. Из этого мы можем сделать вывод, что, если , то и взаимно модельно совместны. Следовательно, по предложению 2.1.2, . □

Рассматривая косемантичность робинсоновских теорий, мы получаем следующий результат.

Теорема 2.4.1 [28] Пусть – робинсоновская теория, а – йонсоновская теория, косемантичная . Тогда .

*Доказательство*. Так как и косеманитичны, . Как мы знаем из следствия 2.1.1, и взаимно модельно совместны с их общим центром, а значит, и друг с другом. Это значит, что . Но – робинсоновская теория, а это значит, что все предложения, выводимые в , выводятся в . Следовательно, . □

Основываясь на теореме 2.4.1, мы получаем следующие факты, которые дают нам некоторую информацию о структуре йонсоновского спектра и робинсоновского спектра произвольного класса -структур.

Следствие 2.4.1 [28] Пусть – произвольный класс -структур (возможно, содержащий только одну структуру), – фактор-множество йонсоновского спектра по отношению косемантичности, – произвольный класс косемантичности из , – робинсоновская теория. Тогда – единственная робинсоновская теория в .

*Доказательство*. Предположим противное. Пусть – робинсоновская теория и пусть . Так как , по теореме 2.4. верно, что , но также верно и то, что . Следовательно, . □

Следствие 2.4.2 [28] Пусть – произвольный класс -структур (возможно, содержащий только одну структуру), – фактор-множество робинсоновского спектра по отношению косемантичности. Тогда каждый класс косемантичности содержит ровно одну теорию. Другими словами, для любых двух робинсоновских теорий и языка отношение косемантичности эквивалентно равенству теорий, т.е. .

*Доказательство*. Доказательство следует непосредственно из следствия 2.4.1.

Следствие 2.4.2 является очень важным, так как благодаря ему мы можем рассматривать йонсоновские в частности робинсоноские) теории как одноэлементные классы косемантичности некоторого робинсоновского спектра. Таким образом, любая теорема, в которой утверждаются какие-либо факты о йонсоновских теориях, может быть легко обобщена на случай робинсновского спектра. □

Теперь представим теорему, которая не только демонстрирует некоторые специфические особенности индуктивной теории и йонсоновской теории с точки зрения косемантичности, но и является необходимым инструментом для получения дальнейших результатов.

Теорема 2.4.1 [28] Пусть – йонсоновская -теория, – ее семантическая модель, и пусть – теория того же языка, такая, что является индуктивной, и . Тогда – йонсоновская теория, косемантичная .

Существует несколько способов доказать эту теорему. Здесь мы приведём более подробное доказательство, чтобы детально продемонстрировать технику работы с йонсоновскими теориями.

*Доказательство*. Для начала покажем, что является йонсоновской теорией. , значит, имеет по крайней мере одну бесконечную модель. индуктивна по условию. Заметим, что все модели являются моделями , поэтому любые две модели могут быть изоморфно вложены в , что означает, что допускает JEP. Что касается AP, пусть ‒ модель и , где и ‒ модели . Рассмотрим как модели : существует модель , такая, что , и диаграмма данных вложений коммутативна, так как допускает AP. ‒ индуктивная теория, а значит, существует экзистенциально замкнутая модель , такая, что изоморфно вкладывается в . Но, согласно теореме 3, , следовательно, . Отсюда следует, что допускает AP. Теперь покажем, что , т.е. является семантической моделью для . Легко видеть, что является -универсальной моделью , поскольку . Аналогично, является -однородной для , так как все необходимые изоморфные отображения могут быть построены таким же образом, они строятся в классе моделей . □

Следующий результат нам представляется важным, так как затрагивает вопросы конечной аксиозматизируемости, на основе которой в дальнейшем можно рассмотреть достаточно много интересных вопросов, связанных со структурой йонсоноского спектра в связи с классическими проблемами конечной аксиоматизируемости в различных классах алгебр.

Теорема 2.4.2 [28] Пусть ‒ йонсоновская теория, и ‒ конечно аксиоматизируемая теория. Тогда число теорий, косемантичных , конечно.

*Доказательство*. Проведём доказательство от противного. По условию, конечно аксиоматизируема. Как мы упоминали ранее, мы не различаем логически эквивалентные теории между собой, поэтому будем рассматривать конечный список из -предложений (т.е. список аксиом) как теорию . Предположим, что существует бесконечное число теорий, косемантичных . В силу теоремы 2.4.1, . Пусть ‒ список всех йонсоновских теорий, косемантичных и . В силу того, что конечно аксиоматизируема, существует -предложение , которое эквивалентно конъюнкции аксиом . Ясно, что для любой , . Значит, каждая теория также конечно аксиоматизируема и существуют -предложения , эквивалентные конъюнкциям аксиом теорий соответственно. Рассмотрим теорию . Заметим, что индуктивна, , следовательно, согласно теореме 2.4.1, она является йонсоновской теорией, косемантичной и . Для каждой верно, что , и, следовательно, . Но конечно аксиоматизируема, тогда множество предложений должно быть конечным. Следовательно, число теорий конечно. □

Таким образом, как утверждает теорема 2.4.2, любой класс косемантичности теории в в йонсоновском спектре произвольного класса -структур является конечным, при условии, что оболочка Кайзера теории представляет собой конечно аксиоматизирумую теорию.

Следующая теорема позволяет построить теории, косемантичные данной йонсоновской теории.

Теорема 2.4.3 [23] Пусть – йонсоновская -теория, – произвольное множество экзистенциальных -предложений, таких, что – непротиворечивое множество предложений. Тогда –йонсоновская теория, косемантичная теории .

*Доказательство.* Так как является йонсоновской теорией, существует семантическая модель данной теории согласно теореме 2.1.1. Рассмотрим теорию . Ясно, что данная теория является расширением теории и, очевидно, индуктивна. Согласно теореме 2.4.1, будет являться йонсоновской теорией, косемантичной , если . Предположим, что это не так. Так как , но не является моделью , найдётся предложение такое, что не истинно в . Заметим, что – экзистенциальное предложение. Тогда , причём эквивалентно некоторому универсальному предложению. По определению 2.1.5 является -универсальной. Рассмотрим произвольную модель теории . В силу -универсальности семантической модели изоморфно вкладывается в , если . В случае, когда , мы по теореме Лёвенгейма-Скулема «вверх» можем построить модель подходящей мощности, элементарно эквивалентную семантической модели, в которую будем изоморфно вкладываться. Это значит, что также истинно в модели . В силу произвольности модели получаем, что в любой модели теории предложение является истинным, тогда , но в этому случае множество предложений несовместно. Мы пришли к противоречию. Следовательно, , а это в свою очередь значит, что – йонсоновская теория, косемантичная теории . □

Из работы Е.Т. Мустафина [78] известен следующий факт:

Факт 2.4.1 [78] Пустая теория является йонсоновской.

Под пустой теорией понимается пустое множество предложений в заданном языке первого порядка. Применим этот факт к теореме 2.4.3. Рассмотрим в качестве теории пустую теорию. Тогда . Из этого получаем

Следствие 2.4.3 [28] Любая экзистенциально аксиоматизируемая теория является йонсоновской теорией, косемантичной пустой теории.

Кроме того, благодаря теореме 2.4.3 мы можем сконструировать следующие новые примеры йонсоновских теорий. Для их построения будем использовать язык групп.

Пример 2.4.1 Пусть – теория всех групп, – произвольная группа, и пусть – предложение, говорящее о коммутативности группы:

Предложение является универсальным, а значит, – экзистенциальное. Тогда , т.е. теория некоммутативных групп, является йонсоновской теорией, косемантичной теории групп . Мы также можем заключить, что теория некоммутативных групп является несовершенной йонсоновской теорией в силу предложения 2.1.1 и теоремы 2.1.3: теория групп является несовершенной, а в силу косемантичности и центры этих теорий совпадают, следовательно, центр теории не является модельно полной теорией, из чего следует несовершенность .

Пример 2.4.2 Пусть – теория всех моноидов. Как было упомянуто выше, данная теория является йонсоновской. Добавим к этой теории предложения, являющиеся отрицаниями свойств ассоциативности элементов, наличия нейтрального и обратного элементов. Полученная теория будет являться йонсоновской теорией, косемантичной .

Пример 2.4.3 Пусть – снова теория всех групп. Для каждой аксиомы данной теории построим её отрицание. Полученная теория будет экзистенциально аксиоматизируемой теорией, моделями которой являются структуры, для которых не выполняется свойство ассоциативности элементов, а также во всех этих структурах отсутствует нейтральный элемент и обратные элементы.

## О некоторых типах алгебр, задаваемых на структуре йонсоновского спектра

Как уже упоминалось, одним из основных методов, применяемых при исследовании йонсоновских теорий, является семантический метод, заключающийся в изучении свойств класса структур языка через описание спектра йонсоновских -теорий данных структур. Такая техника в контексте изучения йонсоновских теорий стал применяться впервые Ешкеевым А.Р. и демонстрирует свою полезность в работах исследователей, занимающихся данным направлением в теории моделей.

Одним из основных инструментов семантического метода является понятие йонсоновского спектра (определение 2.1.9). Напомним, йонсоновским спектром класса структур языка называется следующее множество теорий:

йонсоновская теория и

Именно свойства теорий, являющихся элементами йонсоновского спектра, а также свойства самого спектра как такового позволяют нам достаточно хорошо характеризовать порождающие данный спектр -структуры. Поэтому получение новых теоретико-модельных результатов, касающихся вопросов изучения йонсоновского спектра, позволяет не только описывать различные алгебры с точки зрения йонсоновской теории моделей, но и расширять инструментарий семантического метода в целом.

В данном параграфе будут описаны структурные свойства йонсоновского спектра некоторого класса -структур. Мы рассмотрим йонсоновские теории как элементы некоторых алгебраических структур и представим конкретный тип этих структур. Результаты автора диссертации, представленные в данном параграфе, опубликованы в статье [28].

Поскольку теория представляют собой в первую очередь синтаксическое понятие, для получения результатов данного параграфа был использован преимущественно синтаксический подход. Когда мы имеем дело с йонсоновскими теориями, нам следует обратить внимание на синтаксическую характеристику основных специфических свойств, присущих йонсоновским теориям: индуктивность, свойство амальгамирования и свойство совместного вложения. Хорошо известно, что индуктивность теории эквивалентна ее -аксиоматизируемости. Что касается свойств AP и JEP, то нашими основными синтаксическими инструментами являются следующие две теоремы: теорема 2.3.3 (теорема А. Робинсона – синтаксический критерий JEP) и теорема 2.3.4 (теорема Д. Брайарса – синтаксический критерий AP).

Далее в параграфе будут представлены некоторые результаты о замкнутости класса йонсоновских теорий относительно операции объединения. Так как теории являются, в первую очередь, множествами предложений заданного языка, операция объединения теория определяется полностью в соответствии с операцией объединения множеств.

Пусть – йонсоновские теории языка , такие, что множество предложений непротиворечиво и найдётся хотя бы одна модель бесконечной мощности. Тогда верны теоремы 2.5.1-2.5.3.

Теорема 2.5.1 [28] допускает свойство совместного вложения.

*Доказательство*. Для доказательства будем использовать синтаксический критерий JEP, а именно пункт 3 теоремы 2.3.3. Пусть и – экзистенциальные предложения, такие, что и совместны. Тогда из следует, что и совместны. Аналогично, из следует, что и совместны. Следовательно, в силу того, что и – йонсоновские теории и допускают JEP, множества предложений и непротиворечивы. Тогда непротиворечиво по теореме компактности. Следовательно, допускает JEP. □

Теорема 2.5.2 [28] допускает свойство амальгамирования.

*Доказательство*. Для доказательства будем использовать синтаксический критерий AP, то есть теорему 2.3.4. Пусть

где и являются универсальными -формулами. Предположим, что

и .

Это означает, что множества предложений

и

являются непротиворечивыми и. следовательно,

и

являются также непротиворечивыми. Следовательно,

непротиворечиво. Но множество предложений является подмножеством , поэтому

должно быть совместным, что невозможно, так как

Таким образом, или . В первом случае существуют такие экзистенциальные -предложения и , что и и , поскольку является йонсоновской и допускает JEP. Следовательно,

для тех же экзистенциальных формул и . Таким образом, допускает AP. Аналогично, если , то также допускает AP. □

Заметим, что теория является индуктивной и обладает бесконечными моделями в силу нашей оговорки о модели . Тогда, согласно этим фактам и теоремам 2.5.1 и 2.5.2, мы имеем следующий результат:

Теорема 2.5.3 [28] – йонсоновская теория.

Для демонстрации сущности теоремы 2.5.3 приведём некоторые примеры йонсоновских теорий, объединение которых представляет собой также йонсоновскую теорию.

Пример 2.5.1 Пусть – теория групп, – теория абелевых групп. Объединение снова представляет собой йонсоновскую теорию.

Пример 2.5.2 Пусть – теория дифферециальных полей характеристики 0, – теория дифференциально замкнутых полей характеристики 0. Тогда объединение также является йонсоновской теорией. Аналогичный пример можно привести для характеристики , рассмотрев теорию дифференциально совершенных полей характеристики и теорию дифференциально замкнутых полей характеристики .

Пример 2.5.3 Пусть – счётный язык первого порядка, - пустая теория, – произвольное множество экзистенциальных предложений языка . Тогда, как было показано в следствии 2.4.3, обе эти теории являются йонсоновскими и – также йонсоновская теория.

Пример 2.5.4 Пусть – йонсоновская -теория, – множество -предложений языка , таких, что – непротиворечивое множество предложений. Заметим, что теория является йонсоновской согласно следствию 2.4.3. И тогда, по теореме 2.4.3, – йонсоновская теория. Частым случаем этого примера является теория некоммутативных групп, то есть теория, состоящая из аксиом теории групп (теория ) и аксиомы, являющейся отрицанием аксиомы о коммутативности (теория .

Теперь перейдём к рассмотрению алгебраической структуры йонсоновского спектра. Пусть – некоторый фиксированный класс структур, такой, что существует хотя бы одна бесконечная структура , – йонсоновский спектр данного класса. Через будем обозначать оболочку Кайзера класса , то есть теорию, состоящую из всех -предложений, истинных для каждой модели .

Для начала докажем следующую лемму, которую в дальнейшем мы будем использовать как технический инструмент для работы с йонсоновским спектром. И хоть данная лемма достаточно проста и прозрачна по своей сути, мы проведём подробное доказательство.

Лемма 2.5.1 [28] тогда и только тогда, когда – йонсоновская теория и .

*Доказательство*. Для начала заметим, что все йонсоновские теории -аксиоматизируемы. Пусть , тогда по определению 2.1.9 должна быть йонсоновской. Предположим теперь, что . Тогда содержит некоторые предложения из (как минимум, тавтологии), а также некоторые другие предложения, которых нет в . То есть, может быть представлена в виде

где , . Но, так как неверно, что для любой , то найдется такая модель , что . Следовательно, . Таким образом, мы приходим к противоречию. Итак, .

Пусть – йонсоновская теория, и пусть . Из последнего следует, что , а значит, для любой модели верно, что . Взяв во внимание также тот факт, что ‒ йонсоновская, мы получаем по определению йонсоновского спектра, что . □

Как уже упоминалось в факте 2.4.1, пустая теория, представляющая собой пустое множество -предложений, является йонсоновской теорией. Тогда по лемме 2.5.1 [28] очевидно следующее:

Следствие 2.5.1 [28] Пустая теория принадлежит .

Пусть . Тогда по лемме 2.5.1 [28] и . Очевидно, . Из этого можно сделать вывод, что теория совместна, так как её надмножество является совместным множеством предложений. Применим к этому факту теоремы 2.5.1 и 2.5.2 и получим следующее:

Следствие 2.5.2 [28] Пусть . Тогда обладает свойствами амальгамирования и совместного вложения.

Кроме того, легко видеть, что теория индуктивна и имеет бесконечные модели (как минимум, вышеупомянутую модель ). Тогда из вышесказанного получаем

Следствие 2.5.3 [28] Пусть . Тогда .

Следующая теорема дает информацию об устройстве йонсоновского спектра класса как алгебры.

Теорема 2.5.4 [28] Пусть – язык первого порядка, и пусть – фиксированный класс -структур, такой, что в содержится хотя бы одна бесконечная -структура, – йонсоновский спектр . Тогда является коммутативным моноидом.

*Доказательство*. Согласно следствию 2.5.3, для любых , т.е. операция объединения теорий в йонсоновском спектре является замкнутой. Ассоциативность и коммутативность данной операции очевидна. Единичным элементом служит пустая теория согласно следствию 2.5.1. □

Теперь рассмотрим структурные свойства произвольного класса косемантичности йонсоновского спектра.

Введём для теорий следующие операции: и . Пусть и ‒ -теории. Определим операцию следующим образом:

если полученная теория непротиворечива. Легко видеть, что теория логически эквивалентна теории , а класс моделей этой теории состоит из -структур, которые одновременно являются моделями и . Аналогично, пусть

Класс моделей представлен -структурами, которые являются моделями или . Следует заметить, что эта теория, вообще говоря, не является логически эквивалентной теории . Для подтверждения этого факта построим следующий контрпример.

Пример 2.5.5 [28] Пусть – язык теории полей, – теория полей характеристики 2, – теория полей характеристики 3. Тогда есть непосредственно теория полей, то есть множество аксиом (С1)-(У2). Класс моделей теории содержит поля любой характеристики , где , тогда как модели теории есть полям характеристики 2 или 3 и только они.

Следующая теорема хорошо известна и была доказана Е.Т. Мустафиным [78].

Теорема 2.5.5 [78] Пусть и ‒ две косемантичные йонсоновские теории. Тогда теория также является йонсоновской теорией, косемантичной теориям и .

В [78] отмечено, что, если и ‒ не косемантичные йонсоновские теории, теория , вообще говоря, не является йонсоновской. Из этого факта следует, что , вообще говоря, не замкнут относительно операции .

Пусть ‒ класс -структур, ‒ фактор-множество йонсоновского спектра по косемантичности, . Тогда получаем следующий результат.

Теорема 2.5.6 [28] Для любого класса косемантичности , представляет собой решетку относительно операций и .

*Доказательство*. Для того, чтобы построить решётку в классе косемантичности , нам необходимо показать замкнутость относительно и . Пусть . Согласно теореме 2.5.5, ‒ йонсоновская теория, косемантичная и . Кроме того, очевидно, что , поэтому . Как было отмечено выше, . Согласно следствию 2.5.3, . Поскольку и , мы можем применить теорему 2.4.1 и получить, что косемантична и косемантична . Следовательно, . Таким образом, произвольный класс косемантичности в произвольном йонсоновском спектре замкнут относительно и . Тогда, для любых теорий положим и . □

## О сравнении классов косемантичности в йонсоновском спектре

В данном параграфе приводится обобщение некоторых хорошо известных теорем о йонсоновских теориях, представленных в монографии [79], в контексте изучения отношения косемантичности теорий и косемантичности -структур. При этом вместо самих теорий рассматриваются классы косемантичности этих теорий в фиксированном йонсоновском спектре. Фактически, результаты параграфа представляют собой некоторую дополнительную информацию о структуре йонсоновского спектра, удовлетворяющего некоторым заданным условиям, и описывают связь между различными классами косемантичности в данном спектре. Результаты опубликованы в работах [27] и [28].

Ранее Мустафиным Т.Г. было определено понятие бинарного отношения йонсоновской эквивалентности (-эквивалентности) для -структур. Позже Ешкеевым А.Р. было предложено определение косемантичности -структур, которое по некоторым причинам стало более предпочтительным инструментом для изучения моделей и их теорий в контексте изучения йонсоновских теорий. Одна из этих причин заключается в том, что методика описания моделей через их йонсоновские спектры представляется нам более перспективной в смысле разработки математического аппарата для изучения йонсоновского спектра и других относящихся к нему понятий. Другой причиной является ёмкость формулировки понятия косемантичности моделей. Однако между понятиями йонсоновской эквивалентности и косемантичности -структур существует прямая связь, которая также будет описана в этом параграфе.

Как оговаривалось ранее, мы работаем в счётном языке первого порядка . Приведём определение -эквивалентности для -структур.

Определение 2.6.1 [79, с. 174] Пусть и – -структуры. и называются йонсоновски эквивалентными (-эквивалентными), если для любой йонсоновской -теории выполнено следующее:

В работе [27] было введено определение -эквивалентности для двух классов -структур. Предложенное понятие обобщает понятие -эквивалентности для -структур.

Определение 2.6.2 [27] Классы и -структур называются йонсоновски эквивалентными (-эквивалентными), если для любой йонсоновской теории языка верно следующее:

Данное отношение обозначается как .

Приведём примеры йонсоновски эквивалентных классов структур.

Пример 2.6.1 Пусть , – две -структуры, такие, что . Тогда . В данном примере в качестве классов структур и мы рассмотрели классы, каждый из которых состоит только из одной структуры. Кроме этого, это значит, что отношение йонсоновской эквивалетности классов является обобщением йонсоновской эквивалентности и элементарной эквивалентности -структур.

Пример 2.6.2 Пусть – язык групп, – теория групп, тогда – класс экзистенциально замкнутых моделей теории групп. Известно, что он непуст, так как теория групп является индуктивной. Пусть и . Тогда .

В следующем примере продемонстрируем классы, не являющиеся йонсоновски эквивалентными.

Пример 2.6.3 Снова рассмотрим классы, состоящие из одной структуры. Пусть – группа, не являющаяся абелевой, и пусть – абелева группа. Тогда для любых и , удовлетворяющих данным условиям, и не йонсоновски эквивалентны.

Следующее утверждение описывает связь йонсоновской эквивалентности двух классов -структур с их йонсоновскими спектрами.

Предложение 2.6.1 [27] Пусть и – два класса -структур. Тогда

*Доказательство*. Пусть и пусть – произвольная йонсоновская теория, такая, что . Тогда . Но модели класса являются моделями , а значит, . Отсюда следует, что и, аналогично, наоборот. Теперь пусть . Для всех йонсоновских теорий , таких, что и верно, что принадлежат и , следовательно . □

В [79] приведены результаты, описывающие связь между двумя моделями с помощью некоторого заданного отношения эквивалентности в рамках изучения йонсоновских теорий. Здесь мы получаем некоторое обобщение этих результатов, при этом мы рассматриваем уже не просто модели, как это делали авторы в [79], а классы моделей, и классы косемантичности теорий вместо отдельных теорий как таковых.

Пусть – йонсоновская теория в . Мы рассматриваем йонсоновский спектр данного класса . Введем отношение косемантичности на . Как известно, это отношение является отношением эквивалентности, и потому разбивает спектр на классы косемантичности. Таким образом, мы получаем факторное множество .

Далее мы будем работать с некоторым фиксированным классом косемантичности . Ясно, что все йонсоновские теории в этом классе имеют одну и ту же семантическую модель, которую мы обозначим через . В этом разделе мы будем работать с заданным фиксированным классом , если иное не оговорено в теоремах или определениях.

Здесь мы вводим следующие обозначения. Пусть , – некоторая -структура. Тогда означает, что для любой теории . Аналогично, это обозначение обобщается и на класс моделей, т.е. означает, что для любой модели и любой теории .

Следует обратить внимание, что мы работаем только в рамках фиксированного языка сигнатуры .

Теперь дадим определения некоторых необходимых понятий, которые на самом деле являются обобщениями некоторых известных понятий из [79].

Определение 2.6.3 [79] Класс экзистенциально замкнутых моделей сигнатуры называется -классом, если множество предложений является йонсоновской теорией.

Определение 2.6.4 [79] Теория , представляющая собой множество всех универсально-экзистенциальных -предложений, истинных в каждой модели класса , называется оболочкой Кайзера класса . Мы также будем использоваться обозначение для .

Заметим, что теория является йонсоновской, если она допускает свойство амальгамирования, поскольку имеет бесконечные модели, является индуктивной и, в силу -полноты, допускает свойство совместного вложения. Более того, в случае наличия АР у данной теории, является максимальной йонсоновской теорией по включению, и все теории такие, что , где – некоторая йонсоновская теория из , являются йонсоновскими.

Лемма 2.6.1 Пусть состоит только из -полных теорий, и пусть в существует такой класс , который состоит из расширений теорий класса в том же языке. Тогда, если является непротиворечивым множеством формул для каждой теории , то также непротиворечиво для каждой теории , где – произвольное множество -формул.

*Доказательство*. Пусть – произвольная теория класса . По условию настоящей леммы найдётся такая, что . Очевидно, что, если –теория, полная для экзистенциальных предложений, то также является полной для экзистенциальных предложений. Пусть – совместное множество формул для любой теории , и пусть – несовместное множество формул для любой теории . Это  
означает, что существует формула , где – бескванторная формула, такая, что

Следовательно,

и

в силу своей -полноты. Последнее означает, что несовместно, поэтому получаем противоречие. Таким образом, для любой теории и любой теории , если является непротиворечивым множеством формул, то также непротиворечиво. □

Следующее утверждение представляет собой одной из важных свойств -классов.

Предложение 2.6.2 Пусть состоит только из -полных теорий. Тогда любой класс бесконечных моделей является -классом.

*Доказательство*. Ясно, что класс никогда не пуст, так как, в силу указанных ранее условий, состоит из экзистенциально замкнутых моделей некоторой йонсоновской теории , а экзистенциально замкнутые модели йонсоновских теорий являются бесконечными. Нам нужно показать, что является -классом, т.е., согласно определению 2.6.3, является йонсоновской теорией. Проверим это, опираясь на определение 2.1.1:

1. содержит бесконечные модели по условию;
2. Очевидно, что является множеством -предложений, поэтому данная теория является индуктивной;
3. всегда является полной для экзистенциальных предложений теорией, поэтому легко видеть, что по теореме 2.3.3 она имеет JЕР;
4. Пусть для любой -формулы . Согласно теореме 2.3.3, это означает, что или . Поскольку каждая является индуктивной теорией, для всех . И в силу того, что каждая в этом классе косемантичности является -полной (и, следовательно -полной), , если , и , если . Каждая теория в допускает АР, поэтому, если , то и, по теореме 2.3.4, существуют такие, что

и .

Аналогично строится доказательство при если . Из этого следует, что

и ,

что означает, что допускает АР. □

Далее для доказательства некоторых теорем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.6. [27] Пусть и – -теории, и пусть

Тогда

*Доказательство*. Во-первых, включение истинно, так как все предложения из выводимы в и . Теперь покажем, что включение . Предположим противное; тогда существует модель такая, что . Это означает, что и , что эквивалентно тому, что существуют и такие, что в ложно и в ложно . Но, согласно условию леммы, для любой модели верно, что для всех и , что является противоречием. Следовательно,

из чего получаем

. □

Теперь продемонстрируем результат, относящийся к решеткам йонсоновских теорий в контексте изучения классов косемантичности йонсоновского спектра.

Предложение 2.6.3 [27] Пусть , и пусть есть семантическая модель класса . Тогда , где

*Доказательство*. Во-первых, заметим, что, согласно лемме 2.6.2,

Кроме того, для любой теории верно, что , а это означает, что является йонсоновской теорией, косемантичной для любой . Остается показать, что . Так как , то , из чего следует, что . Следовательно, . □

Следующая теорема, полученная в рамках данного диссертационного исследования, также представляет собой результат структурного подхода к изучению йонсоновских теорий и их классов косемантичности.

Теорема 2.6.1 [27] Пусть – индуктивная -теория, такая, что является моделью для любой , где – произвольный класс бесконечных -структур, и пусть класс косемантичности состоит только из теорий, полных для экзистенциальных предложений. Тогда , где

*Доказательство.* Для начала отметим, что все теории класса являются совместными множествами предложений, так как для любой модели верно, что для каждой , и при этом , из чего следует, что для любой . Далее для того, чтобы класс принадлежал , необходимо, чтобы каждая структура была моделью для каждой теории из . Это очевидно, так как всякая является моделью и , и каждой . Рассмотрим произвольную теорию . Остается показать, что является йонсоновской теорией. Мы сделаем это с помощью определения 2.1.1:

1. Все модели в бесконечны, следовательно имеет бесконечное множество моделей.
2. Очевидно, что, является индуктивной теорией.
3. и является -полной теорией, следовательно является -полной. Это означает, что имеет JEP, что легко видно благодаря теореме 2.3.3.
4. Здесь мы снова используем теорему 2.3.4. Пусть для некоторых формулы имеет JЕР, это означает, что или . Поскольку и является -полное, , если , и , если допускает АР, так что если то и, по Теореме 3 , существуют такие, что

и .

Аналогично строится доказательство в случае . Следовательно, и , что означает, что допускает AP. □

В [79] было введено определение косемантичных моделей языка (-структур). Данное понятие имеет большое значение в исследовании свойств неполных, в частности йонсоновских теорий, и их классов моделей, так как понятие косемантичности моделей обобщает понятие их элементарной эквивалентности, а значит, служит важным инструментом в описании и сравнении различных -структур в теоретико-модельном смысле. В работе [27] был предложен аналог этого определения для классов -структур, представляющий собой на самом деле обобщение определения косемантичных -структур.

Определение 2.6.5 [27] Пусть и – некоторые классы -структур. Тогда и называются косемантичными (), если .

Теперь мы переходим к одному из главных результатов данного параграфа. Представленная ниже теорема является критерием, связывающим косемантичность -классов с их оболочками Кайзера.

Теорема 2.6.2 [27] Пусть ‒ -классы. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. .

*Доказательство*. Поскольку и – -классы, и являются йонсоновским теориями. Докажем следствие . Если , то , что означает, что и . Но из этого следует, что и . Тогда . Следствие тривиально в силу индуктивности оболочек Кайзера и йонсоновских теорий. □

Пусть снова есть произвольный класс -структур, тогда – это фактор-множество йонсоновского спектра класса по отношению косемантичности йонсоновских теорий. Пусть . В теореме 2.4.1 было показано, что для любых двух йонсоновских теорий и , , если . Это означает, что для любых теорий и из , , т.е. для любого класса косемантичности существует класс экзистенциально замкнутых моделей. Обозначим его как .

Хорошо известен следующий факт.

Предложение 2.6.4 [79, с. 161] Пусть – -полная йонсоновская теория, тогда для любой бесконечной модели из класса моделей теории верно, что – йонсоновская теория.

Следующая теорема показывает связь между классами экзистенциально замкнутых моделей двух классов космичности и их оболочками Кайзера.

Теорема 2.6.3 [28] Пусть , и . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. .

*Доказательство*. Вывод импликации (2) (1) очевиден из-за индуктивности любой йонсоновской теории , такой, что или . Теперь покажем импликацию (1) (2). Согласно предложению 2.6.1, (1) эквивалентно тому факту, что . Согласно теореме 2.4.1, и являются йонсоновскими теориями. Кроме того, для любой верно, что , и для любой верно, что в силу теоремы 1.2.6. Следовательно, и , что означает, согласно лемме 2.5.1 [28] , и . Согласно теореме 1.2.6, и , поэтому и . Таким образом, и . □

При изучении структуры йонсоновского спектра нам, как правило, необходимо использовать технику, позволяющую различать классы косемантичности либо устанавливать их равенство. Следующее утверждение и следствие показывают, в каком случае классы косемантичности совпадают.

Предложение 2.6.5 [28] Пусть , и – семантические модели классов и соответственно. Пусть для некоторой , для некоторой . Тогда классы и совпадают.

*Доказательство*. Рассмотрим теории и . Тогда является йонсоновской теорией по теореме 2.5.3. Поскольку и , является семантической моделью в силу теоремы 2.4.1. Аналогично, также является семантической моделью . Это означает, что и являются семантическими моделями и . Следовательно, и . □

Следствие 2.6.1 [28] Пусть , и . Тогда классы и совпадают.

*Доказательство*. Верно, что и по теореме 1.2.6. Это означает, что для любой и для любой . Тогда по предложению 2.6.5 . □

И, наконец, мы представляем следующую теорему, демонстрирующую связь двух классов косемантичности через отношение косемантичности, йонсоновской эквивалентности и равенства между их семантическими моделями.

Теорема 2.6.4 [28] Пусть , и -– семантические модели классов и соответственно. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. ;
3. .

*Доказательство*. Экивалентность пунктов (1) и (2) очевидна в силу предложения 2.6.5. Вывод (3) (1) также очевиден. Нам нужно показать импликацию доказать (2) (3), или, эквивалентно, что . Пусть , что означает, что по определению 2.1.10. Легко видеть, что все теории из содержатся в , а все теории из содержатся в . Поскольку , и . Следовательно, для любой и для любой . По предложению 2.6.5, . □

Заключение

Представленная диссертационная работа по своему содержанию относится к так называемому «восточному» направлению теории моделей, получившему своё развитие благодаря трудам известного математика А. Робинсона. Диссертационное исследование проводилось в рамках изучения свойств особого подкласса индуктивных теорий – класса йонсоновских теорий.

Класс йонсоновских теорий представлен большим количеством разнообразных примеров, среди которых есть как полные, так и неполные теории. Хорошо известно, что подходы к изучению полных и неполных теорий имеют существенные различия. В связи с этим использование инструментов «западной» теории моделей, где преобладает проблематика, в основе которой лежат вопросы изучения полных теорий, в исследованиях, связанных с неполными теориями, в частности, с йонсонокскими теориями, в чистом виде может быть недостаточно релевантным. В первую очередь это связано с отстутвием свойства элементарной эквивалентности между моделями неполных теорий. Однако же, с другой стороны, имеет место наличие некоторых дополнительных свойств, таких, как индуктивность теории, свойство амальгамирования в классе моделей и так далее. По этой причине специалистами, занимающимися исследованием йонсоновских теорий, был разработан специализированный аппарат для изучения йонсоновских теорий. Применение данного аппарата уже хорошо показало себя в получении результатов, широко описывающих природу не только йонсоновских теорий, но и теорий другого типа, так или иначе связанных с указанным классов теорий. Данное диссертационное исследование имеет прямое отношение к расширению и развитию аппарата изучения йонсоновских теорий.

В настоящей диссертационной работе были изучены теоретико-модельные свойства особых подклассов йонсоновских теорий относительно связи свойств амальгамирования и совместного вложения, а также свойства классов их моделей на примере классических дифференциальных алгебр, а именно дифференциальных полей фиксированной характеристики. Также в рамках диссертационного исследования были получены некоторые новые результаты о косемантичных йонсоновских теориях, благодаря чему была описана алгебраическая структура йонсоновского спектра и классов косемантичности йонсоновского спектра.

Диссертационная работа состоит из технической и содержательной части. К технической части относятся все договорённости об используемых обозначениях, нумерации глав, разделов, а также определений и утверждений. К содержательной части мы относим введение, главу 1, главу 2, заключение и список использованной литературы.

Для достижения основной цели диссертации во введении были поставлены следующие 7 задач:

1. Найти новые примеры йонсоновских теорий среди классических структур дифференциальной алгебры и показать их совершенность;
2. Получить достаточное условие йонсоновости для полных теорий относительно свойства категоричности и свойств класса экзистенциально замкнутых моделей;
3. Для рассматриваемой теории получить достаточные условия того, что является AP-теорией;
4. Описать структуру робинсоновского спектра произвольного класса -структур;
5. Найти достаточное условие конечности класса косемантичности фиксированной йонсоновской теории;
6. Показать связь класса экзистенциально аксиоматизируемых теорий с классом йонсоновских теорий с использованием техники семантического метода;
7. Описать алгебраическую структуру йонсоновского спектра и классов косемантичности йонсоновского спектра фиксированного класса -структур.

Результаты, отвечающие выполнению всех поставленных задач, опубликованы в соответствующих рейтинговых журналах, доложены на международных и зарубежных конференциях и семинарах и представлены в параграфе 2 настоящей диссертации. Остановимся подробно на каждой задаче.

1. В параграфе 2.2 представлены теоремы 2.2.1-2.2.6, в которых показано, что теории , , , являются совершенными йонсоновскими териями. При этом отмечено, что теория йонсоновской не является.
2. В параграфе 2.2 представлена теорема 2.3.2, показывающая, что полная теория является йонсоновской теорией (притом совершенной), если она -категорична и имеет непустой класс экзистенциально замкнутых моделей, что является достаточным условием йонсоновости для полной теории.
3. В параграфе 2.3 представлена теорема 2.3.5, являющаяся семантическим достаточным условием того, чтобы рассматриваемая теория была AP-теорией.
4. Параграф 2.4 содержит теорему 2.4., отвечающую задаче 4, и её следствия 2.4.1 и 2.4.2. Следствие 2.4.1 показывает, что в классе косемантичности йонсоновского спектра произвольного класса -структур содержится по большей мере всего одна робинсоновская теория. Следствие 2.4.2 отвечает на вопрос об устройстве произвольного робинсоновского спектра: любой класс косемантичности робинсоновского спектра является одноэлементным с точностью до логической эквивалентности теорий.
5. Параграф 2.4 отвечает на вопрос о конечности класса косемантичности йонсоновского спектра посредством теоремы 2.4.2: установлено, что класс косемантичности теории из произвольного йонсоновского спектра конечен, если оболочка Кайзера данной теории конечно аксиоматизируема.
6. В теореме 2.4.3 и её следствии 2.4.3 в параграфе 2.4 показано, что все экзистенциально аксиоматизируемые теории являются йонсоновскими и косемантичными пустой теории, что говорит о том, что класс экзистенциально аксиоматизируемых теорий является особым подклассом йонсоновских теорий.
7. Алгебраическая структура йонсоновского спектра описана в параграфах 2.5 2.6 Теоремы 2.5.1-2.5.4 позволяют заключить, что йонсоновский спектр класса -структур, среди которых содержится хотя бы одна бесконечная структура, является коммутативным моноидом относительно операции объединения теорий. В теореме 2.5.6 показано, что класс косемантичности произвольного йонсоновского спектра является решёткой относительно введённых операций дизъюнкциии и конъюнкции теорий. В параграфе 2.6 представлены результаты о связи с сравнении классов косемантичности фиксированного йонсоновского спектра.

Таким образом, каждая из 7 поставленных задач полностью выполнена и цель диссертационной работы достигнута.

Полученные результаты станут полезными в проведении дальнейших исследований в области теории моделей, особенно в разрезе изучения йонсоновских и индуктивных теорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jonsson B. Extensions of relational structures // The Theory of Models. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1965. – P. 146-157.
2. Jonsson B. Homogeneous relational systems // Mathematica Scandinavica. – 1960. – No. 8. – P. 137-142.
3. Morley M., Vaught R.L. Homogeneous universal models // Mathematica Scandinavica. – 1962. – No. 11. – P. 37-57.
4. Yeshkeyev A.R, Tungushbayeva I.O, Kassymetova M.T. Some properties of AP-theories // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2022. – С. 50-51.
5. Tungushbayeva I.O., Rzabayev A.A. On Jonsson varieties of groups // Сборник тезисов IX Межд. науч. конф. «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2022. – С. 314-318.
6. Tungushbayeva I.O., Rzabayev A.A. The connection of AP and JEP-theories in the language of E-formulas // Сборник тезисов Межд. науч. конф., посв. 80-летию проф. Т.Г. Мустафина. – Караганда, 2022. – С. 39-40.
7. Tungushbayeva I., Ilyasov A.D. The properties of existentially prime subclasses of project Jonsson Theories // Сборник тезисов Межд. науч. конф., посв. 80-летию проф. Т.Г. Мустафина. – Караганда, 2022. – С. 38-39.
8. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I., Omarova M.T. Forcing companies of mutually consistent theories in permissible enrichments // Сборник тезисов Межд. науч. конф., посв. 80-летию проф. Т.Г. Мустафина. – Караганда, 2022. – С. 44-45.
9. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Omarova M.T. Forcing companions of the hereditary Jonsson AP-theory // Сборник тезисов Межд. науч. конф. «Математическая логика и компьютерные науки». – Астана, 2022. – С. 17-20.
10. Tungushbayeva I. Properties of companions of AP-theories // Abstracts of VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory. – Lyon, 2022. – P. 10.
11. Ешкеев А.Р., Тунгушбаева И.О., Аманбеков А.М. Категоричность и стабильность семантических йонсоновских квазимногообразий // Тр. Межд. науч.-пр. конф. «Таймановские чтения – 2022». – Уральск, 2022. – С. 19-21.
12. Yeshkeyev A.R, Tungushbayeva I.O. Stability of classes in the Jonsson spectra of semantic Jonsson quasivarieties // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2023. – С. 55-56.
13. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Zhumabekova G.Ye. The central type of a semantic pair // Book of Abstracts: LOGIC COLLOQUIUM 2023. European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. – Milan, 2023. – P. 184.
14. Yeshkeyev A., Tungushbayeva I. Small models of a Jonsson spectum // Book of Abstracts: XIII International Conference of the Georgian Mathematical Union. – Georgia, 2023. – P. 224.
15. Yeshkeyev A., Tungushbayeva I. On cosemanticness classes of a Jonsson spectrum // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World (TWMS Congress-2023). – Turkistan, 2023. – P. 215.
16. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Ulbrikht O.I. On the class of existentially closed models regarding cosemanticness and ω-categoricity // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы. – С. 244-245.
17. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Koshekova A.K. On cosemanticness classes of the fixed Jonsson spectrum // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2024. – С. 244-245.
18. Тунгушбаева И.О., Жакыпбаева Г.Е. О выпуклости фрагмента йонсоновского подмножества семантической модели фиксированной йонсоновской теории // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2024. – С. 230-231.
19. Тунгушбаева И., Әлжан Б. Малые модели центра совершенного класса йонсоновского спектра семантической модели фиксированной йонсоновкой теории // Сборник тезисов Тр. Межд. апр. мат. конф. в честь дня науки Республики Казахстан. – Алматы, 2024. – С. 229-230.
20. Tungushbayeva I.O., Zhakypbayeva G.Ye. On convexization of the Jonsson fragment of a cosemanticness class in a Jonsson spectrum // Сборник тезисов Межд. науч. конф. студентов и молодых учёных «Gylym jane Bilim». – Астана, 2024. – С. 1884-1887.
21. Тунгушбаева И. О., Әлжан Б.Т. (Γ, Δ)-cl-атомные множества выпуклой экзистенциально простой йонсоновской теории // Сборник тезисов Межд. науч. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024». – Астана, 2024. – С. 44-46.
22. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O. On small models of a cosemanticness class in the positive Jonsson spectrum // Сборник тезисов Межд. конф. «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань, 2024. – С. 154-156.
23. Tungushbayeva I.O., Ulbrikht O.I. On theories with amalgamation and joint embedding properties // Труды Традиционной международной конференции "Мальцевские чтения". – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2024. – С. 171.
24. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Kassymetova M.T. Connection between the amalgam and joint embedding properties // Bulletin of Karaganda University. Mathematics series. – 2022. – № 1(105). — P. 127-135.
25. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Omarova M.T. Forcing companions of Jonsson AP-theories // Bulletin of Karaganda University. Mathematics. – 2022. – № 3(107). – P. 163-173.
26. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Amanbekov S.M. Existentially prime Jonsson quasivarieties and their Jonsson spectra // Bulletin of Karaganda University. Mathematics. – 2022. – № 4(108). — P. 117-124.
27. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Koshekova A.K. The cosemanticness of Kaiser hulls of fixed classes of models // Bulletin of Karaganda University. Mathematics series. – 2024. – № 1(113). – P. 208-217.
28. Yeshkeyev A.R., Tungushbayeva I.O., Ulbrikht O.I. On some types of algebras of a Jonsson spectrum // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2024. – Vol. 21, No. 2. – P. 866-881.
29. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – М: Книга по Требованию, 2019. – 646 с.
30. Постников М. М. Теория Галуа. – М.: Изд-во Физ-мат. литературы, 1963. –220 c.
31. Биркгоф Г. Теория решёток. – Пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – 568 c.
32. Барвайс Дж. Справочная книга по математической логике в 4 частях, часть 1, Теория моделей. – М.: Наука, 1982. – 392 c.
33. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей. – М.: Мир, 1976. – 190 c.
34. Кейслер Г. Дж., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977. – 616 c.
35. Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. – 2nd ed. – Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1965. – 284 p.
36. Simmons H. Existentially closed structures // Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol. 37. No. 2. – P. 293-310.
37. Hodges W.H. Model Theory. – Cambridge University Press, 1993. – 772 p.
38. Yasuhara M. The amalgamation property, the universal-homogeneous models, and the generic models // Mathematica Scandinavica. – 1975. – № 34. – P. 5-36.
39. Eklof P., Sabbagh G. Model-completions and modules // Annals of Mathematical Logic. – 1970/71. – № Vol. 2, No. 3. – P. 251-295.
40. Saracino D. Model companions for countably categorical theories // Proceedings of the American Mathematical Society. – 197. – No. 39(3). – P. 591-598.
41. Kaplansky I. An introduction to differential algebra. – Paris: Hermann., 1957. – 85 p.
42. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. Перев. с англ. – М.: ИЛ, 1959. – 85 c.
43. Васильев А. М. Дифференциальная алгебра. Контравариантные аналитические методы в дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. Проблемы геометрии. – 1978. – № 10. – С. 5-23.
44. Kolchin E.R. Some problems in differential algebra // Труды Международного конгресса математиков (1966). – М.:Мир, 1968. – С. 269-276.
45. Ritt J.F. Integration in finite terms. – New York: Columbia Univ. Press, 1948. – 100 p.
46. Ritt J.F. Differential Algebra. – New York: Amer. Mat. Soc. Publ., 1950. – 184 p.
47. Kolchin E.R. Differential algebra and algebraic groups. – New York: Academic Press, 1973. – 446 p.
48. Kolchin E.R. Constrained extensions of differential fields // Advanced in Mathematics. – 1974. – № 12. – P. 141-170.
49. Blum L.C. Differentially closed fields: a model-theoretic tour // A Collection of Papers Dedicated to Ellis Kolchin. – New York:Academic Press, 1977. – P. 37-61.
50. Ax J., Kochen S. Diophantine problems over local fields II // American Journal of Mathematics. – 1965. – Vol. 87, No. 3. – P. 631-648.
51. Sacks G.E. Differential closure of a differential field // Bulletin of the American Mathematical Society. – 1972. – Vol. 78, No. 5. – P. 629-634.
52. Vaught R.L. Denumerable model of complete theories, infinitistic methods // Proc. Sympos. Foundations of Math. (Warsaw, 1959). – Warsaw:Pergamon Press, 1961. – P. 303-321.
53. Morley M. Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – № 114. – P. 514-538.
54. Blum L.C. Generalized Algebraic Theories: A Model Theoretic Approach: PhD Thesis; MIT. – 1968. – 18 p.
55. Kaplansky I. Maximal fields with valuations // Duke Math. J. – 1942. – № 9. – P. 313-321.
56. Robinson A. Problems and methods of model theory // Aspects of Math. Logic (C.I.M.E., Varenna, 1968). – Rome:Edizioni Cremonese, 1969. – P. 181-266.
57. Ершов Ю. Л. Об элементарной теории максимальных нормированных полей // Алгебра и Логика. – 1965. – № 3(3). – С. 31-70.
58. Robinson A. On the Concept of a Differentially Closed Field. – Jerusalem: The Hebrew University, 1959. – 78 p.
59. Wood C.S. The model theory of differential fields of characteristic ≠ 0 // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1973. – Vol. 40, No. 2. – P. 577-584.
60. Wood C.S. Prime model extensions for differential fields of characteristic p ≠ 0 // Journal of Symbolic Logic. – 1974. – Vol. 39, No. 3. – P. 469-477.
61. Wood C.S. The Model Theory of differential fields revisited // Israel Journal of Mathematics. – 1976. – № 25. – P. 331-352.
62. Seidenberg A. An elimination theory for differential algebra // University of California publications in Mathematics. New Series. – 1965. – Vol. 3, No. 2. – P. 31-66.
63. Sacks G.E. Saturated model theory. – New York: W.A. Benjamin, 1972. – 335 p.
64. Poizat B. Rangs de stypes dans les corps différentiels // Groupe d’étude de théories stables (Vol. 1). – Paris, 1977-1978. – P. 1-13.
65. Shelah S. Uniqueness and characterization of prime models over sets // Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol. 37, No. 1. – P. 107-113.
66. Harrington L. Contributions to recursion theory in higher types: PhD Thesis; MIT. – Cambridge, 1973. – 96 p.
67. Wood C.S. Forcing for Infinitary Languages // Mathematical Logic Quarterly. – 1972. – Vol. 18, No. 25-30. – P. 385-402.
68. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Omarova M.T. The Number of Fragments of the Perfect Class of the Jonsson Spectrum // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 43, No. 12. – P. 3658-3673.
69. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Mussina N.M. Similarities of Hybrids from Jonsson Spectrum and S-Acts // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2023. – Vol. 44, No. 12. – P. 5502-5518.
70. Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 166. – P. 646-654.
71. Yeshkeyev A. R., Kassymetova M. T., Ulbrikht O. I. Independence and simplicity in Jonsson theories with abstract geometry // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – № 18(1). – P. 433-455.
72. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. The admissibility and similarity of Jonsson theories // Bulletin of Karaganda University. Mathematics Series. – 2018. – № 89(1). – P. 42-48.
73. Mustafin T.G. On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90. Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. – Helsinki, 1990. – 259-265.
74. Zhumabekova G.E. Model-theoretic properties of semantic pairs and e.f.c.p. in Jonsson spectrum // Bulletin of Karaganda University. Mathematics. – 2023. – № 112(4). – P. 185-193.
75. Poizat B. Paires de Structures Stables // Journal of Symbolic Logic. – 1983. – № 48(02). – P. 239-249.
76. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Issayeva A.K. Algebraically prime and atomic sets // Turkic World Mathematical Society (TWMS) Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2023. – № 14(2). – P. 232-245.
77. Baldwin J.T., Kueker D.W. Algebraically prime models // Annals of Mathematical Logic. – 1981. – Vol. 20, No. 3. – P. 289-330.
78. Mustafin Ye.T. Quelques propriétés des théories de Jonsson // Journal of Symbolic Logic. – 2002. – Vol. 67, No. 2. – P. 528-536.
79. Ешкеев А. Р., Касыметова М. Т. Йонсоновские теории и их классы моделей. – Караганда: Издательство КарГУ, 2016. – 370 c.
80. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB-property of abelian groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. – № 13. – P. 861-874.
81. Ешкеев, А. Р., Ульбрихт, О. И. JSB-свойство R-модулей // Сибирские Электронные Математические Известия. – 2015. – № 12. – С. 144-155.
82. Pillay A. Forking in the category of existentially closed structures // Connection between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry, Quaderni di Matematica (A. Macintyre, ed.). – Vol. 6. – University of Naples, 2000.
83. Forrest W.K. Model Theory for universal classes with the amalgamation property: a study in the foundations of Model Theory and Algebra // Annal of Mathematical Logic. – 1977. – № 11. – P. 263-366.
84. Bryars D.A. On the syntactic characterization of some model theoretic relations: PhD Thesis. – London, 1973. – 107 p.
85. Ignatovic A., Grulovic M.Z. A comment on the joint embedding property // Periodica Mathematica Hungarica. – 1996. – Vol. 33, No. 1. – P. 45-50.
86. Bacsich P.D., Hughes D.R. Syntactic Characterisations of Amalgamation, Convexity and Related Properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1974. – Vol. 39, No. 3. – P. 433-451.
87. Poizat B., Yeshkeyev A. Positive Jonsson theories // Logica Universalis. – 2018. – № 12(1–2). – P. 101-127.
88. Poizat B., Yeshkeyev A. Back and forth in positive logic // Studies in Universal Logic. – 2022. – P. 603-609.