Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.97 Қолжазба құқығында

**ТӨЛЕУБАЙ АЛТЫН МҰҚАНҚЫЗЫ**

**Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің**

**аттракторлары туралы**

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Бекмаганбетов К.A.

Шетелдік ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Чечкин Г.А.

(Ресей)

Қазақстан Республикасы

Астана, 2024

**МАЗМҰНЫ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **КІРІСПЕ**…………………………………........…………………….. | 4 |
| **1** | **ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ**…... | 21 |
| **2** | **ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА НАВЬЕ-СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ**……………………………. | 28 |
| 2.1 | Есептің қойылымы және белгілеулері………………........………... | 28 |
| 2.2 | Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шектік есептің аттракторларының орташалануы… | 32 |
| 2.2.1 | Негізгі тұжырым…………………........…………………………….. | 32 |
| 2.2.2 | Көмекші тұжырым……………………………………........………... | 34 |
| 2.2.3 | Теорема 2.2.1 дәлелдеуі………………………………..........……….. | 38 |
| **3** | **ЛОКАЛЬДЫ-ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА НАВЬЕ-СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ**……………………………. | 40 |
| 3.1 | Есептің қойылымы және белгілеулері………………........………... | 40 |
| 3.2 | Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шектік есептің аттракторларының орташалануы… | 44 |
| 3.2.1 | Негізгі тұжырым…………………………………….........………….. | 44 |
| 3.2.2 | Көмекші тұжырым………………………………………..........…….. | 46 |
| 3.2.3 | Теорема 3.2.1 дәлелдеуі……………………………………….......... | 50 |
| **4** | **ЛОКАЛЬДЫ- ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА ТҰТҚЫРЛЫҒЫ АУЫСПАЛЫ АНИЗОТРОПТЫ СҰЙЫҚТЫҚҚА АРНАЛҒАН НАВЬЕ– СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ**…. | 53 |
| 4.1 | Есептің қойылымы және белгілеулері………………………........... | 53 |
| 4.2 | Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы-шектік есептің аттракторларының орташалануы… | 57 |
| 4.2.1 | Негізгі тұжырым…………………………………………….......…... | 57 |
| 4.2.2 | Көмекші тұжырым……………………………………………........... | 59 |
| 4.2.3 | Теорема 4.2.1 дәлелдеуі………………………………………........... | 64 |
|  | **ҚОРЫТЫНДЫ**………………………………………………........... | 67 |
|  | **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**……………........... | 68 |
|  | **ҚОСЫМША А** – Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстар тізімі ……....………………………………………......... | 73 |

**НОРМАТИВТІ СІЛТЕМЕЛЕР**

Диссертациялық жұмыста келесідей мемлекеттік үлгіқалыптарға сілтемелер жасалды:

ҚР МЖМС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелері (өзгертілген 2012 жылғы 23 тамыз №1080).

Ғылыми дәрежелерді беру ережелері 31 наурыз 2011 ж. №127.

ҰМҒТСО 7.32-2011. Мемлекетаралық стандарттар (өзгертілген 2006 ж.).

ҰМҒТСО 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Құрастырудың жалпы талаптары мен ережелері.

**КІРІСПЕ**

**Зерттеу жұмысының өзектілігі.** Қазіргі заманғы материалтану және қазіргі физиканың, биологияның және химияның қолданбалы міндеттері, атап айтқанда, микро-гетерогенді ортадағы процестерді зерттеуге әкеледі (қаңқалар, кеуекті орталар, наноқұрылымның композициялық материалдары және т.б.). Мұндай есептерді сандық әдістер мен есептеу құралдары арқылы шешу қиын, өйткені олар миллиардтаған белгісіз алгебралық теңдеулер жүйесін және теңдеуді зерттеуді және шешуді қажет етеді. Бұл жағдайда асимптотикалық талдау әдістері мен орташалау теориялары көмекке келеді, шешім алғашқы есептердің шешіміне жақын микронеогендік емес салаларда едәуір қарапайым есептерді жазуға мүмкіндік береді [1-6].

Бұл жұмыста шағын параметрдің мөлшеріне тәуелді периодты және локальды–периодты ұсақ түйіршікті кедергілері бар анизотропты ортада екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін бастапқы–шектік есептің аттракторларының осы параметр нөлге ұмтылған кездегі асимптотикалық әрекетін зерттейміз. Перфорацияланған облыстардағы есептер (ұсақ түйіршікті кедергілері бар облыстарда) математик мамандардың үлкен назарын аударды [7-13].

Перфорацияланған облыстағы әртүрлі есептердің орташаландырудың кейбір нәтижелері туралы [14-20] жұмыстардан оқуға болады, сонымен қатар, бұл жерде қажетті библиографиялармен танысуға болады.

Аттракторлар диссипативті сызықтық емес эволюциялық теңдеулер шешімдерінің үлкен уақыттағы әрекетін сипаттайды және сәйкес динамикалық жүйелердің шекті құрылымдарының тұрақтылығы мен тұрақсыздығын сипаттайды (мысалы, монографиялар [20 р. 467-486; 21-33] және олардағы сілтемелерді қараңыз). Тез өзгеретін мүшелері бар автономды және автономды емес екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулеріне арналған есептер қарастырылған [34-36].

Бұл жұмыста шекті (орташаланған) теңдеудегі потенциалдың пайда болу жағдайы қарастырылады (ұқсас есептерді [37] қараңыз). Соңғы уақыттарда пайда болған аттракторларды орташалау бойынша кейбір нәтижелерді атап өтейік (қараңыз[38]). [38, с. 95-103; 39-44] және [44, p. 289-308; 45, 46] жұмыстағы диссипативті периодты перфорацияланған облыстардағы скалярлық эволюциялық реакция-диффузия теңдеулердің аттракторларының орташалануы зерттелді.

Диссертациялық жұмыста перфорацияланған облыстағы (кедергілері бар облыс) тез өзгеретін мүшелері бар Навье–Стокс теңдеулер жүйесі және жалпыланған Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекеті қызықтырады. Біз кіші параметр нөлге ұмтылғандағы аттракторлардың әлсіз жинақталуы мен шектік әрекетін зерттейміз (мұнда кіші параметр қуыстардың диаметрін (кедергілерді) және олардың ортадағы қашықтығын сипаттайды). Біз алғашқы бастапқы-шеттік есептердің аттракторлары шекті (орташаланған) Навье-Стокс теңдеулер жүйесі үшін негізгі бөліктері өзгертілген және қосымша потенциалдары бар бастапқы-шеттік есептердің аттракторларына жинақталатының көрсеттік (ұқсас есептерді [44, p. 289-308], [20, p.467-486], [21, p. 655-683] қараңыз).

**Жұмыстың мақсаты.** Бұл жұмыстың мақсаты тесіктерінің мөлшерін сипаттайтын шағын параметр және олардың арасындағы қашықтық нөлге ұмтылған кезде шағын тесіктері бар облыста берілген екі өлшемді Навье-Стокс теңдеулер жүйесі және жалпыланған екі өлшемді Навье-Стокс теңдеулер жүйелерінің аттракторының әрекетін зерттеу.

**Зерттеудің жалпы әдістері**. Қойылған есептерді зерттеу үшін асимптотикалық талдау әдістері және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің бастапқы-шеттік есептерін орташалау теориясы қолданылады.

Ғылыми-зерттеу жұмысын зерттеу үшін асимптотикалық талдау әдістері, орташалау теориясы, сызықтық емес теңдеулердің сапалық теориясы және функционалдық анализ әдістері қолданылды.

**Ғылыми жаңалығы.**

Жұмыста келесідей жаңа ғылыми нәтижелер алынды.

1. Периодты кеуекті ортада Навье-Стокс жазық есебінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

2. Локалды-периодты перфорацияланған ортада екі өлшемді Навье-Стокс есебінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

3. Локалды-периодты перфорацияланған ортада тұтқырлығы өзгермелі анизотропты сұйықтық үшін екі өлшемді Навье-Стокс есептерінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

**Зерттеудің негізгі нәтижелерінің сипаттамасы**

Диссертациялық жұмыстың бірінші бөлімінде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторлары туралы негізгі ұғымдар берілген және жалпы теоремалар тұжырымдалады.

Зерттеу жұмысының екінші бөлімінде локалды-кеуекті ортада Навье-Стокс жазық есебінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

Үшінші бөлімінде локалды-периодты перфорацияланған ортада екі өлшемді Навье-Стокс есебінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

Төртінші бөлімде локалды-периодты перфорацияланған ортада тұтқырлығы өзгермелі анизотропты сұйықтық үшін екі өлшемді Навье-Стокс есептерінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

**Алынған нәтижелердің жаңашылдығы мен маңыздылығының негіздемесі**

Жұмыста алынған ғылыми нәтижелер жаңа және теориялық сипатта жасалған. Олар периодты және локалды-периодты перфорацияланған ортадағы екі өлшемді Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің шешімдерінің ұзақ мерзімді әрекетін сипаттайды. Бұл нәтижелерді қолданбалы математикада ұсақ кедергілері бар жазық облыстардағы сұйықтықтардың қозғалысын сандық модельдеуде қолдануға болады.

Алынған ғылыми нәтижелерді магистратура мен докторантурада ғылыми кадрларды даярлау кезінде дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің элективті курстарының бөлімдері ретінде пайдалануға болады.

**Жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.**

### Диссертациялық жұмыс мемлекеттік бюджеттен қаржыландырылатын жобаның аясында орындалған:AP22684340 «Тербелмелі шекарасы бар перфорацияланған облыстағы Гинзбург-Ландау комплексті теңдеуінің аттракторларының асимптотикасы туралы» .

Диссертациялық зерттеу тақырыбы «Жаратылыстану ғылымдары» ғылым бағыты бойынша «Елдің зияткерлік әлеуеті» басым бағытына, «Математика, механика, астрономия, физика, химия, биология, информатика және география саласындағы іргелі және қолданбалы зерттеулер» мамандандырылған ғылыми бағытына сәйкес келеді.

Докторлық диссертацияның нәтижелері математика *саласында* қолданылады.

**Жұмыста алынған жаңа ғылыми нәтижелері**

Жұмыста келесідей жаңа ғылыми нәтижелер алынды.

1. Периодты кеуекті ортада Навье-Стокс жазық есебінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

2. Локалды-периодты перфорацияланған ортада екі өлшемді Навье-Стокс есебінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

3. Локалды-периодты перфорацияланған ортада тұтқырлығы өзгермелі анизотропты сұйықтық үшін екі өлшемді Навье-Стокс есептерінің траекториялық аттракторының шекті әрекеті сипатталды және жинақтылық шарттары алынды;

**Жарияланымдар.** Диссертацияның негізгі нәтижелері 15 жұмыста жарияланды (5 мақала және 10 тезис). Оның ішінде 4 мақала Web of Science Core Collection және Scopus базасына кіретін журналдарда (2 мақала 35-тен астам процентилі бар журналдарда), 1 мақала шетелдік басылымдарда, сондай-ақ, 10 тезис халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында.

1. Об аттракторах системы уравнений Навье-Стокса в двумерной пористой среде // Проблемы математического анализа. – 2022. – Т. 115. – С. 15-28.

Attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 262, №3. – P. 246-261 (CiteScore2022=0.6, процентиль 13).

2. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium // Bulletin of the Karaganda university – Mathematics. – 2022. – Vol. 107, №3. – P. 35-50 (CiteScore2022=1.0, процентиль 35).

3. Об аттракторах 2D системы Навье–Стокса в среде с анизотропной переменной вязкостью и периодическими препятствиями // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2022. – Т. 519. – С. 10-34.

4. Об асимптотике аттракторов системы Навье–Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями // Доклады РАН. – 2023. – Т. 512. – С. 42-46.

On asymptotics of attractors of the Navier–Stokes system in anisotropic medium with small periodic obstacles // Doklady Mathematics. – 2023. – Vol. 108, №1. – P. 277-281 (Web of Science Q3, CiteScore2023=1.0, процентиль 45,8).

5. Asymptotic Behavior of Attractors of the Two-Dimensional Navier–Stokes System in a Domain with Small Periodic Obstacles // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2024. – Vol. 279, №4. – P. 550-562 (CiteScore2023=0.9, процентиль 20,5).

**Халықаралық конференциялар материалдарында:**

1. Усреднение аттракторов системы Навье–Стокса перфированной области быстро осциллирующим краевым условием // Международный научно–практической конференции Современные проблемы математики и ее приложений (Душанбе: Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе, 2022. – С. 41-45).

2. Averaging trajectory attractors of the system of Stokes equations in a two–dimensional porous medium // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работнико в науки Республики Казахстан: тезисы докладов (Алмата: Институт математики и математического моделированная, 2022. – С. 130-132).

3. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Стокса в двумерной пористой среде // XVII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых Ломоносов–2022 (Нур-Султан: МГУ имени М.В. Ломоносова Казахстанский филиал, 2022. – С. 41-42).

4. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // XVII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых G’ylym ja’ne bilim-2022 (Нур-Султан: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, 2022. – С. 1569-1570).

5. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // IX Международная научная конференция Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры (Актобе: Актюбинский региональный университет имени К. Жубанов, 2022. – С. 98-101).

6. Homogenization of Attractors for Navier–Stokes System in Perforated domain// International Conference dedicated to the 90th anniversary of Academician Nadirov N.K., to the 80th anniversary of Academician Otelbaev M.O. Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education (2022. – Р. 54).

7. Шеттік шарттарында тез өзгеретін мүшелері бар перфорацияланған облыста Навье–Стокс жүйесінің аттракторларын орташалауы // Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми конференция (Қарағанда, 2022. – Б. 23-25).

8. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Навье-Стокса в локально периодический перфорированной среде// XVIII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых Ломоносов–2023 (Астана: МГУ имени М.В. Ломоносова Казахстанский филиал, 2023. – С. 36-37).

9. Локальды периодты перфорацияланған ортадағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // XVIII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых G’ylym ja’ne bilim-2023 (Астана: Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, 2023. – С. 1252-1256).

10. On the asymptotics of the attractors of the 2d Navier–Stokes system in a medium with obstacles // ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), (Turkestan, 2023. – Р. 34).

**Алынған нәтижелерді апробациялау**

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі конференцияларда баяндалды:

1. «Математиканың заманауи мәселелері және оны қосымшалары» халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы (Душанбе: М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Душанбе қаласындағы филиалы, 2022–3-4 маусым).

2. Қазақстан Республикасының Ғылым қызметкерлері күніне арналған Дәстүрлі халықаралық математикалық сәуір конференциясы (Алматы: Математика және математикалық модельдеу институты, 2022–6-8 сәуір).

3. «Ломоносов–2022» студенттердің, магистранттар мен жас ғалымдардың 17-ші халықаралық ғылыми конференциясы (Нұр–Сұлтан: М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы, 2022 – 15-16 сәуір).

4. «G' ylym ja 'ne bilim-2022» студенттердің, магистранттар мен жас ғалымдардың 17-ші халықаралық ғылыми конференциясы (Нұр–Сұлтан: Л. Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2022– 11 сәуір).

5. 9-шы халықаралық ғылыми конференция «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра мәселелері» (Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 2022–24-28 мамыр).

6. Академик Н.К. Нәдіровтың 90 жылдығына және академик М.Ө. Өтелбаевтың 80 жасқа толу мерейтойына арналған «Ғылым, техника және білім берудегі есептеу және ақпараттық технологиялар» Халықаралық конференция. (Алматы: Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, 2022 – 12-15 қазан).

7. Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми конференция (Қарағанды: Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, 2022 – 8-9 қыркүйек).

8. «Ломоносов – 2023» студенттердің, магистранттар мен жас ғалымдардың 18-ші Халықаралық ғылыми конференциясы–2023 (Астана:М.В. Ломоносов атындағы ММУ Қазақстан филиалы, 2023– 14-15 сәуір).

9. G 'ylym ja' ne bilim – 2023 студенттердің, магистранттар мен жас ғалымдардың 18-ші Халықаралық ғылыми конференциясы (Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2023 – 12 сәуір).

10. Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік конгресі (TWMS Congress 2023), (Түркістан: Қ.А. Яссауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, 2023 – 20-23 қыркүйек).

Cонымен бірге, жұмыстың жеке нәтижелері келесі ғылыми семинарларда талқыланды:

1. Функционалдық анализ және оның қолданулары ғылыми семинарларында (жетекшілері ҚР ҰҒА академиктері М. Өтелбаев және Р.Ойнаров, профессорлар Е.Д. Нурсултанов, К.Н. Оспанов).
2. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің «Іргелі математика» кафедрасының ғылыми семинарында (Астана, 2023 – 30 қараша 2023; 2024 – 4 сәуір, 18 сәуір).

**Докторанттың әрбір жарияланымды дайындауға қосқан үлесі.** Диссертацияның негізгі нәтижелері 5 жұмыста жарияланды (1 мақаланы докторант жалғыз өзі жазды. Ғылыми кеңесшілерімен бірлесіп жазылған 4 жұмысында ғылыми кеңесшілер есептің қойылымын қойып, зерттеу әдістемесін таңдады, ал докторант негізгі және көмекші нәтижелерді өз бетінше тұжырымдап, оларды дәлелдеді).

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 4 бөлімнен, қорытындыдан, пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады. Үшмәнді бөлімдердегі формулалардың нөмірленуі, бірінші сан - бөлім нөмірін, екіншісі-бөлімшенің нөмірін, үшіншісі-бөлімшенің ішіндегі формуланың меншікті нөмірін, ал, теоремалардың, леммалардың, тұжырымдар мен ескертулердің нөмірленуі үш таңбалы: бірінші сан-бөлім нөмірін, екіншісі-бөлімшенің нөмірін, үшіншісі-бөлімшенің ішіндегі меншікті нөмірі. Зерттеу жұмысының көлемі – 74 б.

**Жұмыстың негізгі мазмұны.**

Кіріспеде тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы негізделеді, зерттеудің мақсаттары, объектісі, пәні мен міндеттері тұжырымдалады. Жұмыс бойынша жарияланымдар, конференциялар мен семинарлар тізімі келтірілген.

Бірінші бөлімде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторлары туралы негізгі ұғымдар анықталады және теоремалар тұжырымдалады.

Осы бөлімде траекториялық аттрактордың анықтамасы және оны құрудың жалпы сызбасы келтірілген. Сондай-ақ, М.И. Вишик пен В.В. Чепыжовтың траекториялық аттракторлар туралы жұмыстарындағы кейбір қажетті фактілер осы бөлімде келтірілген.

әсер ететін жылжытулардың жартылай группасының траекториялық аттракторының және тартылатын жиынның анықтамаларын тұжырымдаймыз.

Анықтама 1.1.1 жиыны топологиясында әсер ететін жылжытулардың жартылай группасының тартатын жиыны деп аталады, егер топологиясында -де кез келген шектелген жиынында жиыны , тартса, яғни кез -келген кез келген аймағында- . тартатын қасиеті келесідей эквивалентті түрде тұжырымдалуы мүмкін:

кез келген жиыны шенелген және кез келген үшін

мұнда

метрикалық кеңістігіндегі жиынынан жиынына дейінгі Хаусдорфтың жартылай қашықтығын білдіреді.

Анықтама 1.1.2 [18, p. 360]. Егер

1. жиыны -де шенелген және -да компактілі болса,
2. жиыны жартылай группалардың жылжытуларына қатысты қатаң инвариантты болса :

барлығы үшін ,

1. жиыны топологиясында -да, кез келген , жартылай группаның жылжытуларының тартатын жиыны болса, онда жиыны топологиясында-да жартылай группаның жылжытуларының траекториялық аттракторы деп аталады:

Ескерту 1.1.1. [17, c. 289] жұмысының терминологиясын пайдаланып, егер --не әсер етуші, топологиясында кезде жиынын тартса,жартылай группаның жылжытуының траекториялық аттракторы глобальды болады дейміз:

мұнда –-гі кез келген шенелген ( ) жиын.

(1.1.1)-ші теңдеудің траекториялық аттракторының құрылымын және негізгі бар болу теоремасын тұжырымдаймыз.

Теорема 1.1.1 ([17, c. 289; 18, p. 260; 29, p. 913-963]). Айталық, траекторияларының кеңістігі, (1.1.1) теңдеуге сәйкес, -кеңістігінде тұйық және (1.1.5)–ші шарт орындалсын. Айталық, шенелген және компактілі, жартылай группаның жылжытуының тартылатын жиыны бар болсын. Онда әсер етуші жылжытудың жартылай группасының траекториялық аттракторы бар болады. жиыны –де шенелген және компактілі болады.

Анықтама 1.1.3. (1.1.9) теңдеуінің кеңістігіндегі өзегі (1.1.9) теңдеуінің нормасында шенелген барлықтолық траекторияларының бірігуі болады:

*Теорема 1.1.2.* Айталық,1.1.1-ші теореманың шарттары орындалсын. Онда

жиыны топологиясында компактілі және кеңістігінде шенелген.

*Лемма 1.1.1* [Aubin-Lions-Simon, [30, p. 183-524]. . Онда келесі енгізулер компактілі:

(1.1.11)

(1.1.12)

Келесі бөлімде кіші параметріне тәуелді болатыны екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесі және олардың траекториялық аттракторлары зерттеледі.

*Анықтама 1.1.4.* топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы ε→0 ұмтылғанда траекториялық аттракторына жинақталады дейміз, егер кез-келген маңайында болса, кез-келген болатындай табылса, яғни, кез-келген үшін

Екінші бөлім периодты перфорацияланған ортада Навье-Стокс жүйесінің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттеуге арналған.

2.1 бөлімшесінде периодты перфорация анықталып, есептің қойылымы беріледі.

Айталық, – -гі шектелген облыс және оның шекарасы тегіс болсын. Тиесілі шарға диффеоморфты компакт болып табылатындай – облыс болсын және

және – кез келген жиын болсын, біз келесі белгілеулерді енгіземіз: үшін келесi жиындарды анықтаймыз

Әрі қарай, облысын және рұқсат етілген индекстер жинағын анықтаймыз

Назар аударыңыз, , мұнда – тұрақты. Келесі облысты қарастырайық,

, .

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Кеңістіктер үшін келесі белгілеулерді енгіземіз:

, ,

,

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз.

Келесі есепті қарастырайық:

(2.2.1)

мұнда P-қысым,, , – шекараның сыртқы нормаль векторы және .

Әрі қарай

,

мұнда әрбір айнымалы үшін 1–периодты және шартын қанағаттандыратын функция ,мұнда – қисық ұзындығының элементі.

вектор-функция үшін, функцияларының кез келген және кеңістігінде орташа мәні бар, яғни

немесе

(2.2.2)

кез келген функция үшін.

Лебег интегралының абсолютті үзіліссіздігінен, (1.2.2)-ші шарт бойынша ұмтылғанда кез келген функциясы үшін төмендегідей теңдікті аламыз

(2.2.3)

Мұнда бастапқы есептің траекториялық аттракторының бар болуы дәлелденді, атап айтқанда, келесі тұжырымдар дұрыс.

Лемма 2.2.1. (2.2.1)-ші есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны бірқалыпты ()  кеңістігінде шектелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (2.2.1) есебінің зегі – бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз.

2.2 бөлімшеде алғашқы бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторы орташаланған есептің траекториялық аттракторына кіші параметр нөлге ұмтылған кезде жинақталуы туралы негізгі теорема дәлелденді.

Орташаланған (шектік ) есеп келесі түрде жазылады:

(2.2.1)

мұнда

мұнда және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

Орташаланған есепте келесі шарт орындалғанда, траекториялық аттрактордың бар болуы дәлелденді. Мұндағы бұл кеңістігіндегі операторының бірінші меншікті саны, ал

Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады.

*Теорема 2.2.1.* Айталық , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(2.2.4)

Сонымен қатар,

(2.2.5)

Үшінші бөлім локальды-периодты перфорацияланған ортада Навье-Стокстың жазық есебінің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттеуге арналған.

3.1 бөлімшесінде локальды - периодты перфорация анықталып, есептің қойылымы беріледі.

Ең алдымен перфорацияланған облысты анықтаймыз. Айталық, – тегіс шектелген облыс. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

Айталық, тегіс функцияны – бойынша 1-периодты деп есептейміз, мынадай,

, , үшін .

Жиынды анықтаймыз,

және тегіс облысты келесі түрде енгіземіз:

облысын созылған кеңістікте деп белгілейміз. Көбінесе, 2-өлшемді торында анықталған 1-периодты функцияларды функциялар ретінде қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген сызбаға сәйкес шекарасы және оның қосындыларының шекарасынан тұрады.

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз.

Келесі есепті қарастырайық:

(3.1.1)

мұнда P-қысым, , , – шекараның сыртқы нормаль векторы және .

Мұнда бастапқы есептің траекториялық аттракторының бар болуы дәлелденді, атап айтқанда, келесі лемма 2.2.1 дұрыс.

*Лемма 3.1.1.* (3.1.1) есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны бірқалыпты кеңістігінде () шенелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (2.1.1) есебінің өзегі–кеңістігінде ( ) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз.

3.2.1 бөлімшесінде алғашқы бастапқы-шеттік есептің траекториялық аттракторы орташаланған есебінің траекториялық аттракторына кіші параметр нөлге ұмтылған кезде жинақталуы туралы негізгі теорема дәлелденді.

Орташаланған (шектік ) есеп келесі түрде жазылады:

(3.2.1)

мұнда

мұнда және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

Орташаланған есепте келесі шарт орындалғанда, траекториялық аттрактордың бар болуы дәлелденді. Мұндағы бұл кеңістігіндегі операторының бірінші меншікті саны,

3.2.2 бөлімшесінде көмекші есеп қарастырылды. Жинақтылық туралы және функциялардың интегралдық байланысы туралы лемма дәлелденді.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады.

*Теорема 3.2.1.* Айталық, , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(3.2.4)

Сонымен қатар,

(3.2.5)

Төртінші бөлім локальды-периодты перфорацияланған ортада тұтқырлығы ауыспалы анизотропты сұйықтыққа арналған Навье-Стокс есебінің траекториялық аттракторының асимптотикалық әрекетін зерттеуге арналған.

4.1-бөлімшесінде локальды-периодты перфорация анықталған және есептің қойылымы берілген.

Ең алдымен перфорацияланған облысты анықтаймыз. Айталық, – тегіс шектелген облыс. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

Айталық, тегіс функцияны – бойынша 1-периодты деп есептейміз, мынадай, , үшін . Жиынды анықтаймыз,

және тегіс облысты келесі түрде енгіземіз :

Жоғарыда келтірілген сызбаға сәйкес шекарасы және оның қосындыларының шекарасынан тұрады. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

және .

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз.

Келесі есепті қарастырайық:

(4.1.1)

мұнда P-қысым, , , , – шекарадағы сыртқы нормальдың бірлік векторы және матрица-симметриялы оң анықталған, яғни, -кез келген векторлар үшін , кез келген және –оң тұрақты.

Мұнда бастапқы есептің траекториялық аттракторының бар болуы дәлелденді, атап айтқанда, келесі тұжырымдар дұрыс.

Лемма 4.1.1 (4.1.1) есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны бірқалыпты кеңістігінде () шенелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (4.1.1) есебінің өзегі–кеңістігінде ( ) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз. Мұнда жартылай осіндегі тарылу операторын білдіреді.

4.2.1 бөлімшесінде алғашқы бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторы орташаланған есебінің траекториялық аттракторына кіші параметр нөлге ұмтылған кезде жинақталуы туралы негізгі теорема дәлелденді.

Орташаланған (шектік ) есеп келесі түрде жазылады (орташаланған коэффициент құрылымын қараңыз .):

(4.2.1)

Мұнда,

мұнда , және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

мұнда , –шекара жолағының сыртқы нормалының бірлік векторы.

Орташаланған есепте келесі шарт орындалғанда, траекториялық аттрактордың бар болуы дәлелденді. Мұндағы бұл кеңістігіндегі эллиптикалық операторының бірінші меншікті саны, ал,

4.2.2 бөлімшесінде көмекші есеп қарастырылды. Жинақтылық туралы және функциялардың интегралдық байланысы туралы лемма дәлелденді.

Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады.

*Теорема 4.2.1.* Айталық, , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(4.2.9)

Сонымен қатар,

. (4.2.10)

Назар аударайық, 4.2.1 теоремадағы кеңістіктер ε-ға тәуелді. Барлық функциялардағы тиісті нормаларды сақтай отырып, тесіктердің ішінде жалғастыруға болады.

Қорытынды бөлімде диссертацияда алынған нәтижелер қысқаша сипатталып, олардың қолдану мүмкіндіктері аталып өтілген.

**1 ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРДЫҢ АНЫҚТАМАСЫ**

Бірінші бөлімде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторлары туралы негізгі ұғымдар анықталады және теоремалар тұжырымдалады.

Бұл бөлімде автономды эволюциялық теңдеулердің траекториялық аттракторларын құрудың жалпы сызбасы көрсетілген. Келесі параграфта бұл сызба перфорацияланған облыста екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларын сол теңдеулерде және шекаралық шарттарында тез тербелмелі мүшелері қарастырылады және сәйкес орташаланған теңдеумен зерттеу үшін қолданылады.

Абстрактілі автономды эволюциялық теңдеуді қарастырамыз

(1.1.1)

Сызықтық емес оператор берілген, мұнда – Банах кеңістіктері және . Мысалы, (1.2-ші бөлімді қараңыз).

(1.1.1) теңдеуінің шешімі деп -гі функцияларды атаймыз, егер оларды (1.1.1)-ге қойып алынған кезде жалпыланған функциялар мағынасында тепе-теңдік болып алынады.

Біз (1.1.1) теңдеудің шешімдерін, толығымен айнымалының функциялары ретінде зерттейміз. Мұнда уақыттың айнымалысын білдіреді. (1.1.1) теңдеудің шешімдерінің жиынын траекторияларының кеңістігі деп атаймыз. траекторияларының кеңістігін толығырақ сипаттайық.

Ең алдымен, -гі бекітілген уақыт аралығында анықталған (1.1.1) теңдеудің шешімдерін қарастырамыз.

мен -ге тәуелді Банах кеңістігіне жататын (1.1.1) теңдеуінің шешімдерін зерттейміз. кеңістігі функцияларынан тұрады, мысалы, барлық дерлік үшін , мұндағы – Банах кеңістігі. деп саналады.

Мысалы, кеңістігі кеңістігі немесе кеңістігі болуы мүмкін, немесе осындай кеңістіктердің қиылысуы (1.2 бөлімді қараңыз).

және

(1.1.2)

мұнда және кесіндісіндегі оператордың сығылуын білдіреді. тұрақтысы функциясына тәуелді емес. Әдетте кеңістіктердің біртекті жағдайы қарастырылады, онда

Айталық, үшін жылжыту операторын білдіреді

Егер функцияның аргументі кесіндісінде жататын болса, онда үшін функциясының аргументі кесіндісінде жатады. Айталық, бейнелеуі тің -гі изоморфизмі болып табылады және

(1.1.3)

Бұл тұжырым толығымен орынды, мысалы, біртекті кеңістіктер үшін.

Егер , онда , мұндағы . – мәндері жататын жалпыланған функция және барлық үшін орындалсын дейік. Егер кеңістігіндегі жалпыланған функциялар мағынасында орындалса, онда функциясын (1.1.1) теңдеуінің кеңістігіндегі шешімі (интервалындағы) деп атаймыз.

Айталық,

(1.1.4)

Мысалы, егер , онда , ал егер , онда .

Егер және функциясы кез келген уақыт аралығы үшін (1.1.1) теңдеудің шешімі болып табылса, онда функциясы -гі (1.1.1) теңдеуінің шешімі деп аталады.

Айталық, –не тиісті (1.1.1) теңдеуінің шешімдерінің кейбір жиыны болсын, –не тиісті болатын, бірақ (1.1.1) теңдеуінің барлық шешімдерінің жиыны емес болуы мүмкін. кеңістігінің өзі бұл (1.1.1) теңдеуінің траекторияларының кеңістігі болса, онда жиынының элементі траектория деп аталады.

траекторияларының кеңістігі келесі мағынада трансляциялы-инвариантты деп саналады: егер болса, онда кез келген үшін . Бұл шарт біртекті кеңістіктерінде автономды теңдеу шешімдерінің нақты қасиеті болып табылады.

Енді жылжыту операторларын қарастырайық:

бейнелеуінің жиыны үшін : жартылай группаны бейнелейді және , мұнда тепе-тең бейнелеу болатыны айқын. -айнымалысын уақыт айнымалысына ауыстырамыз. жартылай группаcы жылжытулардың жартылай группасы деп аталады. Жасалған болжамға байланысты жылжытулардың жартылай группасы траекториясының кеңістігін өз-өзіне бейнелейді:

(1.1.5)

Әрі қарай, траекториялар кеңістігіне әсер ететін жылжытулардың жартылай группасының тартылу қасиеттері зерттеледі. кеңістігінде кейбір топологияны анықтайық.

Айталық, – барлық кесінділері үшін кеңістігінде анықталған метрика, төменгі шарттарды қанағаттандырады

арқылы -гі кеңістігіндегі сәйкес метрикалық кеңістікті белгілейміз. Мысалы, - Банах кеңістігіндегі нормамен туындайтын метрика болуы мүмкін. Сонымен қатар, қосымшада Банах кеңістігіндегі күшті жинақтылыққа қарағанда метрикасы топологиясын әлсіз мағынада туындатады.

Кез-келген үшін -ны локальды жинақты топологиямен жабдықталған кеңістігін арқылы белгілейміз, Дәлірек айтсақ, функцияларының тізбегі анықтама бойынша функциясына жинақталады, егер ( болса) k→∞ болса, кез келген кесінді үшін. Мысалы, топологиясы Фреше метрикасы арқылы өлшенетінін дәлелдеу қиын емес

(1.1.6)

Егер барлық метрикалық кеңістіктері толық болса, онда метрикалық кеңістігі толық болатыны айқын.

жылжытулардың жартылай тобы топологиясында үзіліссіз болатынына назар аударайық. Бұл топологиялық кеңістігінің анықтамасынан тікелей туындайды.

Сонымен қатар, келесідей Банах кеңістігін анықтаймыз

(1.1.7)

мұнда норма

(1.1.8)

Мысалы, егер , онда кеңістігі нормасымен ,ал егер, болса, онда нормасымен анықталады.

Келесі орындалады. Банах кеңістігі траекториялық кеңістіктігіндегі шектеулі жиындарды анықтау үшін қажет. траекториялық аттракторын салу барысында біз Банах кеңістігінің топологиясындағы сәйкес бірмәнді жинақтылықты қарастырмаймыз. Оның орнына әлдеқайда әлсіз, локальды жинақтылық топологиясын пайдаланамыз.

, яғни (1.1.1) теңдеудің кез-келген траекториясының ақырлы (1.1.8) нормасы бар деп есептейік. әсер ететін жылжытулардың жартылай группасының траекториялық аттракторының және тартылатын жиынның анықтамаларын тұжырымдаймыз.

Анықтама 1.1.1 жиыны топологиясында әсер ететін жылжытулардың жартылай группасының тартатын жиыны деп аталады, егер топологиясында -де кез келген шектелген жиынында жиыны , тартса, яғни кез -келген кез келген аймағында- . тартатын қасиеті келесідей эквивалентті түрде тұжырымдалуы мүмкін:

кез келген жиыны шенелген және кез келген үшін

мұнда

метрикалық кеңістігіндегі жиынынан жиынына дейінгі Хаусдорфтың жартылай қашықтығын білдіреді.

Анықтама 1.1.2 [45, p. 241-254]. Егер

1. жиыны -де шенелген және -да компактілі болса,
2. жиыны жартылай группалардың жылжытуларына қатысты қатаң инвариантты болса :

барлығы үшін ,

1. жиыны топологиясында -да, кез келген , жартылай группаның жылжытуларының тартатын жиыны болса, онда жиыны топологиясында-да жартылай группаның жылжытуларының траекториялық аттракторы деп аталады

Ескерту 1.1.1. [46, c. 95-117] жұмысының терминологиясын пайдаланып, егер --не әсер етуші, топологиясында кезде жиынын тартса,жартылай группаның жылжытуының траекториялық аттракторы глобальды болады:

мұнда –-гі кез келген шенелген ( ) жиын.

(1.1.1)-ші теңдеудің траекториялық аттракторының құрылымын және негізгі бар болу теоремасын тұжырымдаймыз.

Теорема 1.1.1 [47-49]. Айталық, траекторияларының кеңістігі, (1.1.1) теңдеуге сәйкес, -кеңістігінде тұйық және (1.1.5)-ші шарт орындалсын. Айталық, шенелген және компактілі, жартылай группаның жылжытуының тартылатын жиыны бар болсын. Онда әсер етуші жылжытудың жартылай группасының траекториялық аттракторы бар болады. жиыны –де шенелген және компактілі болады.

(1.1.1)-ші теңдеудің траекториялық аттракторының құрылымын осы теңдеудің толық траекториялары тұрғысынан бейнелейік. Уақыттың барлық сандық осінде (1.1.1)-ші теңдеуді қарастырайық

(1.1.9)

Бұл анықтаманы барлық осіне жалпылайық. Егер функциясы барлық уақыт осінде берілсе, онда жылжытулары теріс сандар үшін анықталады. Егер кез-келген үшін функциясы (1.1.9) теңдеудің толық траекториясы деп аталады.

Мұнда операторының жарты осьте шектелуін білдіреді.

Сәйкесінше және және кеңістіктерін анықтаймыз:

мұнда

(1.1.10)

топологиялық кеңістік (жиын ретінде) сәйкес келеді, және анықтама бойынша , егер кез келген үшін. - сияқты метрикалық кеңістік болып табылатыны айқын

Анықтама 1.1.3. (1.1.9) теңдеуінің кеңістігіндегі өзегі (1.1.9) теңдеуінің нормасында шенелген барлықтолық траекторияларының бірігуі болады:

Теорема 1.1.2. Айталық,1.1.1-ші теореманың шарттары орындалсын. Онда

жиыны топологиясында компактілі және кеңістігінде шенелген.

Толық дәлелдеуі [29, p. 913-963; 18, p. 360]-да келтірілген.

Дәлелдеу барысында, нен алынған кейбір шар компактілі болып табылады, -сы үшін келесі лемманы қолданамыз.

*Лемма 1.1.1* (Aubin-Lions-Simon) [50]. . Онда келесі енгізулер компактілі:

(1.1.11)

(1.1.12)

мұнда және – Банах кеңістіктері болсын, мынадай, . Төмендегідей Банах кеңістіктерін қарастырамыз

мұнда және , нормамен

Келесі бөлімде кіші параметріне тәуелді болатыны екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесі және олардың траекториялық аттракторлары зерттеледі.

*Анықтама 1.1.4.* топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы ε→0 ұмтылғанда траекториялық аттракторына жинақталады дейміз, егер кез-келген маңайында болса, кез-келген болатындай табылса, яғни, кез-келген үшін

## 2 ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА НАВЬЕ - СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ

2.1 бөлімде перфорацияланған облыстың геометриялық құрылымы анықталады, зерттеу жұмысының міндеті тұжырымдалады және қажетті функционалдық кеңістіктер сипатталады. Осы бөлімде периодты перфорация анықталып, есептің қойылымы беріледі.

2.2 бөлім перфорацияланған облыста тез тербелмелі мүшелері бар автономды екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің аттракторларының орташалануына арналған.

## 2.1 Есептің қойылымы және белгілеулері

Айталық, – -гі шектелген облыс және оның шекарасы тегіс болсын. Тиесілі шарға диффеоморфты компакт болып табылатындай – облыс болсын және

және – кез келген жиын болсын, біз келесі белгілеулерді енгіземіз: үшін келесi жиындарды анықтаймыз

Әрі қарай, облысын және рұқсат етілген индекстер жинағын анықтаймыз

Назар аударыңыз, мұнда, – тұрақты. Келесі облысты қарастырайық,

, .

Келесі белгілеулерді енгіземіз:

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Кеңістіктер үшін келесі белгілеулерді енгіземіз:

, ,

,

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз.

Келесі есепті қарастыралық:

(2.1.1)

мұнда P-қысым,, , – шекараның сыртқы нормаль векторы және нақты сан.

Әрі қарай

,

мұнда – әрбір айнымалы үшін 1–периодты және шартын қанағаттандыратын функция ,мұнда – қисық ұзындығының элементі.

вектор-функциялар үшін, функциялары кез келген және кеңістігінде орташа мәні бар, яғни

немесе

(2.1.2)

Кез келген функция үшін.

Лебег интегралының абсолютті үзіліссіздігінен, (2.1.2)-ші шарт бойынша ұмтылғанда кез келген функциясы үшін төмендегідей теңдікті аламыз

. (2.1.3)

Егер , (1.2.1) бастапқы-шектік есептің әлсіз шешімі бар болатыны белгілі, онда, кеңістігінде жататын, мынадай, . Бұл ретте, онда . Мұнда –ға түйіндес кеңістік. Дәлелдеу үшін, қараңыз, мысалы, [51-61].

Жоғарыда айтылғандарға сүйене отырып, (2.1.1) бастапқы-шектік есептің, яғни функцияның әлсіз шешімін зерттейміз

есепті (2.1.1) жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады, яғни

(2.1.4)

кез келген функциясы үшін . Мұнда векторлардың скалярлық көбейтіндісін білдіреді .

(2.1.1)-і есеп үшін траекториясының кеңістігін сипаттау кезінде 1-бөлімнің жалпы сызбасын пайдаланамыз және әр кесінді үшін Банах кеңістігін анықтаймыз

(1.2.5)

нормамен

(2.1.6)

Алайда, (2.1.2) шарт (2.2.1)-і нормасы үшін орындалады, ал жартылай группаның жылжытулары (2.1.3)-і қанағаттандырады.

қою арқылы, аламыз, ал, егер , онда . Әрі қарай, (2.2.1)-і есептің әлсіз шешімдерін 1-бөлімнің жалпы сызбасынан теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастыруға болады.

Кеңістікті анықтағаннан кейін (2.1.4) біз мынаны аламыз

арқылы (2.1.1) есептің барлық әлсіз шешімдерінің жиының белгілейміз. Назар аударайық, кез келген функция үшін -ның кем дегенде орындалатындай, бір траекториясы бар болады. Демек, (2.1.1) есептіңтраекториясының кеңістігі бос емес және жеткілікті үлкен.

және траекториясының кеңістігі трансляционды-инвариантты болып табылатыны айқын, яғни, егер , онда кез келген үшін . Демек,

Әрі қарай, кеңістігінің нормасын қолдана отырып, кеңістігіндегі метрикасын анықтаймыз және келесідей түрде жазамыз

Бұл метрикалар кеңістігінде топологияны туындатады (сәйкесінше ). Назар аударыңыз, егер кез келген болса, тізбегі функциясына –да жинақталады. топологиясы өлшемді (қр. (1.1.6)) және тиісті метрикалық кеңістікте толық болады. Біз (2.1.1)-есептің кеңістігінің траекториясында топологияны қарастырамыз. әсер ететін жартылай группаның жылжытулары қарастырылып отырған топологиясында үзіліссіз.

1-ші бөлімнің жалпы сызбасына сәйкес, Банах кеңістігін қолдана отырып, шенелген жиынды анықтаймыз (қр. (2.1.7)).

(2.1.7)

және – кеңістігінің ішкеңістігі екені айқын.

жартылай группаның жылжытуларын қарастырамыз .

Айталық, (2.1.1)-ші есептің барлық әлсіз шешімдерінен тұратын шенелген кеңістіктегі өзегін білдіреді,

Бұл лемманың дәлелдеуі [62] және [63] ескере отырып, дербес жағдай үшін келтірілген [64] дәлелдеумен толығымен сәйкес келетіні туралы тұжырымдама бар.

Лемма 2.1.1. (2.1.1)-ші есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны бірқалыпты ( ) кеңістігінде шенелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (2.1.1) есебінің өзегі– бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы, кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз.

**2.2 Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің бастапқы-шектік есебінің аттракторларының орташалануы**

### 2.2.1 Негізгі тұжырым

Осы бөлімде (2.1.1) Навье–Стокс теңдеулер жүйесі үшін траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттеледі және тиісті орташаланған теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторына жинақталатындығы көрсетіледі.

Орташаланған (шектік ) есеп келесі түрде жазылады:

(2.2.1)

мұнда

мұнда және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

Бастапқы-шектік (2.2.1) –і есептің әлсіз шешімін қарастырамыз, яғни функция

(2.2.1)-і есепті жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады,яғни

(2.2.2)

кез келген функциялар үшін.

Ескерту 2.2.1. Ескере кетуіміз керек, (2.2.1) шекті оператордың коэрцитивтілігі, үлкен мәселе болып табылады, өйткені сандары әрқашан оң болады.

Атап айтқанда, (2.2.1) есептің дұрыстығы, оператордың коэффициентімен байланысты теңсіздікпен жазылады

(2.2.3)

мұнда –кеңістігіндегі операторының бірінші меншікті саны. Дәлелдеуін қараңыз [65].

(2.2.3)–шы есеп (2.2.1)–ші шартпен берілсе, онда , траекториялық кеңістігінде (2.2.1)–шы есепке сәйкес келетін траекториялық аттракторы бар, және

мұнда – –гі (2.2.1) есебінің өзегі.

Навье–Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының орташалануы туралы негізгі теореманы тұжырымдаймыз [34, p. 3-230; 35, p. 590-606; 36, p. 3-406]:

Теорема 2.2.1. Айталық , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(2.2.4)

Сонымен қатар,

(2.2.5)

Ескерту 2.2.2. Назар аударайық, 2.2.1 теоремадағы кеңістіктер ε-ге тәуелді. Барлық функциялардағы тиісті нормаларды сақтай отырып, тесіктердің ішінде жалғастыруға болады.

### 2.2.2 Көмекші тұжырым

Бұл бөлімде жұмыстың нәтижелері келтірілген [65, p. 159-184], олар төменде пайдаланылады.

Көмекші есепті қарастырайық

(2.2.6)

Төмендегідей шарттарды қоямыз:

(2.2.7)

Шешімді қатар түрінде іздейміз:

(2.2.8)

(2.2.6)-ші қатарды (2.2.8) –ші есепке қоямыз және теңдеудегідей бойынша бірдей ретті мүшелерді жинақтап, сондай-ақ, шекаралық шарттағыдай, есептің үлкен дәрежесі төмендегідей жазылатын рекурентті тізбегін аламыз:

(2.2.9)

(2.2.9)-ші есептің интегралдық тепе-теңдігі келесі түрдегідей болады

(2.2.10)

мұнда .

Интегралдық теңдіктің түрі функцияcының құрылымын көрсетуге мүмкіндік береді:

(2.2.11)

Берілген өрнекті (1.3.10)-ға қойып және сәйкесінше мүшелерді топтастырып және функциялары үшін келесі есепке келеміз:

(2.2.12)

немесе, классикалық түрде

(2.2.13)

немесе

(2.2.12)-гі сәйкестік шарты бөліктеп интегралдау арқылы оңай тексеріледі және (2.2.7) және (2.2.13) есептерден шығады. Назар аударайық, және функциялары дәл аддитивті тұрақтыға дейін анықталған, нормалаудың негізгі шарттары төмендегідей жазылады

Ары қарай бұл шарттар орындалады деп саналады.

дәрежесі –да төмендегі есепті береді:

(2.2.14)

Келесі тұжырым дұрыс.

Лемма 2.2.1 және функциялары келесідей интегралдық теңдікпен байланысты

(2.2.15) есептің интегралдық теңдігі қажет болады.

мұнда .

Алғашқы формальды орташаланған теңдеу болып табылатындай (2.2.15) есептің шешілу шарты функциясының теңдеуіне әкеледі. 2.2 лемманы қолданып, төмендегідей түрде жазамыз

(2.2.15)

мұнда

Олай болса, орташаланған есеп келесідей түрде жазылады:

(2.2.16)

мұнда , .

Келесідей лемма дұрыс (қр. [65,p.159-185]).

Лемма 2.2.2.Егер – (2.2.6)-ші есептің шешімі, ал – (2.2.17) есептің шешімі болса, онда ұмтылғанда төмендегідей жинақтылық орындалады:

(2.2.17)

[32, p. 49-75] жұмыс нәтижелеріне сүйене отырып 2.2.2 ескертуін ескере отырып, мынаны көрсетеміз

(2.2.18)

Ол үшін төмендегідей бағалауды қолданамыз

(2.2.19)

[18, p. 3-360]-ші монографияда (2.1.1) және (2.2.1) теңдеулерінің күшті топологиялық кеңістікте және траекториялық аттракторлары бар екені дәлелденген, мұндағы

Сондай-ақ, төмендегідей белгілеу енгіземіз:

-да және болғандықтан,

(2.2.20)

аламыз. Бұл кезде бірмәнді шектеулерді қолдандық.

Онда, жинақтылық (1.2.19) дәлелденді.

### 2.2.3 Теорема 2.2.1 дәлелдеуі

Дәлелдеуі. (2.1.5)-тен (2.2.5) шығатыны айқын. Сондықтан, (2.2.5) дәлелдеу жеткілікті, олай болса , -да кез келген маңайында саны табылып, төмендегідей шарт орындалатының көрсетеміз

барлық үшін (2.2.21)

Айталық (1.3.22)-ы теңдік дұрыс емес деп ұйғарайық. Онда а маңайы және тізбектері табылады, мынандай,

барлық үшін. (2.2.22)

(2.2.2)-ші шарттан кеңістігінде тізбегі шенелгендігі шығады. Демек, интегралдық теңдікті және Коши-Буняковский теңсіздігін қолданып, тізбегінің шешімі шенеледі деп қорытындылаймыз. Тізбекшеге көшу арқылы, біз болжаймыз,

тұжырымдаймыз. функциясы төмендегідей теңдеуді

(2.2.23)

келесідей шекаралық шартты

және энергетикалық теңдікті

(2.2.24)

кез келген үшін және кез келген функция үшін қанағаттандырады. Одан басқасы, , және . Компактілік туралы белгілі теоремадан [31,p.554] (біздің жағдайымыз үшін нақты тұжырымды қараңыз [31,p.554]) есептейміз, және барлығы дерлік . Атап айтқанда, топологиясында күшті.

–де (2.2.2)-тен теңдігі шығады және, сәйкесінше, әлсіз. Енді, [31, p. 3-550] стандартты талқылауларды қолданып (толық дәлелдеулерді қараңыз [29, p. 913-963; 18, p. 3-360; 22, c. 13-49]) 2.2.2 лемманы және жинақтылықты (2.2.19)-ші қолданып, (2.2.24) және (2.2.25) үшін .

Сәйкесінше бар болады, яғни, — сыртқы күшпен берілген сәйкесінше (2.2.25) теңдікті қанағаттандыратын (2.1.1) теңдеудің шешімі болады. Сол уақытта, және сәйкесінше, үшін тұжырымдаймыз. Бұл (2.2.23)-ге қарама-қайшы. Теорема дәлелденді.

**3 ЛОКАЛЬДЫ-ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА НАВЬЕ - СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ**

3.1 бөлімде перфорацияланған облыстың геометриялық құрылымы анықталады, зерттеу жұмысының міндеті тұжырымдалады және қажетті функционалдық кеңістіктер сипатталады. Осы бөлімде локальды-периодты перфорация анықталып, есептің қойылымы беріледі.

3.2 бөлім перфорацияланған облыста тез тербелмелі мүшелері бар автономды екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің аттракторларының орташалануына арналған.

## 3.1 Есептің қойылымы және белгілеулері

Ең алдымен перфорацияланған облысты анықтаймыз. Айталық, – тегіс шектелген облыс. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

Айталық, тегіс функцияны – бойынша 1-периодты деп есептейміз, мынадай,

, , үшін . Жиынды анықтаймыз,

және тегіс облысты келесі түрде енгіземіз :

облысын созылған кеңістікте деп белгілейміз. Көбінесе, 2-өлшемді торында анықталған 1-периодты функцияларды функциялар ретінде қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген сызбаға сәйкес шекарасы және оның қосындыларының шекарасынан тұрады.

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы–шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз. Келесі есепті қарастыралық:

(3.1.1)

мұнда P-қысым, , , – шекараның сыртқы нормаль векторы және -нақты сан.

Әрі қарай

, – айнымалы үшін 1-периодты және , төмендегі шартты қанағаттандыратын функция

мұнда – қисық ұзындығының элементі.

Сол сияқты, , вектор-функциясы– айнымалы үшін 1-периодты және , төмендегі шартта қанағаттандыратын функция

мұнда – қисық ұзындығының элементі.

Егер (3.1.1) бастапқы-шектік есептің әлсіз шешімі бар болатыны белгілі, онда,, кеңістігіне жататын, мынадай, . Бұл ретте, онда . Дәлелдеуін қараңыздар, мысалы, [59,p.635-677], [61,c.10-34].

Жоғарыда айтылғандарды сүйене отырып, (3.1.1) бастапқы-шектік есептің, яғни функцияның әлсіз шешімдерін зерттейміз

(3.1.1)-ші есепті жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады, яғни

(3.1.2)

кез келген функциялар үшін. Мұнда векторлардың скалярлық көбейтіндісін білдіреді, ,ал – қисық ұзындығының элементі.

(3.1.1) есебі үшін, траекториясының кеңістігін сипаттау кезінде 2-ші бөлімнің жалпы сызбасын пайдаланамыз және әр кесінді үшін Банах кеңістігін анықтаймыз

(3.1.3)

нормамен

(3.1.4)

(3.1.2)-ші шарт (3.1.4)-ші нормасы үшін орындалады, ал жартылай жылжытулардың группасы {S (h)} (3.1.3)-ті қанағаттандырады.

орнына қою арқылы, аламыз , ал егер , онда . Мұнда  Әрі қарай, (3.1.1)-і есептің әлсіз шешімдерін 1-ші бөлімнің жалпы сызбасынан теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастыруға болады.

Кеңістікті анықтағаннан кейін (3.1.4) біз мынаны аламыз

арқылы (3.1.1)-і есептің барлық әлсіз шешімдерінің жиының белгілейміз. Назар аударайық, кез келген функция үшін кем дегенде орындалатындай, бір траекториясы бар болады. Демек, (3.1.1) есептің траекториясының кеңістігі бос емес және жеткілікті үлкен.

және траекториясының кеңістігі трансляционды-инвариантты болып табылатыны айқын, яғни, егер , болса, онда кез келген үшін . Демек,

Ары қарай, кеңістігінің нормасын қолдана отырып, кеңістігіндегі метрикасын анықтаймыз және келесідей түрде жазамыз:

Бұл метрикалар кеңістігінде топологияны туындатады (сәйкесінше ). Назар аударыңыз, егер кез келген болса, тізбегі функциясына жинақталады. топологиясы өлшемді (қр. (1.1.6)) және тиісті метрикалық кеңістікте толық болады. Біз (3.1.1) есептің кеңістігінің траекториясында топологияны қарастырамыз. әсер ететін жартылай группаның жылжытулары қарастырылып отырған топологиясында үзіліссіз.

1-шi бөлімнің траекториялық аттрактордың жалпы сызбасына сүйене отырып, Банах кеңістігін қолдана отырып, шектелген жиынды анықтаймыз. ((1.1.7) қараңыз).

(3.1.5)

және – кеңістігінің тізбекшесі екені айқын.

жартылай группаның жылжытуларын қарастырамыз.

Айталық, (3.1.1) есептің барлық әлсіз шешімдерінен тұратын шектелген кеңістіктегі өзегін білдіреді,

*Лемма 3.1.1.* (3.1.1)-ші есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны кеңістігінде () бірқалыпты шенелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (3.1.1) есебінің өзегі– кеңістігі ( ) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы, кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз.

Бұл лемманың дәлелдеуі, [33, c. 115; 65,p.159-184] ескере отырып, дербес жағдай үшін келтірілген [18, p. 3-360] дәлелмен толығымен сәйкес келеді.

## 3.2 Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің бастапқы-шектік есебінің аттракторларының орташалануы

### 3.2.1 Негізгі тұжырым

Осы тармақшада Навье–Стокс теңдеулер жүйесі (3.1.1) үшін траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттеледі және тиісті орташаланған теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторына жинақталатындығы көрсетіледі.

Орташаланған (шектік ) есеп келесі түрде жазылады:

(3.2.1)

мұнда

мұнда және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

Бастапқы-шектік (3.2.6)-ы есептің әлсіз шешімін қарастырамыз, яғни функция

(3.1.1)-і есепті жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады,яғни

(3.2.2)

кез келген функциялар үшін.

Ескерту 3.2.1. Келесідей белгілеу енгіземіз:. Ескере кетуіміз керек, (3.2.1) шекті оператордың коэрцитивтілігі, үлкен мәселе болып табылады, өйткені сандары әрқашан оң болады.

Атап айтқанда, (3.2.1) есептің дұрыстығы, оператордың коэффициентімен байланысты теңсіздікпен жазылады

(3.2.3)

мұнда –кеңістігіндегі операторының бірінші меншікті саны. Дәлелдеуін қараңыз[6,c.730-754].

(3.2.2)–шы есеп (3.2.1)–ші шартпен (ескерту 2.2.1 қара.) берілсе, онда , траекториялық кеңістігінде (3.2.1)–шы есепке сәйкес келетін траекториялық аттракторы бар, және

мұнда, ––гі (3.2.1) есептің өзегі.

Навье–Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының орташалануы туралы негізгі теореманы тұжырымдаймыз [37, p. 199-224; 38, c. 95-103; 39, c. 99-149]:

Теорема 3.2.1. Айталық, , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(3.2.4)

Сонымен қатар,

(3.2.5)

Ескерту 3.2.2. Назар аударайық, 3.2.1 теоремадағы кеңістіктер ε-ға тәуелді. Барлық функциялардағы тиісті нормаларды сақтай отырып, тесіктердің ішінде жалғастыруға болады.

### 3.2.2 Көмекші тұжырым

Бұл бөлімде жұмыстың нәтижелері келтірілген [6, c. 730-734], олар төменде пайдаланылады.

Көмекші есепті қарастырайық

(3.2.6)

Төмендегідей шарттарды қоямыз:

(3.2.7)

Шешімді қатар түрінде іздейміз:

(3.2.8)

(3.2.8)-ші қатарды (3.2.6) –ші есепке қоямыз және теңдеудегідей бойынша бірдей ретті мүшелерді жинақтап, сондай-ақ, шекаралық шарттағыдай, есептің үлкен дәрежесі төмендегідей түрде жазылатын рекуррентті тізбегін аламыз,:

(3.2.9)

(3.2.9)-ші есептің интегралдық теңдігі келесі түрдегідей болады

(3.2.10)

мұнда .

Интегралдық теңдіктің түрі функциясының құрылымын көрсетуге мүмкіндік береді:

(3.2.11)

Берілген өрнекті (3.2.10)-ке қойып және сәйкесінше мүшелерді топтастырып және функциялары үшін келесі есепке келеміз:

(3.2.12)

немесе классикалық түрде

(3.2.13)

немесе

(3.2.14)

немесе

(3.2.12)-гі сәйкестік шарты бөліктеп интегралдау арқылы оңай тексеріледі және (3.2.7) және (3.2.13) есептерден шығады. Назар аударайық, , және функциялары дәл аддитивті тұрақтыға дейін анықталған, нормалаудың негізгі шарттары төмендегідей жазылады

Ары қарай бұл шарттар орындалады деп саналады.

дәрежесі –да төмендегі есепті береді:

(3.2.15)

Келесі тұжырым дұрыс.

*Лемма 3.2.1.* және функциялары келесідей интегралдық теңдікпен байланысты

(3.2.15) есептің интегралдық теңдігі қажет болады.

+

мұнда .

Алғашқы формальды орташаланған теңдеу болып табылатындай (3.2.15) есептің шешілу шарты функциясының теңдеуіне әкеледі, ол 3.2.1 лемманы қолданып, және және араларындағы байланысты ескере отырып, қайтадан төмендегідей түрде жазамыз

(3.2.16)

мұнда

Олай болса, орташаланған есеп келесі түрге ие

(3.2.17)

мұнда , ,

Келесідей лемма дұрыс (қр. [6,c.730-754]). Егер – (2.2.6)-ші есептің шешімі, ал – (3.2.17) есептің шешімі, онда ұмтылғанда төмендегідей жинақтылық орындалады:

(3.2.18)

[32, p. 49-75] жұмыс нәтижелеріне сүйене отырып 3.2.2 ескертуін ескере отырып, мынаны көрсетеміз

(3.2.19)

Ол үшін төмендегідей бағалауларды қолданамыз

(3.2.20)

[18, p. 3-360]-і монографияда (3.1.1) және (3.2.1) теңдеулерінің күшті топологиялық кеңістікте және траекториялық аттракторлары бар екені дәлелденген, мұндағы

Сондай-ақ, төмендегідей белгілеу енгіземіз:

-да және болғандықтан,

(3.2.21)

аламыз. Бұл кезде бірмәнді шектеулерді қолдандық.

Онда, жинақтылық (3.2.19) дәлелденді.

### 3.2.3 Теорема 2.2.1 дәлелдеуі

### Дәлелдеуі. (3.1.5)-тен (3.2.5)-ы шығатыны айқын. Сондықтан, (3.1.5) –ны дәлелдеу жеткілікті, олай болса, -да кез келген маңайында саны табылып, төмендегідей шарт орындалатының көрсетеміз

барлық үшін. (3.2.22)

Айталық (3.2.22)-і теңдік дұрыс емес деп ұйғарайық. Онда маңайы және тізбектері табылады, мынандай,

барлық үшін. (3.2.23)

(3.2.2)-ші шарттан кеңістігінде тізбегі шенелгендігі шығады. Демек, интегралдық теңдікті және Коши-Буняковский теңсіздігін қолданып, тізбегінің шешімі шенеледі деп қорытындылаймыз. Тізбекшеге көшу арқылы, біз болжаймыз,

тұжырымдаймыз. функциясы төмендегідей теңдеуді

(3.2.24)

келесідей шекаралық шартты

және энергетикалық теңсіздікті

(3.2.25)

кез келген үшін және кез келген функция үшін қанағаттандырады. Одан басқасы, және . Компактілік туралы белгілі теоремадан [31,p.554] (біздің жағдайымыз үшін нақты тұжырымды қараңыз [31,p.554]) есептейміз, –де күшті және барлығы дерлік . Атап айтқанда, топологиясында күшті.

Енді, [31, p. 3-550] стандартты талқылауларды қолданып (толық дәлелдеулерді қараңыз [18, p. 3-36; 23, c. 15-27; 29, p. 913-963]) 3.2.2 лемманы және жинақтылықты (3.2.19)-ті қолданып, (3.2.24) және (3.2.25) үшін . Сәйкесінше бар болады, яғни, —сыртқы күшпен берілген сәйкесінше (3.2.25) теңдікті қанағаттандыратын (3.2.1) теңдеудің шешімі болады. Сол уақытта, -да және сәйкесінше, , үшін тұжырымдаймыз. Бұл (3.2.23)-ге қарама-қайшы. Теорема дәлелденді.

**4 ЛОКАЛЬДЫ- ПЕРИОДТЫ ПЕРФОРАЦИЯЛАНҒАН ОРТАДА ТҰТҚЫРЛЫҒЫ АУЫСПАЛЫ АНИЗОТРОПТЫ СҰЙЫҚТЫҚҚА АРНАЛҒАН НАВЬЕ– СТОКС ЖҮЙЕСІНІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ АТТРАКТОРЛАРЫН ОРТАШАЛАУ**

4.1 бөлімде перфорацияланған облыстың геометриялық құрылымы анықталады, зерттеу жұмысының міндеті тұжырымдалады және қажетті функционалдық кеңістіктер сипатталады. Сонымен қатар, ауыспалы анизотропты сұйықтыққа арналған локальды-периодты перфорация анықталып, есептің қойылымы қойылады.

4.2 бөлім перфорацияланған облыста тез тербелмелі мүшелері бар автономды екі өлшемді Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің аттракторларының орташалануына арналған.

## 4.1 Есептің қойылымы және белгілеулері

Ең алдымен перфорацияланған облысты анықтаймыз. Айталық, – тегіс шектелген облыс. Келесі белгілеулерді енгіземіз:

Айталық, тегіс функцияны – бойынша 1-периодты деп есептейміз, мынадай, , үшін . Жиынды анықтаймыз,

және тегіс облысты келесі түрде енгіземіз :

Жоғарыда келтірілген сызбаға сәйкес шекарасы және оның қосындыларының шекарасынан тұрады. Келесідей белгілеулер енгіземіз:

және .

жиынының кеңістіндегі тұйықталуын және жиынының кеңістіндегі тұйықталуын арқылы белгілейміз. Сәйкесінше, жиынның  кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын – және жиынның кеңістіндегі нормасы бойынша тұйықталуын деп анықтаймыз, мұнда – шекарасында іздері нөлге тең вектор–функциялар жиыны.

Бұл кеңістіктердің нормалары, сәйкесінше, келесідей анықталады:

Навье-Стокс теңдеулерінің автономды екі өлшемді жүйесі үшін келесі бастапқы-шектік есептің траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттейміз. Келесі есепті қарастыралық:

(4.1.1)

Мұнда, P-қысым, , , , – шекарадағы сыртқы нормальдың бірлік векторы және матрица-симметриялы оң анықталған, яғни, -кез келген векторлар үшін, кез келген және –оң тұрақты.

Әрі қарай,

, – айнымалы үшін 1-периодты және , төмендегі шартта қанағаттандыратын функция

мұнда–локальды қосылуы, – созылған кеңістіктегі бойынша қосындыларының шекарасы, ал, – қисық ұзындығының элементі.

Сол сияқты, вектор функциясының компоненттері мына шарттарды қанағаттандырады:, —-гі 1-периодты айнымалы функция және

Егер ,(4.1.1) бастапқы-шектік есептің әлсіз шешімі бар болатыны белгілі, онда, кеңістігіне жататын, мынадай, . Бұл ретте, онда . Мұнда түйіндес кеңістігі. Алғашқы есептің шешімінің бар екендігін дәлелдеу үшін диссипативті бағалау техникасы қажет. Осы берілген есептің шешімі үшін диссипативті бағалау жүйелілікті сақтай отырып, қуыстардың ішінде жалғасын таба отырып орындалады ([65, p. 159-184] және [66] ескере отырып қараңыз). Ж.Л. Лионс және Мадженестің симметриялы жалғас әдісі [25, c. 3-368] (сондай-ақ қараңыздар[67-68]), сонымен қатар, В.В. Жуковтың жұмысының нәтижелерін [70-73] қуыстың шекарасында үшінші шеттік жағдайды жалғастыру кезінде норманың (жүйеліліктің) сақталуын дәлелдеуде қолданамыз. Айта кетейік, [24, c. 3-33]-ші жұмысты қолдана отырып, жеткілікті негізгі жағдайда қуыстардың геометриясын жалғастыруды техникасыз жасауға болады.

Содан кейін, мысалы, [29, p. 913-963; 31, p. 3-550] жұмыс нәтижелері қолданылады.

Жоғарыда айтылғандарды сүйене отырып, (4.1.1) бастапқы-шектік есептің, яғни функцияның әлсіз шешімдерін зерттейміз

(4.1.1) есепті жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады, яғни

(3.1.2)

кез келген функциясы үшін . Мұнда векторлардың скалярлық көбейтіндісін білдіреді, ,ал –қисық ұзындығының элементі.

(4.1.1) есебі үшін, траекториясының кеңістігін сипаттау кезінде 1-бөлімнің жалпы сызбасын пайдаланамыз және әр кесінді үшін Банах кеңістігін анықтаймыз

(4.1.3)

нормамен

(4.1.4)

Алайда, (4.1.2)-і шарт (4.1.4)-і нормасы үшін орындалады, ал жартылай группаның жылжытулары{S (h)} (4.1.3)-ті қанағаттандырады.

қою арқылы, аламыз , ал егер , онда . Мұнда  Әрі қарай, (4.1.1)-і есептің әлсіз шешімдерін 1-ші бөлімнің жалпы сызбасынан теңдеулер жүйесінің шешімі ретінде қарастыруға болады.

Кеңістікті анықтағаннан кейін (4.1.4) біз мынаны аламыз

арқылы (4.1.1) есептің барлық әлсіз шешімдерінің жиының белгілейміз. Назар аударайық, кез келген функция үшін кем дегенде орындалатындай, бір траекториясы бар болады. Демек, (4.1.1) есептің траекториясының кеңістігі бос емес және жеткілікті үлкен.

және траекториясының кеңісті трансляционды-инвариантты болып табылатыны айқын, яғни, егер , болса, онда кез келген үшін . Демек,

Әрі қарай, кеңістігінің нормасын қолдана отырып, кеңістігіндегі метрикасын анықтаймыз және келесідей түрде жазамыз

Бұл метрикалар кеңістігінде топологияны туындатады (сәйкесінше ). Назар аударыңыз, егер кез келген болса тізбегі функциясына –да жинақталады. топологиясы өлшемді (қр. (1.1.6)) және тиісті метрикалық кеңістікте толық болады. Біз 4.1.1 есептің кеңістігінің траекториясында топологияны қарастырамыз.

әсер ететін жартылай группаның жылжытулары қарастырылып отырған топологиясында үзіліссіз.

1-ші бөлімнің траекториялық аттракторының жалпы сызбасына сәйкес, Банах кеңістігін қолдана отырып, шектелген жиынды анықтаймыз. (қараңыз (1.1.7)).

(4.1.5)

және – кеңістігінің тізбекшесі екені айқын.

жартылай группаның жылжытуларын қарастырамыз.

Айталық, (3.1.1)-ші есептің барлық әлсіз шешімдерінен тұратын шектелген кеңістіктегі өзегін білдіреді,

Бұл лемманың дәлелдеуі, [6,c.730-754] және [33,c.115-116]-ды ескере отырып, дербес жағдай үшін келтірілген [18,p.363] дәлелмен толығымен сәйкес келеді.

*Лемма 4.1.1* (4.1.1)-ші есептің топологиялық кеңістігінде траекториялық аттракторы бар. жиыны кеңістігінде () бірқалыпты шенелген және топологиясында компактілі. Әрі қарай,

мұнда (4.1.1) есебінің өзегі–кеңістігінде ( ) бос емес және бірқалыпты шенелген.

Мұндағы кеңістігі және топологиясы кіші параметр -ға тәуелді болатынын ескереміз. Мұнда жартылай осіндегі тарылу операторын білдіреді.

## 4.2 Перфорацияланған облыстағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің бастапқы-шектік есебінің аттракторларының орташалануы

### 4.2.1 Негізгі тұжырым

Осы тармақшада Навье–Стокс теңдеулер жүйесі (4.1.1) үшін траекториялық аттракторларының асимптотикалық әрекетін зерттеледі және тиісті орташаланған теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторына жинақталатындығы көрсетіледі.

Орташаланған (шектік) есеп келесі түрде жазылады,орташаланған коэффициент құрылымын қараңыз [13, p. 215-231]:

(4.2.1)

мұнда

мұнда , және – бойынша 1-периодты, периодтылық ұяшығында орташа мәні нөлге тең, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын функциялар:

мұнда , –шекара жолағының сыртқы нормалының бірлік векторы.

Бастапқы-шектік (4.2.1)-ы есептің әлсіз шешімін қарастырамыз, яғни функция

(4.1.1)-і есепті жалпы функциялар мағынасында қанағаттандырады,яғни

(4.2.2)

кез келген функциялар үшін.

Ескерту 4.2.1. Келесідей белгілеу енгіземіз ). Ескере кетуіміз керек, (4.2.1) шекті оператордың коэрцитивтілігі, үлкен мәселе болып табылады, өйткені сандары әрқашан оң болады.

Атап айтқанда, (4.2.1) есептің дұрыстығы, оператордың коэффициентімен байланысты теңсіздікпен жазылады

(4.2.3)

мұнда –кеңістігіндегі операторының бірінші меншікті саны. Дәлелдеуін қараңыз[6,c.730-754].

(4.2.3)–шы (қр. Ескерту 4.2.1) есеп (4.2.1)–ші шартпен берілсе, онда , траекториялық кеңістігінде (4.2.1)–шы есепке сәйкес келетін траекториялық аттракторы бар, және

мұнда – –гі (4.2.1) есептің өзегі.

Навье–Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының орташалануы туралы негізгі теореманы тұжырымдаймыз [40, p. 213-233; 41, c. 386-406; 42, c. 3-330]:

*Теорема 4.2.1.* Айталық, , онда топологиялық кеңістігінде келесі шектік қатынастар орындалады:

(4.2.4)

Сонымен қатар,

. (4.2.5)

### 4.2.2 Көмекші тұжырым

Бұл бөлімде жұмыстың нәтижелері келтірілген [6, c.730-753], олар төменде пайдаланылады.

Көмекші есепті қарастырайық

(4.2.6)

Төмендегідей шарттарды қоямыз:

(4.2.7)

Шешімді қатар түрінде іздейміз:

(4.2.8)

Ескерту 4.2.3. Әдетте, асимптотикалық қатарлар жинақты емес және олардың жинақталуы ресми асимптотикалық талдауда қолданылмайды. Мұндай қатарлар шекті есептің түрін анықтау үшін қолданылады және бұл құрылымдардың негіздемесі басқа дәлелдеулерге негізделген.

(4.2.8)-ші қатарды (4.2.6)-ші есепке қоямыз және теңдеудегідей бойынша бірдей ретті мүшелерді жинақтап, сондай-ақ, шекаралық шарттағыдай, есептің үлкен дәрежесі төмендегідей жазылатын рекурентті тізбегін аламыз:

(4.2.9)

(4.2.9)-ші есептің интегралдық теңдігі келесі түрдегідей болады

(4.2.10)

мұнда .

Интегралдық теңдіктің түрі функциясының құрылымын көрсетуге мүмкіндік береді:

(4.2.11)

Берілген өрнекті (4.2.10)-ке қойып және сәйкесінше мүшелерді топтастырып , және функциялары үшін келесі есепке келеміз:

(4.2.12)

немесе, классикалық түрде

(4.2.13)

немесе

(4.2.14)

немесе

(4.2.12)-гі сәйкестік шарты бөліктеп интегралдау арқылы оңай тексеріледі және (4.2.7), (4.2.13) және (4.2.14) есептерден шығады. Назар аударайық,, және функциялары дәл аддитивті тұрақтыға дейін анықталған, нормалаудың негізгі шарттары төмендегідей жазылады

Ары қарай бұл шарттар орындалады деп саналады.

дәрежесі -да төмендегі есепті береді:

(4.2.15)

Келесі тұжырым дұрыс.

Лемма 4.2.1 және функциялары келесідей интегралдық теңдікпен байланысты

(4.2.15) есептің интегралдық теңдігі қажет болады.

Алғашқы формальды орташаланған теңдеу болып табылатындай (4.2.15) есептің шешілу шарты функциясының теңдеуіне әкеледі. 4.2.1 лемманы қолданып, және және араларындағы байланысты ескере отырып, қайтадан төмендегідей түрде жазамыз

(4.2.16)

Мұнда

Олай болса, орташаланған есеп келесі түрге ие

(4.2.17)

мұнда үшін аламыз , ,

Келесідей лемма дұрыс (қр. [6,c.730-754]). Егер – (4.2.6)-ші есептің шешімі, ал – (4.2.17) есептің шешімі, онда төмендегідей жинақтылық орындалады:

(4.2.18)

[32, p. 49-75] жұмыс нәтижелеріне сүйене отырып [32, p. 49-75] 4.2.2 ескертуін ескере отырып, мынаны көрсетеміз

(4.2.19)

Ол үшін төмендегідей бағалауларды қолданамыз

(4.2.20)

[18, p. 3-360] монографияда (4.1.1) және (4.2.1) теңдеулерінің күшті топологиялық кеңістікте және траекториялық аттракторлары бар екені дәлелденген, мұндағы

Сондай-ақ, төмендегідей белгілеу енгіземіз:

-да, және болғандықтан,

(4.2.21)

аламыз. Бұл кезде бірмәнді шектеулерді қолдандық.

Онда, жинақтылық (4.2.19) дәлелденді.

### 4.2.3 Теорема 4.2.1 дәлелдеуі

Дәлелдеуі. (4.2.5)-тен (4.2.5) шығатыны айқын. Сондықтан, (4.2.5) дәлелдеу жеткілікті, олай болса , -да кез келген маңайында саны табылып, төмендегідей шарт орындалатының көрсетеміз

барлық үшін. (4.2.22)

Айталық (4.2.22)-і теңдік дұрыс емес деп ұйғарайық. Онда маңайы және тізбектері табылады, мынандай,

барлық үшін. (4.2.23)

(4.2.2)-ші шарттан кеңістігінде тізбегі шенелгендігі шығады. Демек, интегралдық теңдікті және Коши-Буняковский теңсіздігін қолданып, тізбегінің шешімі шенеледі деп қорытындылаймыз.Тізбекшеге көшу арқылы, біз болжаймыз,

тұжырымдаймыз. функциясы төмендегідей теңдеуді

(4.2.24)

келесідей шартты

және энергетикалық теңсіздікті

-

(4.2.25)

кез келген үшін және кез келген функция үшін қанағаттандырады. Бұл энергетикалық теңсіздіктің шешімі сынақ функциясы ретінде ауыстыру арқылы интегралдық теңдіктен алынады және тек осы теңдікті қанағаттандыратын шешімдерді қарастырамыз. Олай болса, және . Компактілік туралы белгілі теоремадан [31, p. 3-550] (біздің жағдайымыз үшін нақты тұжырымды қараңыз [31, p. 3-550])біз есептейміз, -де күшті және барлығы дерлік . Атап айтқанда, топологиясында күшті.

Енді, [31, р. 3-550] стандартты талқылауларды қолданып (толық дәлелдеулерді қараңыз[18, p. 3-360; 22, c. 13-49; 29, p. 913-963]) 4.2.2 лемманы және жинақтылықты (4.2.19)-ші қолданып, (4.2.24) және (4.2.25) үшін Сәйкесінше бар болады, яғни, — сыртқы күшпен берілген сәйкесінше (4.2.25) теңдікті қанағаттандыратын (4.2.1) теңдеуінің шешімі болады. Сол уақытта, және сәйкесінше, үшін тұжырымдаймыз. Бұл (4.2.23)-ге қарама-қайшы. Теорема дәлелденді.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Бұл жұмыс үлкен уақыттағы екі өлшемді перфорацияланған ортадағы Навье–Стокс теңдеулер жүйесінің шешімдерінің әрекетін зерттеуге арналған.

Динамикалық жүйелер мен траекториялық аттракторлар диссипативті эволюциялық теңдеулер шешімдерінің шекті әрекетін зерттеуге өте ыңғайлы тәсіл болып табылады. Траекториялық аттрактор әдісінің маңызды артықшылығы-оның зерттеу барысында параметрлерге тәуелділігінің қолданылуы, жаһандық тұрақтылықты зерттеуде қолдану мүмкіндігі, тіпті болмаған жағдайда да шешімдердің бірегейлігі, және т.б. Әртүрлі параметрлерге тәуелділіктерге рұқсат етіледі, мысалы, сингулярлық кездейсоқ тәуелділік.

Әр түрлі теңдеулерді немесе ұсынылған жұмыстағыдай күрделі микроқұрылымы бар облыстар мен ортадағы теңдеулерді қолдануға болады. Мұнда жаһандық аттракторлар теориясына негізделген классикалық тәсіл орындалмайды, оны траекториялық тәсілмен бірге қолдану қажет.

Жұмыста екі өлшемді ұсақ кедергілері бар ортада сығылмайтын сұйықтықтардың тұтқырлығының қозғалысын зерттеуде жаңа тривиальды емес нәтижелер алынды. Жұмыстың нәтижелері математика ғылымының дамуына үлкен үлес қосады және оның қосымшаларында әртүрлі қолданбасын таба алады.

Диссертацияның ұсынылған нәтижелерінің жиынтығы келесі **қорытындыларды** тұжырымдауға мүмкіндік береді:

1. Локалды-кеуекті ортада Навье-Стокс жазық есебінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

2. Локалды-периодты перфорацияланған ортада екі өлшемді Навье-Стокс есебінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

3. Локалды-периодты перфорацияланған ортада тұтқырлығы өзгермелі анизотропты сұйықтық үшін екі өлшемді Навье-Стокс есептерінің траекториялық аттракторының жинақтылық шарттары алынды.

4. Шағын параметрі бар алғашқы есептер үшін шекті (орташаланған) есептер құрылды.

5. Әртүрлі реологиясы бар сұйықтықтар үшін кеуекті орта зерттелді.

Алынған ғылыми нәтижелерді дифференциалдық теңдеулер немесе функционалдық талдаулар пәндері бойынша студенттерге, магистранттар және докторанттарға арнайы элективті курс оқығанда пайдалануға болады.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1 Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974. – 278 с.

2 Gioranescu D., Murat F. Un terme e'trange venu d'ailleurs I & II // In book: Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications Colle'ge de France Seminar. – London: Pitman, 1982. – P. 98-178.

3 Gioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization in open sets with holes // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 71. – P. 590-607.

4 Cioranescu D., Donato P. On a Robin Problem in Perforated Domains // In book: Homogenization and Applications to Material Sciences. – Tokyo: Gakkotosho, 1997. – Vol. 9. – P. 123-136.

5 Conca C., Donato P. Non-homogeneous Neumann problems in domains with small holes // Modelisation Mathematique et Analyse Num'erique (MAN). – 1988. – Vol. 22, Issue 4. – P. 561-607.

6 Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39, №4. – С. 730-754.

7 Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993. – 461 с.

8 Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. – Amsterdam: North-Holland, 1992. – 397 p.

9 Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А., Шамаев А.С. Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск, 2007. – 246 с.

10 Marchenko V.A., Khruslov E.Ya. Homogenization of partial differential equations. – Boston (MA): Birkhauser, 2006. – 388 p.

11 Conca C., Donato P. Non-homogeneous Neumann problems in domains with small holes // Mod'elisation Math'ematique et Analyse Num'erique. – 1988. – Vol. 22, Issue 4. – P. 561-607.

12 Беляев А.Г., Пятницкий А.Л., Чечкин Г.А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №7. – C. 3-20.

13 Chechkin G.A., Piatnitski A.L. Homogenization of Boundary-Value Problem in a Locally Periodic Perforated Domain // Applicable Analysis. – 1999. – Vol. 71, Issue 1-4. – P. 215-235.

14 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Attractors and a «strange term» in homogenized equation // CR M'ecanique. – 2020. – Vol. 348, Issue 5. – P. 351-359.

15 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. Strong Convergence of Trajectory Attractors for Reaction-Diffusion Systems with Random Rapidly Oscillating Terms // Communications on Pure and Applied Analysis (CPAA). – 2020. – Vol. 19, Issue 5. – P. 2419-2443.

16 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Chepyzhov V.V. «Strange Term» in Homogenization of Attractors of Reaction-Diffusion Equation in Perforated Domain // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – Vol. 140, Issue 4. – P. 110208.

17 Бабин А.В., Вишик М.И. Аттракторы эволюционных уравнений. – М.: Наука, 1989. – 293 c.

18 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Attractors for equations of mathematical physics. – Providence, 2002. – 363 p.

19 Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. – NY.: Springer-Verlag, 1988. – Vol. 68. – 446 p.

20 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier-Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems // ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2002. – Vol. 8. – P. 467-487.

21 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier-Stokes system with singularly oscillating external force and its global attractor // J. Dynam. Diff. Eq. – 2007. – Vol. 19, Issue 3. – P. 655-684.

22 Вишик М.И., Чепыжов В.В. Усреднение траекторных аттракторов эволюционных уравнений с быстро осциллирующими членами // Матем. сб. – 2001. – Т. 192, №1. – С. 13-50.

23 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье-Стокса в двумерной пористой среде // Проблемы математического анализа. – 2022. – №115. – С. 15-28.

24 Бекмаганбетов К.А., Чечкин Г.А., Чепыжов В.В. Сильная сходимость аттракторов системы реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // Известия РАН. – 2022. – Т. 86, №6. – С. 3-34.

25 Лионс Ж.-Л., Мадженес Е. Неоднородные граничные задачи и их приложения / пер. с фр. – М.: Мир, 1971. – 371 с.

26 Жиков В.В. Вопросы продолжения функций в связи с теорией усреднения // Дифференц. Уравнения. – 1990. – Т. 26, №1. – С. 39-50.

27 Жиков В.В. Об усреднении в перфорированных случайных областях общего вида // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53, №1. – С. 41-58.

28 Жиков В.В. Об усреднении нелинейных вариационных задач в перфорированных областях // Докл. РАН. – 1995. – Т. 345б №2. – С. 156-160.

29 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Evolution equations and their trajectory attractors // J. Math. Pures Appl. – 1997. – Vol. 76, Issue 10. – P. 913-964.

30 Boyer F., Fabrie P. Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models. – NY.: Springer; 2013. – Vol. 183. – 526 p.

31 Lions J.-L. Quelques m'ethodes de r'esolutions des probl`emes aux limites non lin'eaires. – Paris, 1969. – 554 p.

32 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Trajectory attractors for reaction-diffusion systems // Top. Meth. Nonlin. Anal. J. Julius Schauder Center. – 1996. – Vol. 7, Issue 1. – P. 49-76.

33 Коробков М.В., Пилецке К., Пухначёв В.В. и др. Задача протекания для уравнений Навье-Стокса // УМН. – 2014. – Т. 69, №6(420). – С. 115-116.

34 Chechkin G.A., Piatnitski A.L., Shamaev A.S. Homogenization. Methods and Applications. – Providence, 2007. – 234 p.

35 Cioranescu D., Paulin J.S.J. Homogenization in open sets with holes // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 71. – P. 590-607.

36 Temam R., Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis. – Amsterdam: Elsevier, 1984. – 408 p.

37 Hornung U., Jager W. Diffusion, convection, adsorption, and reaction of chemicals in porous media // J. Differ . Equations. – 1991. – Vol. 92, Issue 2. – P. 199-225.

38 Чечкин Г.А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями // В кн.: Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. – Новосибирск, 1988. – С. 95-104.

39 Чечкин Г.А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Мат. сб. – 1993. – Т. 184, №6. – С. 99-150.

40 Вишик М.И., Чепыжев В.В. Траекторные аттракторы уравнений математической физики// Усп. мат. наук. – 2011. – Т.66, №4(400). – C.3-102

41 Chechkin G.A., Friedman A., Piatnitskij A.L. The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary // J. Math. Anal. Appl. – 1999. – Vol. 231, Issue 1. – P. 213-234.

42 Чечкин Г.А., Чечкина Т.П. Об усреднении задач в областях типа “инфузории” // Тр. семининара им. И.Г. Петровского. – М., 2003. – Т. 23. – С. 386-407.

43 Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – М.: Наука, 1989. – 334 с.

44 Иосида К. Функциональный анализ / пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 622 с.

45 Calderon A.P., Zygmund A. On singular integrals // Amer. J. Math. – 1956. – Vol. 78, Issue 2. – P. 289-309.

46 Campillo F., Kleptsyna M.L., Piatnitskij A.L. Homogenization of random parabolic operators // In book: Homogenization and Applications to Material Sciences. – Tokyo, 1997. – P. 241-255.

47 Клепцына М.Л., Пятницкий А.Л. Усреднение случайной нестационарной задачи конвекции-диффузии // Успехи мат. наук. – 2002. – Т. 57, №4. – С. 95-118.

48 Oleinik O.A., Shamaev A.S., Yosifian G.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. – Amsterdam,1992. – 397 р.

49 Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium // Bulletin of the Karaganda university – Mathematics. – 2022. – Vol. 107, Issue 3. – P. 35-50.

50 Pardoux E., Piatnitskij A.L. Homogenization of a nonlinear random parabolic partial differential equation // Stochastic Processes Appl. – 2003. – Vol. 104, Issue 1. – P. 1-27.

51 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Усреднение аттракторов системы Навье–Стокса перфированной области быстро осциллирующим краевым условием // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Современные проблемы математики и ее приложений». – Душанбе, 2022. – С. 41-45.

52 Bekmaganbetov K.A., Toleubay A.M. Averaging trajectory attractors of the system of Stokes equations in a two–dimensional porous medium // Тез. докл. традиц. междунар. апрельс. матем. конф. в честь Дня работнико в науки Республики Казахстан. – Алматы, 2022. – С. 130-132.

53 Толеубай A.M. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Стокса в двумерной пористой среде // Матер. 17-й междунар. науч. конф. студен., магистр. и молод. учен. «Ломоносов–2022». – Нур-Султан, 2022. – С. 41-42.

54 Толеубай A.M. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // Матер. 17-й междунар. науч. конф. студен., магистр. и молод. учен. «G’ylym ja’ne bilim-2022». – Нур-Султан, 2022. – С. 1569-1571.

55 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // Матер. 9-й междунар. науч. конф. «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». – Актобе, 2022. – С. 98-101.

56 Toleubay A.M., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A. Homogenization of Attractors for Navier–Stokes System in Perforated domain // Procced. internat. conf. dedicated to the 80th anniv. M.O. Otelbaev Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education. – Almaty, 2022. – P. 54.

57 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Шеттік шарттарында тез өзгеретін мүшелері бар перфорацияланған облыста Навье–Стокс жүйесінің аттракторларын орташалауы // Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жыл. арнал. халық. ғыл. конф. – Қарағанды, 2022. – Б. 23-25.

58 Толеубай А.М. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Навье-Стокса в локально периодический перфорированной среде // Матер. 8-й междунар. науч. конф. студен., магистр. и молод. учен. «Ломоносов–2023». – Нур-Султан, 2023. – С. 36-37.

59 Толеубай А.М. Локальды периодты перфорацияланған ортадағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // Матер. 18-й междунар. науч. конф. студен., магистр. и молод. учен. «G’ylym ja’ne bilim-2023». – Нур-Султан, 2023. – С. 1252-1256.

60 Ilyin A.A. Averaging principle for dissipative dynamical systems with rapidly oscillating right-hand sides // Sb. Math. – 1996. – Vol. 187. – P. 635-677.

61 Ilyin A.A. Global averaging of dissipative dynamical systems // Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. – 1998. – Vol. 22. – P. 165-191.

62 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах 2D системы Навье–Стокса в среде с анизотропной переменной вязкостью и периодическими препятствиями // Записки науч. семин. Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2022. – Т. 519. – С. 10-34.

63 Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об асимптотике аттракторов системы Навье–Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями// Докл. РАН. – 2023. – Т. 512. – С. 42-46.

64 Efendiev M., Zelik S. The regular attractor for the reaction-diffusion system with a nonlinearity rapidly oscillating in time and its averaging // Adv. Differ. Equ. – 2003. – Vol. 8. – P. 673-732.

65 Fiedler B., Vishik M.I. Quantitative homogenization of analytic semigroups and reaction-diffusion equations with Diophantine spatial sequences // Adv. Differ. Equ. – 2001. – Vol. 6. – P. 1377-1408.

66 Fiedler B., Vishik M.I. Quantitative homogenization of global attractors for reaction–diffusion systems with rapidly oscillating terms // Asymptot. Anal. – 2003. – Vol. 34. – P. 159-185.

67 Chepyzhov V.V., Vishik M.I., Wendland W.L. On non-autonomous sine-Gordon type equations with a simple global attractor and some averaging // Disc. Contin. Dyn. Syst. – 2005. – Vol. 12. – P. 27-38.

68 Bekmaganbetov K.A.,Checkin G.A., Chepyzhov V.V. Weak convergence of attractors of reaction–diffusion systems with randomly oscillating coefficients// App. Anal. – 2019. – Vol. 98. –.P.256-271.

69 Pankratov L.S., Cheushov I.D. Averaging of attractors of nonlinear hyperbolic equations with asymptotically degenerate coefficients // Sb. Math. – 1999. – Vol. 190. – P. 1325-1352.

70 Chepyzhov V.V., Vishik M.I. Non-autonomous 2D Navier–Stokes system with a simple global attractor and some averaging problems // ESAIM Control Optim. Calc. Var. – 2002. – Vol. 8. – P. 467-487.

71 Chepyzhov V.V., Pata V., Vishik M.I. Averaging of nonautonomous damped wave equations with singularly oscillating external forces // J. Math. Pures Appl. – 2008. – Vol. 90. – P. 469-491.

72 Toleubay A.M. Asymptotic Behavior of Attractors of the Two-Dimensional Navier–Stokes System in a Domain with Small Periodic Obstacles // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2024. – Vol. 279, Issue 4. – P. 550-562.

73 Төлеубай А.М., Локальды периодты кедергілері бар ортадағы Навье-Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының асимптотикасы // «Функциялар теориясы, функционалдық талдау және олардың қолданылуы» атты халық. ғыл.-прак. кон. – Семей,2023. – б.35-38.

**ҚОСЫМША А**

Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстар тізімі

1. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах системы уравнений Навье-Стокса в двумерной пористой среде//Проблемы математического анализа.-2022.-Т.115, -С.15-28.

**Аудармасы:**Bekmaganbetov K.A., Toleubai A.M., Chechkin G.A. Attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium // Journal of Mathematical Sciences. – 2022. – Vol. 262, №3. – P. 246 – 261. (CiteScore2022=0.6, процентиль 13)

2. Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A., Toleubay A.M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium // Bulletin of the Karaganda university – Mathematics. – 2022. – Vol.107,№ 3. – P. 35 – 50. (CiteScore2022=1.0, процентиль 35)

3.Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об аттракторах 2D системы Навье–Стокса в среде с анизотропной переменной вязкостью и периодическими препятствиями // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 2022. – Т. 519. – С. 10 – 34.

4.Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Об асимптотике аттракторов системы Навье–Стокса в анизотропной среде с мелкими периодическими препятствиями// Доклады РАН. -2023.-Т.512.-С.42-46. **Аудармасы:** Bekmaganbetov K.A., Toleubay A.M., Chechkin G.A. On asymptotics of attractors of the Navier–Stokes system in anisotropic medium with small periodic obstacles // Doklady Mathematics. – 2023. – V. 108, No. 1. – P. 277 – 281 (Web of Science Q3, CiteScore2023=1.0, процентиль 45.8)

5. Toleubay A.M., Asymptotic Behavior of Attractors of the Two-Dimensional Navier–Stokes System in a Domain with Small Periodic Obstacles // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2024. – V. 279, No. 4. – P. 550 – 562 (CiteScore2023=0.9, процентиль 20,5)

**Халықаралық конференциялар материалдарында:**

6. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Усреднение аттракторов системы Навье–Стокса перфированной области быстро осциллирующим краевым условием // Международный научно–практической конференции Современные проблемы математики и ее приложений, Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе, Душанбе, 3-4 июня 2022 г., стр. 41-45;

7. Bekmaganbetov K.A., Toleubay A.M. Averaging trajectory attractors of the system of Stokes equations in a two–dimensional porous medium //Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работнико в науки Республики Казахстан: тезисы докладов, Институт математики и математического моделированная, Казахстан, г. Алматы, 6–8 апреля 2022 г., стр.130-132;

8.Толеубай A.M. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Стокса в двумерной пористой среде// XVII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых Ломоносов–2022, МГУ имени М.В. Ломоносова Казахстанский филиал, Казахстан, г.Нур–Султан, 15–16 апреля 2022 г. стр.41-42;

9. Толеубай A.M. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // XVII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых G’ylym ja’ne bilim-2022, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Казахстан, г. Нур–Султан, 11 апреля 2022 г.cтр.1569-1570;

10. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М. Екі өлшемді кеуекті ортадағы Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // IX Международная научная конференция Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры, Актюбинский региональный университет имени К. Жубанов, Казахстан, г. Актобе, 24–28 мая 2022 г., стр. 98-101;

11. Toleubay A.M., Bekmaganbetov K.A., Chechkin G.A. Homogenization of Attractors for Navier–Stokes System in Perforated domain// International Conference dedicated to the 90th anniversary of Academician Nadirov N.K., to the 80th anniversary of Academician Otelbaev M.O. Computational and Information Technologies in Science, Engineering and Education, 12-15 october, 2022., p.54;

12. Бекмаганбетов К.А., Толеубай А.М., Чечкин Г.А. Шеттік шарттарында тез өзгеретін мүшелері бар перфорацияланған облыста Навье–Стокс жүйесінің аттракторларын орташалауы // Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған Халықаралық ғылыми конференция, 8-9 қыркүйек 2022 ж., Қарағанды, 23-25 бет.

13.Толеубай А.М. Усреднение траекторных аттракторов системы уравнений Навье-Стокса в локально периодический перфорированной среде// XVIII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых Ломоносов–2023, МГУ имени М.В. Ломоносова Казахстанский филиал, Казахстан, г.Астана, 14–15 апреля 2023 г. стр.36-37;

14. Толеубай А.М. Локальды периодты перфорацияланған ортадағы Навье-Стокс теңдеулер жүйесінің траекториялық аттракторларының орташалануы // XVIII международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых G’ylym ja’ne bilim-2023, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Казахстан, г. Астана, 12 апреля 2023 г. стр.1252-1256.

15. Toleubay A.M., On the asymptotics of the attractors of the 2d Navier–Stokes system in a medium with obstacles//ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), September 20–23, 2023, Turkestan, Kazakhstan, p.34.

16. Төлеубай А.М., Локальды периодты кедергілері бар ортадағы Навье-Стокс теңдеулер жүйеснің аттракторларының асимптотикасы//Функциялар теориясы, функционалдық талдау және олардың қолданылуы атты халықаралық ғылыми-практикалық конференциясы, 27 қазан, Семей, Қазақстан, б.35-38.