Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.926.4 Қолжазба құқығында

**СУЛЕЙМБЕКОВА АЙНАШ ОСПАНОВНА**

**Тақ ретті дифференциалдық операторлардың резольвенталарының бар болуы, компактылығы және сингулярлық сандарының бағалаулары**

8D05401 – Математика

Философия докторы PhD

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесшілер

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

Муратбеков М.Б.

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

Оспанов К.Н.

физика-математика ғылымдарының докторы, профессор

Керимбеков А.К.

(Қырғыз Республикасы)

Қазақстан Республикасы

Астана, 2022

**МАЗМҰНЫ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **КІРІСПЕ**............................................................................................................. | | 3 |
| **1** | **ЖОЛАҚТА БЕРІЛГЕН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ТАҚ РЕТТІ КОРТЕВЕГ–ДЕ ФРИЗ ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ СИНГУЛЯРЛЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ, КОМПАКТЫЛЫҒЫ, *S*–САНДАРЫ МЕН МЕНШІКТІ САНДАРЫН БАҒАЛАУ**......................................................................**.** | 12 |
| 1.1 | Жолақта берілген Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары................. | 12 |
| 1.2 | Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы................................................................. | 14 |
| 1.3 | Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың бөліктенуі.................................................................................................. | 26 |
| 1.4 | Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының компактылығы......................................................... | 34 |
| 1.5 | Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының s-сандарының бағалауы. Мысал: меншікті сандарды бағалау...................................................................................... | 38 |
| **2** | **ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕРІЛГЕН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ТАҚ РЕТТІ КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ МЕН БӨЛІКТЕНУІ**......................................................................................................... | 44 |
| 2.1 | Жазықтықта берілген дербес туындылы тақ ретті Кортевег-де Фриз типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары................................................................................... | 44 |
| 2.2 | Жазықтықта берілген Кортевег-де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы.......................................... | 45 |
| 2.3 | Кортевег-де Фриз сызықты сингулярлы оператордың бөліктенуі.................................................................................................. | 53 |
| **3** | **ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕРІЛГЕН ПАРАБОЛА ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ СИНГУЛЯРЛЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ МЕН БӨЛІКТЕНУІ**...................................................... | 61 |
| 3.1 | Жазықтықта берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары.................. | 61 |
| 3.2 | кеңістігінде берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы.......................................... | 63 |
| 3.3 | Жазықтықта берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператордың бөліктенуі........................................................................... | 72 |
| **ҚОРЫТЫНДЫ**................................................................................................. | | 77 |
| **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**............................................ | | 79 |

**КІРІСПЕ**

Диссертациялық жұмыс шексіз облыста берілген дербес туындылы тақ ретті дифференциалдық операторлардың резольвенталарының бар болуы, компактылығы және сингулярлық сандарының бағалаулары мәселелеріне арналған.

**Тақырыптың өзектілігі.** Соңғы кездері дербес туындылы тақ ретті дифференциалдық теңдеулерге арналған шектік есептердің жалпы теориясы жедел дамуда, оның себебі - тақ ретті дифференциалдық теңдеулердің гидромеханикада, электродинамикада, қатты денелер физикасы және толқындар теориясында және т.б. қолданылуында [1-6].

Тақ ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің көрнекті өкілдерінің бірі-үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер. Үшінші ретті дербес туындылы теңдеулер көптеген құбылыстар мен процестердің математикалық моделдерінің негізінде жатыр. Мысалы - аденозинтрифосфор қышқылы молекулаларының гидролиз энергиясының жекелеген толқындар түрінде ақуыз молекулаларының бойымен тасымалдану құбылысы, басқаша айтқанда, солитондар. Бұл - аэрация аймағында ылғалдылық потенциалына қарсы қозғалысты есепке ала отырып, топырақ ылғалын тасымалдау процесі. Мұндай теңдеулер қатарына қазіргі заманғы математикалық физиканың негізгі теңдеулерінің бірі болып табылатын сызықты емес Кортевег-де Фриз теңдеуі жатады. Бұл теңдеу алғаш рет [Ж. Буссинеск](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%81%D0%BA,_%D0%96%D0%BE%D0%B7%D0%B5%D1%84_%D0%92%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D0%BD%D1%82%D0%B5%D0%BD) еңбектерінде пайда болды. Бірақ, түпкілікті зерттеулерді 1895 жылы Д. Кортевег және Г. де Фриз [1, р. 422-442] жүргізген. Бұл теңдеуге қатысты нәтижелер мен толыққанды сипаттамаларды [4, с. 443; 7, 8] еңбектерінен табуға болады.

Сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді зерттеу үшін көп жағдайда оның сызықталған түрлерінің шешімдерінің қасиеттерін білу маңызды. Нәтижеде сызықты теңдеудің шешімдерінің бар және жалғыз болуын, тегістігін, дифференциалдық қасиеттері мен шешімдер жиынының компактылығын пайдаланып, сызықты емес дифференциалдық теңдеудің шешілетіні дәлелденеді [2, р. 159-170; 3, с. 375-381; 9-16]. Дербес туындылы тақ ретті, оның ішінде Кортевег-де Фриз теңдеулерінің сызықталған түрі [2, р. 159-171; 3, с. 375-381; 10, р. 2-7; 11, р. 203-219; 12, р. 1-8; 13, р. 383-398] және де басқа жұмыстарда зерттелген. Бұл жұмыстарда шенелген облыста коэффициенттері тұрақты немесе үзіліссіз және өсуі шектелген дифференциалдық теңдеулер үшін әр түрлі жиектік есептер қарастырылған.

Қолданыста пайдалану мақсатында тақ ретті дифференциалдық теңдеулер үшін көптеген есептерді шенелмеген облыста қарастыруға тура келеді. Мысалы, электродинамикада, кванттық физикада, толқындардың таралуын сипаттайтын құбылыстарда коэффициенттері шексіз өсетін тақ ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің қасиеттерін оларды айқын түрде шешпей - ақ білу қажет. Шектелмеген облыста берілген және коэффициенттері шексіз өсетін тақ ретті дифференциалдық операторлар үшін төмендегі проблемалар маңызды:

* оператордың тұйықталуы;
* резольвентаның бар болуы;
* резольвентаның түрін табу;
* оператордың анықталу облысына тиісті функциялардың максималды тегістігі (бұл оператордың бөліктенуіне парапар);
* резольвентаның компактылығы;
* оператордың спектрлік қасиеттері.

Тақ ретті дифференциалдық операторларды зерттеу әдістерінің жұп ретті дифференциалдық операторларға қарағанда өздеріне тән ерекшеліктері бар. Мысалы,  кеңістігінде тақ ретті дифференциалдық операторлар өз-өзіне түйіндес емес, одан бөлек, төменнен шенелмеген, яғни төмендегі шарт орындалмайды:

,

мұнда  - дифференциалдық оператор,  - - кеңістігіндегі скалярлық көбейтінді, -  нормасы;

 - кез-келген шектеулі нақты сан. Осы соңғы шарттың орындалмауы тақ ретті дифференциалдық оператордың анықталу облысындағы функциялардың дифференциалдық қасиеттерін анықтауды қиындатады. Сонымен, тақ ретті дифференциалдық операторлар үшін жоғарыда келтірілген мәселелерді шешу жаңа аппарат пен әдістерді қолдануды қажет ететінін байқаймыз.

Бір өлшемді тақ ретті дифференциалдық операторлар мына жұмыстарда [17-28] қарастырылған. Оларда операторлардың резольвенталарының бар болуы мен бөліктену мәселелері зерттелген. Арнайы әдебиетке шолу шенелмеген облыста берілген және коэффициенттері шексіз өсетін дербес туындылы тақ ретті дифференциалдық операторлар үшін үзіліссіз қайтымдылық, бөліктену, спектр және резольвентаны аппроксимациялау мәселелері толық зерттелмегендігін көрсетеді. Жұмыста Кортевег-де Фриз операторымен бірге математикалық физикада жиі кездесетін бір параболалық дифференциалдық оператор қарастырылады. Бұл оператордың ерекшелігі - уақыт бойынша дербес туынды - тақ ретті. Сонымен, теория мен практикада жиі қолданылатын коэффициенттері сингулярлы болып келген сызықталған Кортевег-де Фриз операторы мен тақ ретті дифференциалдық операторлар үшін жоғарыда айтылған мәселелерді зерттеу маңызды әрі өзекті болып табылады.

**Жұмыстың мақсаты.** Шексіз облыста берілген коэффициенттері шектеусіз өсетін тақ ретті дербес туындылы дифференциалдық операторлардың резольвентасының бар болуын, компактылығын, бөліктенуі мен спектрлік қасиеттерін зерттеу.

**Зерттеу объектісі.** Дербес туындылы тақ ретті сингулярлы Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторының сызықталған түрі мен параболалық дифференциалдық оператордың резольвентасының бар болу шарттары, оператордың бөліктенуі мен спектрлік қаситеттері.

**Зерттеу әдістері.** Диссертациялық жұмыста локализациялау әдісі, априорлы бағалау әдісі, Фурье түрлендірулері, сызықты тұйық операторлар мен салмақты функционалдық кеңістіктер теориялары әдістері қолданылған.

**Ғылыми жаңалығы. Жұмыста алынған жаңа ғылыми нәтижелер:**

1. Шексіз облыста коэффициенттері шексіз өсетін сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторының бір класы үшін төмендегі нәтижелер алынды:

а) коэффициенттерге оператор резольвентасының бар болу шарттары табылды;

ә) сызықталған Кортевег-де Фриз операторы үшін бөліктену шарттары алынды;

б) сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторының резольвентасының компактылығын көрсететін қажетті және жеткілікті шарттар табылды;

в) сызықталған Кортевег-де Фриз операторы резольвентасының екі жақты сингулярлы сандарының (s-саны) бағасы алынды. Демек, оператордың меншкті сандарын жоғарыдан бағалау мүмкіндігі табылды, яғни бұл табылған бағалар шешімдерді жуықтап есептеуге тікелей жол ашады.

2. Коэффициенттері шексіз өсетін сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторы үшін  кеңістігіндегі резольвентаның бар болуы мен бөліктенуі туралы теоремалар дәлелденді.

3. Коэффициенттері шексіз өсетін параболалық дифференциалдық операторының бір класы үшін кері операторы бар екендігі, сонымен қатар, оператордың бөліктенуі туралы тұжырымдар дәлелденді.

**Алынған нәтижелердің теориялық және практикалық маңыздылығы.** Жұмыстың ғылыми нәтижелері теориялық сипатта. Жұмыста алынған ғылыми тұжырымдар тақ ретті дербес туындылы дифференциалдық операторлардың резольвентасының сапалық қасиеттерін терең зерттеуде қолданылуы мүмкін. Атап айтқанда, оларды шексіз облыста тақ ретті дифференциалдық операторлардың резольвентасының бар болуын, компактылығын, спектрлік қасиеттерін зерттеуге пайдалануға болады.

Табылған ғылыми нәтижелерді дифференциалдық операторлар және математикалық физика теңдеулері бойынша студенттер, магистранттар мен докторанттарға арналған элективті курстарда пайдалануға болады.

**Алынған нәтижелерді апробациялау.** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері келесі конференцияларда баяндалды:

1. Қазақстан республикасы ғылыми қызметкерлері күніне орай Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы, 2018, 2020, 2021).

2. Математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы мәселелері: атты халықаралық конференция (Қарағанды, 2019).

3. Оңтайлы басқару теорияларының, динамикалық жүйелердің және операторлық теңдеулерінің өзекті мәселелері: атты IV Халықаралық ғылыми конференция (Бишкек: Б.Н. Ельцин атындағы Қырғыз – Ресей славяндық университеті, 2022).

Сонымен бірге, жұмыстың жеке нәтижелері келесі ғылыми семинарларда талқыланды:

1. Функционалдық анализ және оның қолданылулары: ғылыми семинарында (жетекшілері - ҚР ҰҒА академиктері М. Өтелбаев және Р. Ойнаров, профессорлар Е.Д. Нұрсұлтанов, Қ.Н. Оспанов).

2. «Іргелі матаматика» кафедрасының ғылыми семинарында (Нұр-Сұлтан, 2020).

3. М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті, Білім берудегі математика кафедрасының профессоры М.Б. Муратбековтың жетекшілігімен өтетін «Дифференциалдық операторлардың спектралдық теориясы» атты ғылыми семинар.

**Жарияланымдар.** Диссертацияның негізгі нәтижелері 9 ғылыми мақала мен конференциялар материалдарында, оның ішінде, 3 мақала уәкілетті орган ұсынған басылымдарда, 1 мақала Scopus базасына енетін рейтінгілі басылымда, 1 мақала алыс шетел басылымында жарияланған [29-37]. Атап айтқанда Web of Science және Scopus мәліметтер базасында индекстелетін жоғары рейтінгілі журналда:

1. Bounded invertibility and separability of a parabolic type singular operator in space  // Turk. J. Math. − 2021. − №45. – P. 2199-2210 (Scopus, процентиль – 60%, 2021).

ҚР БҒМ БҒССҚК тізіміне кіретін журналдарда:

1. On the existence of the resolvent and separability of a class of the Korteweg-de Vriese type linear singular operators // Bulletin of the Karaganda University . −2021. – Vol.101, №1. – P. 87-97.

2. Separability of the third-order differential operator given on the whole plane // Bulletin of the Karaganda University. – 2022. − Vol. 105, №1. – P. 109-117.

3. О существовании резольвенты и разделимости одного класса дифференциальных операторов третьего порядка // Вестник НИА РК. – 2021. −№4(82). – С. 168-178.

Халықаралық конференциялар материалдарында:

1. О существований резольвенты и разделимости одного класса сингулярных линеазованных операторов Кортвега-де Фриза // Традиционная междунар. апрел. науч. конф.: тезисы докладов (Алматы, 2018. – С. 58-59).

2. О сущестаовании, компатности резольвенты и разделимости одного класса линейных сингулярных операторов Кортевега-де фриза // Теоретические и прикладные вопросы математики, механикии информатики: тез. докл. междунар. науч. конф. (Караганда, 2019. – С. 40-41).

3. Существование, компактность и оценки сингулярных чисел резольвенты сингулярного линейного оператора типа Кортевега–де Фриза // Традиционная междунар. апрел. науч. конф.: тезисы докладов (Алматы, 2020. – С. 97-98).

4. Оценки сингулярных (s-чисел) и собственных чисел резольвенты линеаризованного сингулярного оператора Кортевега–де Фриза // Традиционная междунар. науч. апрел. конф.: тезисы докладов (Алматы, 2021. – С. 159-160).

5. Спектральные свойства линейного оператора типа Котевега-де Фриза // Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений: IV междунар. науч. конф.: тезисы докладов (Бишкек, 2022. – С. 143-146).

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертация кіріспеден, үш бөлімнен (әр бөлім пункттерге бөлінген), қорытындыдан және 65 атаудан тұратын сілтемелер тізімінен тұрады. Диссертациялық жұмыстың жалпы көлемі - 83 бет.

**Диссертацияның негізгі мазмұны.** Жұмыстың 1.1 пунктінде  -да анықталған



дифференциалдық операторы қарастырылған, мұндағы, .  -  айнымалысы бойынша финитті және , , шарттарды қанағаттандыратын шексіз дифференциаланатын функциялардан құралған жиын.

 коэффициенттері келесі шарттарды қанағаттандырады:

і)  - -да үзіліссіз функциялар;

іі).

 операторы  кеңістігінде тұйықталады, оны қайтадан  арқылы белгілейміз.

Бұл пункттің негізгі нәтижелері – 0.1, 0.2, 0.3 және 0.4 теоремалары.

*Теорема 0.1.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  кеңістігінде операторының  -болғанда үзіліссіз кері операторы бар. Сонымен қатар, келесі теңдік орындалады:

, (1)

мұнда , , , ,  - скаляр көбейтінді.

*Анықтама 0.1* [38, 39].  операторы бөліктенеді деп атаймыз, егер  функциясы үшін келесі бағалау орындалса

,

мұнда С –-тен тәуелсіз тұрақты, -  -дегі норма.

*Теорема 0.2.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда  операторы бөліктенеді.

*Мысал 0.1.* Теорема 0.1 және теорема 0.2 шарттарын , , , , функциялары қанағаттандырады.

*Теорема 0.3.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда операторының резолвентасы компактылы сонда тек сонда ғана, егер

.

*Анықтама 0.2* [40]. Айталық  - толық үзіліссіз сызықты оператор және  болсын.  операторының меншікті мәндері  операторының s- сандары деп аталады.

Толық үзіліссіз  операторының нөлдік емес s-сандарын еселігін ескере отырып, олардың кему тәртібімен нөмірлейтін боламыз

, 

Келесі функцияны енгізейік . Бұл - -ден үлкен  s- сандарының саны.

*Теорема 0.4.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды

,

мұнда , ал  тұрақты саны  және -дан тәуелсіз.

*Мысал 0.2.* Теорема 0.4 – ті пайдаланып келесі

, , ,

операторының мысалында  резольвентасының меншікті сандарын бағалау тәсілін көрсетейік.

Теңдік (1)-ден шығатыны, егер s  операторының сингулярлы саны болса, онда s  операторларының біреуінің сингулярлы саны болып табылады, және керісінше.  үшін  арқылы  операторының сингулярлы сандарын белгілейміз. Теорема 0.4 ге сәйкес алатынымыз:

,  (2)

Енді операторының меншікті мәндерінің саны шексіз көп деп ұйғарайық, онда (2) бағалауынан және Вейль теңсіздігінен [40, с. 3-25] келесі теңсіздік шығады:

.

Ары қарай белгілі  теңсіздігін пайдалансақ, меншікті сандар үшін мына бағалауды аламыз:



Диссертациялық жұмыстың 2-бөлімінде бүкіл жазықтықта берілген үшінші ретті дифференнциалдық оператор зерттелді. 2.1 пунктінде  кеңістігінде анықталған



операторы қарастырылған, мұндағы . Мұндағы  -  кеңістігінде шексіз дифференциалданатын финитті функциялардан құралған жиын.

 коэффициенттеріне қатысты 1-бөлімдегідей келесі шарттар орындалады деп ұйғарамыз:

а) --де үзіліссіз функциялар;

ә) .

 операторы  кеңістігінде тұйықталатынын байқау қиын емес, ол тұйықталуды қайтадан деп белгілейміз.

 кеңістігінде  тұйық операторының  шенелген кері операторы бар болу мәселесі келесі есепке эквивалентті:  кеңістігінде  теңдеуінің шешімі  бар және жалғыз екенін көрсету керек. Бұл жағдайда  тұйық операторы алғашқы шартсыз есепті туындататынын байқау қиынға соқпайды ([41], III бөлім, параграф 4).

Бұл пункттің негізгі нәтижелері – 0.5 және 0.6 теоремалары.

*Теорема 0.5.*Айталық і) шарты орындалсын. Онда  кеңістігінде  операторының  болғанда үзіліссіз кері операторы бар.

[38, р. 306; 39, с. 197] жұмыстарына сүйеніп келесі анықтаманы енгіземіз.

*Анықтама 0.3.* Егер әрбір  функциясы үшін келесі бағалау орындалса

,

онда  операторы бөліктенеді деп атаймыз, мұндағы С –  - тен тәуелсіз,  - -дегі норма.  -  операторының анықталу облысы.

*Теорема 0.6.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда  операторы бөліктенеді.

*Мысал 0.3.* , , ,  функциялары 0.5 және 0.6 теоремаларының шарттарын қанағаттандырады.

Жұмыстың үшінші бөлімінде **** кеңістігінде берілген парабола типті сингулярлы оператордың шектеулі қайтымдылығы және бөліктенуі зерттелген.

3.1 пункттінде  қалауымызша тегіс финитті функциялар жиынында анықталған коэффициенттері шенелмеген келесі парабола типті оператор қарастырылған

,

мұнда , .

Ары қарай  коэффициенті келесі шарттарды қанағаттандырады деп ұйғарамыз:

а)  - -де үзіліссіз функция;

ә) .

 операторы **** кеңістігінде тұйықталады және ол тұйықталуды да  арқылы белгілейік. Бұл пунктте коэффициенттері жылдам өспелі  дифференциалдық операторы үшін бізді келесі сұрақтар қызықтырады:

а) резольвентаның бар болуы;

ә) келесі бағалаудың орындалуы:

, (3)

мұнда  -  операторының анықталу облысы,  - -дегі норма,- тұрақты сан.

*Анықтама 0.4.* Егер барлық  үшін (3) бағалауы орындалса, онда параболалық операторы бөліктенеді дейміз.

Бұл пункттің негізгі нәтижелері – 0.7, 0.8 теоремалары.

*Теорема 0.7.* Айталық а) шарты орындалсын. Онда  болғанда кеңістігінде анықталған  үзіліссіз кері оператор бар болады.

*Теорема 0.8.* Айталық а) және ә) шарттары орындалсын. Онда  операторы бөліктенеді.

*Мысалы 0.4.* Келесі оператор үшін 0.7, 0.8 теоремаларының қорытындылары дұрыс:

, ,

.

**Қорытынды бөлімде** диссертацияда алынған негізгі нәтижелер қысқаша сипатталып, олардың қолданылу мүмкіндіктері атап өтілген.

**1 ЖОЛАҚТА БЕРІЛГЕН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ТАҚ РЕТТІ КОРТЕВЕГ–ДЕ ФРИЗ ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ СИНГУЛЯРЛЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ, КОМПАКТЫЛЫҒЫ, *S* – САНДАРЫ МЕН МЕНШІКТІ САНДАРЫН БАҒАЛАУ**

**1.1 Жолақта берілген Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары**

Егер шекаралық режим жеткілікті ұзақ уақыт жұмыс жасайтын болса, онда кез-келген нақты физикалық жүйеге тән үйкеліс салдарынан, уақыт өткен сайын алғашқы деректердің әсері әлсірейді. Осылайша, біз алғашқы шартсыз есеп мәселесіне келеміз [41, с. 241].

Осы сөйлемдерді ескере отырып, біз  жиынында анықталған келесі дифференциалдық операторды қарастырамыз:

 (1.1.1)

мұнда , ,  - у айнымалысы бойынша финитті және келесі

,

шарттарын қанағаттандыратын шексіз дифференциаланатын функциялардан құралған жиын.

 коэффициенттері келесі шарттарды қанағаттандырады деп ұйғарамыз:

а) -жиынында үзіліссіз функциялар;

ә).

операторы  кеңістігінде тұйықталады, оны қайтадан  арқылы белгілейміз.

Бұл пункттің негізгі нәтижелері – 1.1.1, 1.1.2, 1.1.3 және 1.1.4 теоремалары.

*Теорема 1.1.1.* Айталық і) шарты орындалсын да,  болсын. Онда операторына кері  операторы бар, ол барлық  кеңістігінде анықталған. Сонымен қатар келесі теңдік орындалады:

, (1.1.2)

мұнда

, , , ,

,

ал  - скаляр көбейтінді.

*Анықтама 1.1.1.* Егер  функциясы үшін келесі бағалау орындалса

,

онда  операторын бөліктенеді деп атаймыз, мұндағы С – - тен тәуелсіз, - -дағы норма.

*Теорема 1.1.2***.** Айталық а) және ә) шарттары орындалсын. Онда операторы бөліктенеді.

*Мысал 1.1.1.* Теорема 1.1.1 және 1.1.2 - нің шарттарын , ,, функциялары қанағаттандыратынын көрсету қиын емес. Сондықтан  операторы бөліктенеді, яғни әрбір  функциясы үшін



теңсіздігі орынды, мұндағы С – тұрақты сан.

*Теорема 1.1.3.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда операторының резолвентасы  компактылы оператор болуы үшін



шарты орындалуы қажетті және жеткілікті.

*Анықтама 1.1.2* [40, с. 46]. Айталық  - толық үзіліссіз сызықты оператор және  болсын.  операторының меншікті мәндері  операторының s-сандары деп аталады.

Теорема 1.1.3 шарттары орындалсын, онда операторы толық үзіліссіз.  операторының нөлдік емес s-сандарын олардың кему тәртібімен және әрқайсысының еселігін ескере отырып, келесі түрде нөмірлейміз:

, 

Келесі функцияны енгізейік . Бұл - -ден үлкен -лардың саны.

*Теорема 1.1.4.* Айталық а) және ә) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалау орынды:

,

мұнда , ал  -  және -дан тәуелсіз тұрақты сан.

**1.2 Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы**

Бұл пунктте біз алдынғы пунктте келтірілген (1.1.1) оператордың резольвентасының бар болуы мәселесін зерттейміз және 1.1.1 теоремасының дәлелдеуін келтіреміз. Алдымен дәлелдеуге қажетті көмекші леммалар мен тұжырымдарды келтірейік.

*Лемма 1.2.1*. Айталық а) шарты орындалсын және  болсын. Онда барлық  үшін келесі теңсіздік орындалады

 (1.2.1)

мұнда .

*Дәлелдеуі.* Айталық  болсын. Келесі скалярлық көбейтіндіні қарастырайық



. (1.2.2)

Бірінші интегралды  екенін ескеріп, бөліктеп интегралдаймыз:



.

Осыдан

. (1.2.3)

Екінші интегралды бөліктеп интегралдаймыз:



.

Бұл жерде  функциясы  айнымалысы бойынша периодты функция екенін ескеріп, соңында төмендегі теңдікті аламыз:

.

Осыдан

. (1.2.4)

Үшінші интегралда  функциясы  айнымалысы бойынша периодты функция екенін ескеріп, бөліктеп интегралдау арқылы мынаған келеміз:

.

Осыдан

. (1.2.5)

Енді (1.2.3), (1.2.4), (1.2.5) теңдіктерін ескеріп, (1.2.2)-ден келесі теңдікті аламыз:

. (1.2.6)

Теңдік (1.2.6)-ға Коши-Буняковский теңсіздігін және і) шартын қолдансақ,

,

мұнда .

Норманың үзіліссіздігі қасиетін ескерсек, соңғы бағалау барлық  үшін де дұрыс. Лемма 1.2.1 дәлелденді.

*Ескерту 1.2.1.* (1.2.1) бағалауы (1.1.1) операторының коэффициенттері комплекс мәнді функциялар болғанда да орындалады.

 кеңістігінде берілген (1.1.1) операторын зерттеуді Фурье әдісін қолдану арқылы келесі

,

операторын зерттеуге алып келуге болатынын көру қиын емес, мұндағы ,  -  операторының анықталу облысы.

Енді коэффициенттері шектеусіз  операторының резольвентасының бар болуы мәселесін коэффициенттері шектеулі оператор жағдайына көшіретін бірқатар тұжырымдар мен бағалауларды келтіреміз.

Айталық , болсын, онда .  кеңістігінен ,  орындалатындай  теріс емес функциялар тізбегін алайық. ,  және  функцияларын - интервалынан барлық - ге олардың сәйкес жалғастырулары ,  және  бірдей периодты шенелген периодты функциялар болатындай етіп жалғастырайық.

 арқылы келесі оператордың тұйықталуын белгілейік:

, .

*Лемма 1.2.2.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  операторы -  - де тұйықталатын оператор.

*Дәлелдеуі.*  тұйықталатын оператор болуы үшін, белгілі критерий бойынша, ,  шарттарын қанағаттандыратын әрбір  тізбегі үшін  орындалуы қажетті және жеткілікті. Айталық  және , () болсын. Егер  берілген  операторына формальді түрде түйіндес оператор болса, онда кез-келген  үшін келесі теңдік орындалады

,

бұл жерде .

 түйіндес операторының түрін табайық. Ол үшін келесі скалярлық көбейтіндіні түрлендіреміз:





.

 екенін пайдаланып, алғашқы қосылғышты бөліктеп интегралдайық







.

Комплекс мәнді функциялардың  кеңістігіндегі скалярлық көбейтіндінің анықтамасын ескеріп, төмендегі теңдікті аламыз:

.

Осыдан  екені шығады.

Енді  скалярлық көбейтіндіде , () қатыстарын ескеріп шекке көшсек,

.

 теңдігі барлық  үшін орындалып тұр, демек . Лемма 1.2.2 дәлелденді.

*Лемма 1.2.3.* Айталық а) шарты орындалсын. Онда барлық элементтері үшін келесі бағалау орынды:

 (1.2.7)

*Дәлелдеуі.* Айталық  және болсын. Келесі теңдіктер орынды



. (1.2.8)

Бірінші қосылғышты  екенін ескеріп, бөліктеп интегралдайық:









. (1.2.9)

Теңдік (1.2.9)-дан алынған нәтижені (1.2.8)- ге қоялық:



.

Яғни

.

Осыдан, комплекс сандардың  қасиеттерін ескере отырып, алатынымыз:

. (1.2.10)

Шарт бойынша,  функциясы теріс емес, сондықтан (1.2.10) бойынша

. (1.2.11)

(1.2.11) теңсіздігіндегі - периоды  болатын периодты функция екенін ескеріп, келесі теңсіздікке келеміз

. (1.2.12)

а) шартынан алатынымыз

. (1.2.13)

(1.2.12), (1.2.13) теңсіздіктерін және Шварц теңсіздігін пайдалансақ,



яғни

.

 тұйық оператор болғандықтан бұл теңсіздік барлық  үшін де орынды. Лемма 1.2.3 дәлелденді.

*Лемма 1.2.4.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  операторына кері  операторы табылады және ол  -да үзіліссіз.

*Дәлелдеуі.* Лемма 1.2.4 толығымен дәлелденетін болады, егер келесі екі шарт орындалса

1) ;

2)  - шектеулі.

Алдымен  екенін дәлелдейміз. Кері жориық.  мәндер облысы  - ге тең болмасын. Онда барлық  үшін келесі теңдікті



қанағаттандыратын  элементі табылады.  операторына формальді түйіндес  операторын қарастырайық. Сонда барлық  және  үшін теңдігі орындалады.



мұнда  - комплекс мәнді функция. Соңғы теңдікті ашып жазып,  - ны табайық. Әрбір  үшін











.

Яғни

.

Демек,  элементі

 (1.2.14)

теңдігін қанағаттандырады. Онда, , ,  функцияларының әрқайсысы шектеулі болғандықтан, барлық ақырлы  - дер үшін  қатысы орындалады. Ендеше (1.2.14) теңдігінен  екені шығады, мұндағы  – Соболев кеңістігі. Осыдан және жалпы енгізу теориясынан белгілі  қатысынан

. (1.2.15)

Осы жиектік шартты пайдаланып және (1.2.15) теңдігін және (1.2.7) бағалауын дәлелдеген кездегі есептеулерді қайталап,  операторы үшін келесі теңсіздікке келеміз:

. (1.2.16)

(1.2.14) теңдігінен және (1.2.16) теңсіздігінен  екені шығады. Қарама-қайшылыққа келдік. Демек,  операторының  мәндер облысы  - мен беттеседі.

Лемманың дәлелдеуін аяқтау үшін  шектеулі оператор болатынын көрсету жеткілікті. Ол (1.2.7) теңсіздігінен шығады. Лемма 1.2.4 дәлелденді.

Айталық  келесі , ,  қатыстары орындалатындай функциялар тізбегі болсын. Бірден байқайтынымыз, кез-келген  нүктесі  жүйесіне енетін кесінділердің ең көп дегенде үшеуіне тиісті болады [39, с. 197; 42] ,  үшін

,

,

деп белгілейік. Онда











.

 кесіндісінде  операторының әсері операторының әсерімен беттеседі. Сондықтан

.

 және  екенін ескерсек, онда

.

Яғни

. (1.2.17)

Мұндағы

.

.

*Лемма 1.2.5.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық  үшін,  орындалатындай  саны табылады.

*Дәлелдеуі.* Бұл лемманы дәлелдеу үшін [43] жұмыстың әдістерін пайдаланамыз. Айталық . Алуымыз бойынша,  аралығында - тізбегінен тек  функциялары ғана нөлден өзгеше. Сондықтан

.

Белгілі  теңсіздігін және (1.2.7) бағалауын қолдансақ,











,

мұнда . Немесе

. (1.2.18)

Теңсіздік (1.2.18)-ден барлық  үшін  теңсіздігі орындалатындай  санын табу қиынға соқпайтынын байқаймыз. Лемма 1.2.5 дәлелденді.

Енді келесі операторды қарастырайық

,

мұнда .

*Лемма 1.2.6.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық  үшін келесі бағалау орынды

.

*Дәлелдеуі.* Лемма 1.2.3**-**тің есептеулері мен пайымдауларын қайта қолданайық. Айталық  және  болсын. Скалярлық көбейтіндіні қарастырайық



 (1.2.19)

 екенін ескеріп, бірінші интегралды бөліктеп интегралдасақ,









.

Алынған нәтижені (1.2.19)-ға қоялық.



.

Осыдан

.

 комплекс саны үшін  екенін ескере отырып, алатынымыз:

.

-теріс емес, сондықтан

.

Демек

.

Осыдан а) шарты мен Шварц теңсіздігін пайдаланып,

,

екенін, ал соңғы теңсіздіктен



теңсіздігін аламыз. Лемма 1.2.6 дәлелденді.

*Лемма 1.2.7.* Айталық а) шарты орындалсын. Онда  болғанда,  операторы үзіліссіз қайтарымды, және  кері операторы үшін

. (1.2.20)

теңдігі орындалады.

Лемма 1.2.7 (1.2.17) теңдігіне 1.2.5 және 1.2.6 леммаларын қолдана отырып дәлелденеді.

*Теорема 1.1.1-дің дәлелдеуі.*

Лемма 1.2.7 бойынша

 (1.2.21)

функциясы төмендегі есептің шешімі болып табылады:

,

,

мұнда ,  және  - -ге кері оператор.

(1.2.1) теңсіздігін пайдалансақ,

.

Осыдан

 (1.2.22)

теңсіздігін аламыз.  болғандықтан, (1.2.22) теңсіздігінен табатынымыз

.

Осыдан,  кеңістігі толық болғандықтан

,. (1.2.23)

шартын қанағаттандыратын жалғыз ғана  функциясы бар болады.

(1.2.21), (1.2.23) бойынша кез-келген  үшін

 (1.2.24)

функциясы

, (1.2.25)

. (1.2.26)

есебінің күшті шешімі болып табылады. Анықтамасы бойынша, егер

, ,

қатыстарын қанағаттандыртын  тізбегі табылса, онда  функциясын (1.2.25), (1.2.26) есебінің күшті шешімі деп атайды.

(1.2.24) теңдігімен анықталған  операторы  -ге кері оператор екенін байқаймыз.

*Лемма 1.2.8* [44]. Айталық,  операторы -де шектеулі қайтарымды және  болғанда ,  , бағалауы орындалсын. Онда  операторы да шектеулі қайтарымды.

Осыдан және Лемма 1.2.1-ден Теорема 1.1.1 барлық  үшін орынды екені шығады. Теорема 1.1.1 толығымен дәлелденді.

**1.3 Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың бөліктенуі**

Бұл бөлімшеде Теорема 1.1.2 дәлелденеді. Онда қойылған коэффициенттері шенелмеген оператордың бөліктенуі (максималды регулярлығы) есебі арнайы түрде таңдалған коэффициенттері шенелген операторлардың қайтарымдылығы жайлы мәселеге келтіру жолымен шешіледі.. Алдымен бірнеше көмекші леммаларды келтіреміз.

Келесі операторды қарастырайық

,

мұнда , ,  - периодтары  ( ) болатын шенелген периодты коэффициенттер, , .

*Лемма 1.3.1.* Айталық  және  болсын, онда қатысы орындалуы үшін  және болуы қажетті және жеткілікті.

Лемманың дәлелдеуі комплекс сандардың және гильберт кеңістігінің жалпы қасиеттерінен шығады.

 ˗ шексіз дифференциалданатын, финитті және нақты мәнді функциялар жиынында анықталған



операторын қарастырайық. Мұндағы , ,  - периодтары  ( )-ге тең шенелген периодты функциялар.

*Лемма 1.3.2.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық үшін келесі бағалаулар орынды:

, (1.3.1)

мұндағы ;

, (1.3.2)

мұнда ;

, (1.3.3)

мұнда .

*Дәлелдеуі.* Айталық . Сонда



. (1.3.4)

Төмендегі теңдік орынды

. (1.3.5)

(1.3.4)-тен, (1.3.5) теңдігін ескере отырып, келесіні аламыз



. (1.3.6)

 үшін  екенін ескерсек, онда

. (1.3.7)

Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, (1.3.7)-ден



шығады, мұндағы. Осыдан

.

(1.3.1) дәлелденді.

(1.3.6) теңдігі бойынша

. (1.3.8)

Біз бұл жерде комплекс сандар қасиеттерін пайдаландық. Шарт i)-ді пайдаланып, (1.3.8) теңсіздігінен келесі теңсіздікті аламыз:

,

мұнда . Осыны ескерсек және Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ,

,

осыдан

.

(1.3.2) дәлелденді.

Жоғарыдағы тәсілді қайта қолданып, мынаны аламыз:

,

мұнда . Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, онда

,

немесе

.

Лемма 1.3.2 толық дәлелденді.

*Лемма 1.3.3.* Айталық і) шарты орындалсын және   -  - де берілген үзіліссіз функция болсын. Онда келесі бағалаулар орынды:

, (1.3.9)

мұнда 

*Дәлелдеуі.* Айталық . Теңдік (1.2.20)-дан  функциясының қасиеттерін ескеріп, алатынымыз:





.

Таңдауымыз бойынша,  аралығында  функциялары ғана нөлдік емес, сондықтан

















. (1.3.10)

Мына  теңдігін ескеріп, (1.3.10)-нан алатынымыз:





. (1.3.11)

Лемма 1.2.5-тен  екендігі шығады. Онда (1.3.11) бойынша

 .

Немесе



Лемма 1.3.3 дәлелденді.

*Лемма 1.3.4.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды:

; (1.3.12)

; (1.3.13)

, (1.3.14)

мұнда - -нен  тәуелсіз тұрақтылар.

*Дәлелдеуі.* Теңсіздік (1.3.9) бойынша, егер шенелген болса, онда операторы да шенелген. Соңғы оператордың нормасын бағалайық.



. (1.3.15)

Енді  операторының нормасын табайық. (1.3.1) теңсіздігінен

,

мұнда . Осыдан, (1.3.15) теңсіздігін және ii) шартын пайдаланып табатынымыз



.

Сонымен

.

Соңғы бағалау Лемма 1.3.4-тегі (1.3.12) теңсіздігін дәлелдейді.

Теңсіздік (1.3.13)-ті дәлелдейік. Лемма 1.3.3-ті бойынша



.

Теңсіздік (1.3.2)-ден

,,

мұнда . Осыдан және жоғарыдағы теңсіздіктен іі) шартын пайдаланып, алатынымыз



яғни

.

Теңсіздік (1.3.13) дәлелденді.

Теңсіздік (1.3.14)-ті дәлелдейік. (1.3.12), (1.3.13) теңсіздіктерін дәлелдеуде қолданылған есептеулерді және (1.3.3) теңсіздігін пайдаланып, келесіні аламыз:



.

Демек

.

Теңсіздік (1.3.14), онымен бірге, Лемма 1.3.4 толығымен дәлелденді.

*Теорема 1.1.2-нің дәлелдеуі.* Теңдік (1.2.24) бойынша

.

 элементінің нормасын есептейік:



Бұл жерде  ортонормаланған жүйе екенін ескердік. Осыдан және Лемма 1.3.4-тен алатынымыз

.

(1.3.12) теңсіздігін пайдалансақ

.

Онда

, (1.3.16)

мұнда .

Тура осылайша



.

Осыдан (1.3.13) бағалауын ескеріп, келесіні аламыз:

. (1.3.17)

мұнда .

Осы есептеулерді қайталай отырып, келесі теңсіздікке келеміз:

,

Осыдан

. (1.3.18)

(1.3.16), (1.3.17) теңсіздіктері бойынша,







 (1.3.19)

екені шығады. (1.3.16)-(1.3.19) теңсіздіктерінен шығатыны:

.

Теорема 1.1.2 толығымен дәлелденді.

**1.4 Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының компактылығы**

Бұл пунктте біз  операторының компактылығы жайлы 1.1.3 теоремасын дәлелдейтін боламыз. Алдымен екі лемма қарастырамыз.

*Лемма 1.4.1.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда  операторының резольвентасы  компактылы оператор болуы үшін

. (1.4.1)

шарты орындалуы қажетті және жеткілікті.

Лемма 1.2.6 және Лемма 1.2.7 - ден барлық  үшін  операторының резольвентасы  табылатынын көрдік. Демек, Лемма 1.4.1-ті дәлелдеу үшін  операторының компактылығын көрсету жеткілікті.

Алдымен  жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда  операторы -келесі түрде

, .

Лемма 1.3.4-бойынша,  операторының анықталу облысы  кеңістігімен беттеседі. –  жиынын



нормасы бойынша толықтыру арқылы алынған Соболев типті салмақты кеңістік. Сондықтан  операторының мәндер облысы  кеңістігімен беттеседі. Ендеше  кеңістігін  кеңістігіне енгізу операторы компактылы екенін дәлелдеу жеткілікті.

 кеңістігін -ге енгізу операторы компактылы [45], сонда тек сонда ғана, егер болса.

 () (1.4.2)

Мұндағы

.

 –  функциясының арнайы орташалануы. Лемма 1.4.1-дің дәлелдеуін аяқтау үшін келесі лемма керек.

*Лемма 1.4.2.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда барлық үшін

, (1.4.3)

теңсіздіктері орындалады, мұндағы  - тұрақты, ол  -ге байланыссыз.

*Дәлелдеуі.* Лемма 1.4.2 [46] жұмысындағы Лемма 12 және [47] жұмысындағы лемма 2.7 –ге ұқсас жолмен дәлелденеді. Айталық болсын, онда

. (1.4.4)

а) шарты бойынша . Бұл шартты, жалпылыққа нұқсан келтірмей, ыңғайлы түрдегі  шартымен алмастырамыз.  болғандықтан және (1.4.3)-ні ескерсек

.

Демек . Сондықтан ii) шарты бойынша  болғанда



теңсіздіктері орындалады. Соңғы теңсіздіктер мен (1.4.4)-тен

.

Сонымен .

Осы есептеулердің жолымен (1.5.2) теңіздігінің оң жағы да дәлелденеді. Лемма 1.4.2 дәлелденді.

(1.4.2) және (1.4.3)-тен лемма 1.4.1-дің  жағдайындағы дәлелдеуі шығады.

Енді Лемма 1.4.1-де  деп есептейік. Лемма 1.3.4-тегі (1.3.13) бойынша:

,

мұнда . Ендеше  операторының компактылығын кез-келген шекті  үшін дәлелдеу жеткілікті. Лемма 1.4.2 бойынша (1.4.3) және

 (1.4.5)

шарттары өзара эквивалентті.

Лемма 1.4.1-ді  болғанда дәлелдейміз. Қажеттілігі. Айталық (1.4.5) орындалмасын. Онда  интервалдары табылып, төмендегі теңсіздік орындалады

 (1.4.6)

Бұл теңсіздікте  және  функцияларын шенелген функциялар деп аламыз. Бұл жерде *n* саны шектеулі деп есептейміз.

Сонымен әрбір шектеулі *n* үшін (1.4.6) теңсіздігі орындалады. Мұндағы , яғни интервал , өзінің ұзындығын сақтай отырып,  өскен кезде шексіздікке кетеді.

Айталық .  функцияларын қарастырайық. Әрбір шектеулі *n* үшін келесі теңсіздік орындалады:



. (1.4.7)

(1.4.7)-ден (1.4.6) теңсіздігін ескеріп және  функцияларының қасиеттерін пайдаланып, мынаны аламыз:

,

мұнда  *i* номеріне тәуелді емес. Мынадай белгілеу енгіземіз

.

 екенін көру оңай.

 функциялары  кеңістігінде нөлге әлсіз жинақты екенін көрсетейік. Шварц теңсіздігі бойынша,

. (1.4.8)

 ұмтылғанда орындалады. Сондықтан (1.4.8) теңсіздігінің оң жағы нөлге ұмтылады. Бұл  функциялары нөлге әлсіз жинақты екенін көрсетеді.

Екінші жағынан

. (1.4.9)

Егер оператор  компактылы болса, онда  тізбегі  -де нөлге жинақты болуы керек. Ал бұл (1.4.9) бойынша мүмкін емес. Біз қарама-қайшылыққа келдік. Бұл қайшылық  болғанда  операторының резольвентасы компактылы болуы үшін (1.4.5) шартының орындалуы қажетті екенін дәлелдейді. Ол, (1.4.1) және (1.4.5) өзара эквивалентті болғандықтан, лемманың қажеттілік жағын дәлелдейді.

Жеткіліктілігі. Лемма 1.3.4-тен , мұндағы  -  операторының мәндер жиыны, ал  - жоғарыда енгізілген кеңістік. (1.4.1) шарты орындалғанда  кеңістігі -ге компактылы енеді. Ол жоғарыдағы  жағдайында пайдаланған әдістерді пайдаланып көрсетіледі. Лемма 1.4.1 толық дәлелденді.

*Теорема 1.1.3 дәлелдеуі*. Теорема 1.1.1 және (1.2.24) теңдігі бойынша,  операторының резольвентасының әсері төмендегідей

, (1.4.10)

мұнда , . Лемма 1.3.4 бойынша

.

Осыдан және (1.4.10) теңдігінен шығатыны:  операторы компактылы сонда тек сонда ғана, егер әрбір  операторы компактылы болса. Енді дәлелденіп жатқан теорема 1.1.3 лемма 1.4.1-ден шығады. Теорема 1.1.3 дәлелденді.

**1.5 Кортевег–де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының s-сандарының бағалауы. Мысал: меншікті сандарды бағалау**

Бұл пункт (1.1.1) операторының спектрлік қасиеттерін зерттеуге арналған. Оның негізгі нәтижесі - Теорема 1.1.4. Ол (1.1.1) операторының резольвентасының сингулярлы сандарының (оларды s-сандар деп те атайтынын еске түсіреміз) бағасын береді. Теорема 1.1.4-ті дәлелдеу үшін біз алдымен бірнеше лемма келтіреміз.

Келесі жиындарды енгізейік:

,

;

,

мұнда -  дегі норма,  тұрақтысы  пен -нен () тәуелсіз.

*Лемма 1.5.1.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда

.

*Дәлелдеуі.* Айталық . Онда

 (1.5.1)

теңсіздігі орындалады. Осыдан і) шартын пайдаланып, келесі теңсіздікті аламыз:

. (1.5.2)

Теңсіздік (1.5.1) –ді пайдаланып, (1.5.2) өрнегінен мына теңсіздіктерді аламыз:





,

мұнда .  болғандықтан, соңғы теңсіздіктен алатынымыз:

.

Демек , яғни Леммадағы сол жақ енгізу дәлелденді.

Енді леммадағы оң жақ енгізуді дәлелдейік. Айталық . Бұл  екенін білдіреді. Осыдан, Лемма 1.3.4 бойынша

.

Соңғы теңсіздіктен

. (1.5.3)

Дәл осылайша, жоғарыда жасалған есептеулерді қайталап жүргізу жолымен алатынымыз:

, (1.5.4)

немесе

, (1.5.5)

мұнда ,  және  1.3.4 леммасынан.

Енді  нормасын (1.5.3)-(1.5.5) теңсіздіктерін ескере отырып, бағалайық.



.

Осыдан

, (1.5.6)

мұнда.

Жоғарыдағы (1.5.3) – (1.5.6) теңсіздіктерінен табатынымыз

,

мұнда . Соңғы теңсіздіктің оң жағын жоғарыдан бағалайық.

.

Осыдан

,

мұнда .  болғандықтан, соңғы теңсіздіктен

.

Бұл  екенін көрсетеді, яғни. Лемма 1.5.1 толық дәлелденді.

*Анықтама 1.5.1* [40, с. 51]. Берілген  жиынының -дегі Колмогоров бойынша -көлденеңдері деп келесі сандарды айтамыз:

,

мұнда – -дегі өлшемі -дан аспайтын барлық ішкі жиындар класы.

Колмогоров бойынша -көлденеңдер жиынының -дегі - өлшемді көпбейнелерден ауытқуына тең. Келесі леммалар орынды.

*Лемма 1.5.2.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды

, 

мұнда  - тұрақты, –  операторының s - сандары, , - сәйкес  және  жиындарының Колмогоров бойынша көлденеңдері.

*Дәлелдеуі.* Анықтама 1.5.1 бойынша  жиынының -дегі Колмогоров бойынша -көлденеңдері . Лемма 1.5.1-ден және көлденеңдердің жалпы қасиеттерінен шығатыны

.

Осыдан,  () теңдігін ескеріп, лемманың дәлелдеуін аламыз.

*Лемма 1.5.3.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды

.

мұнда  -  операторының -ден үлкен - сандарының саны.- -ден үлкен  көлденеңдердің саны.

*Дәлелдеуі.* Лемма 1.5.2 бойынша



теңсіздігін аламыз.

Тура осылайша келесі теңсіздік орынды

.

Лемма 1.5.3 дәледенді.

*Лемма 1.5.4.* Айталық а) және ә) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалау орынды

,

мұнда , тұрақты  саны  және -дан тәуелсіз.

Лемма 1.5.4-ті дәлелдеу үшін алдымен келесі лемманы дәлелдейміз.

*Лемма 1.5.5.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды

,

мұнда  - тұрақты сан, ал  -  функциясының арнайы орташалануы (1.4.1 – 1.4.2 леммаларын қараңыз).

*Дәлелдеуі.* Лемма жоғарыдағы Лемма 1.4.2-ні дәлелдеген жолмен дәлелденеді.

*Лемма 1.5.4 –тің дәлелдеуі.*  деп  кеңстігін



нормасы бойынша толықтыру арқылы алынған кеңістікті белгілейік.  екенін байқау қиын емес. Осыдан, Лемма 1.5.5-ті пайдаланып, сонымен қатар, [44, с. 36] мақаласындағы 8.1 теоремасын дәлелдеуде қолданылған барлық есептеулер мен тұжырымдарын қайталай отырып, 1.5.4 леммасының дәлелдеуін аламыз.

*1.1.4 теоремасының дәлелдеуі.* Теорема шарты мен (1.2.24) теңдігі бойынша

,. (1.5.7)

Теңдік (1.5.7) мынаны көрсетеді: егер s  операторының сингулярлы саны болса, онда s келесі   операторларының ең болмағанда біреуінің сингулярлы саны болып табылады және керісінше, егер s операторларының ең болмағанда біреуінің сингулярлы саны болса, онда s глобальды  операторының да сингулярлы саны болып табылады. Осыны ескеріп, Лемма 1.5.4-тен теореманың дәлелдеуін аламыз.

Теорема 1.1.4-ті пайдаланып  операторының меншікті сандарының бағаларын да алуға болады. Оны біз келесі мысалда көрсетеміз.

*Мысал 1.5.1.* Келесі операторды қарастырайық



. Теңдік (1.1.2)-ден шығатыны, егер s –  операторының сингулярлы саны болса, онда s келесі

,

операторына сәйкес келетін резольвенталарының ең болмағанда біреуінің сингулярлы саны болып табылады және керісінше.  үшін арқылы  операторының сингулярлы сандарын белгілейік. Сонда, Теорема 1.1.4 бойынша,

, (1.5.8)

Айталық  операторының меншікті мәндері болсын, олардың саны шексіз деп ұйғарайық. Белгілі Вейль теңсіздігін [40, с. 61] ескеріп, (1.5.8) бағалауынан келесі теңсіздікке келеміз:

.

Онда,  болғандықтан,



**2 ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕРІЛГЕН ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ТАҚ РЕТТІ КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ МЕН БӨЛІКТЕНУІ**

**2.1 Жазықтықта берілген дербес туындылы тақ ретті Кортевег-де Фриз типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары**

Үшінші ретті дифференциалдық теңдеулер көптеген математикалық құбылыстар мен процестер негізінде жатыр. Үшінші ретті дифференциалдық теңдеулерге қойылған шекаралық есептердің шешілу мәселесіне көптеген жұмыстар арналған [2, р. 159-171; 3. с. 375-381; 5, с. 91-115; 6, с. 1-21; 10, р. 2-7; 11, р. 203-218; 12, р. 703039-1-703039-8; 13, р. 383-398; 48, 49]. Соңғы уақытта, практикалық қолданыс талаптарына сай коэффициенттері шектеусіз дифференциалдық операторларға арналған зерттеулер көптеп жүргізілуде [38, р. 301-323; 39, с. 195-216; 42, с. 50-67; 50-52].

Бұл бөлімде бүкіл жазықтықта берілген үшінші ретті дербес туындылы Кортевег-де Фриз типті дифференциалдық оператордың резольвентасы мен бөліктенуі мәселелері зерттеледі.

 кеңістігінде анықталған, келесі дифференциалдық операторды қарастырайық

, (2.1.1)

мұнда .  -  кеңістігінде шексіз дифференциалданатын финитті функциялар жиыны.

 коэффициенттері келесі шарттарды қанағаттандырады деп ұйғарамыз:

а)  -  жиынында үзіліссіз функциялар;

ә).

 операторы  кеңістігінде тұйықталады, оны қайтадан  арқылы белгілейміз.

Бөлімдегі негізгі теоремаларды келтірейік. Оларды 2.2 және 2.3 бөлімшелерінде дәлелдейтін боламыз.

*Теорема 2.1.1.* Айталық і) шарты орындалсын, онда  үшін  операторына кері  операторы табылады және ол барлық  - де анықталған.

*Анықтама 2.1.1* [38. р. 306; 39, с. 197].  операторы бөліктенеді дейміз, егер функциясы үшін келесі бағалау орындалса

,

мұнда *С* –-тен тәуелсіз,  -  - дегі норма.  -  операторының анықталу облысы.

*Теорема 2.1.2***.** Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда операторы бөліктенеді.

*Мысал 2.1.1.* Айталық , ,,болсын. Бұл функциялар 2.1.1 және 2.1.2 теоремаларының шарттарын қанағаттандырады. Сол себепті төмендегі теңсіздік орынды:

,

мұнда С – тұрақты сан. Басқаша айтқанда, оператор  бөліктенеді.

**2.2 Жазықтықта берілген Кортевег-де Фриз типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы**

Бұл пунктте біз алдынғы пунктте келтірілген (2.1.1) операторының резольвентасының бар болуы жайлы Теорема 2.1.1-ді дәлелдейміз. Алдымен дәлелдеуге қажетті көмекші леммалар мен тұжырымдарды келтіреміз.

*Лемма 2.2.1*. Айталық і) шарты орындалсын және . Онда барлық  үшін келесі теңсізідік орындалады

, (2.2.1)

мұнда .

*Дәлелдеуі.*  функционалын түрлендіреміз. Мұндағы  - -дегі скалярлық көбейтінді және . Айталық  болсын, сонда



.

Бөліктеп интегралдау арқылы төмендегі теңдіктерді аламыз:

, , .

Осы теңдіктерді қолданып алатынымыз:

.

Коши-Буняковский теңсіздігін және і) шартын қолдансақ,

,

барлық  үшін.

Норманың үзіліссіздік қасиеті бойынша, соңғы бағалау барлық  үшін дұрыс. Лемма 2.2.1 дәлелденді.

*Ескерту 2.2.1.* Біз (2.1.1) операторының коэффициенттерін нақты функциялар деп ұйғардық. Жалпы, (2.2.1) бағалауы бұл коэффициенттер комплекс мәнді функциялар болған жағдайда да орындалады.

Енді келесі операторды қарастырайық.

,

мұнда -  - жиындарынан барлық -ге жалғастыру нәтижесінде алынған бірдей периодты шенелген периодты функциялар, , .

-да анықталған  операторы, -де тұйықталатын оператор болып табылады. Ол лемма 1.2.2 сияқты дәлелденеді. Және осы тұйық операторды қайтадан  деп белгілейік.

*Лемма 2.2.2.*Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық үшін келесі бағалау орынды:

. (2.2.2)

*Дәлелдеуі.* Айталық  және . Скалярлық көбейтіндіні қарастырайық



 (2.2.3)

 екенін ескеріп, алдымен (2.2.3)-тегі бірінші қосылғышты бөліктеп интегралдап алайық.









.

Осы мәнді (2.2.3)- ке қоялық, сонда



.

Яғни

.

Осыдан,  комплекс саны үшін  екенін ескере отырып, алатынымыз:

.

 функциясы таңбасын өзгертпейді, сондықтан

. (2.2.4)

Теңсіздік (2.2.4)-тен - периоды  болатын периодты функция екенін ескеріп, келесі теңсіздікке келеміз:

. (2.2.5)

і) шартын пайдалансақ,

. (2.2.6)

(2.2.5), (2.2.6) теңсіздіктерінен, Шварц теңсіздігін пайдаланып алатынымыз

,

.

Лемма 2.2.2 дәлелденді.

*Лемма 2.2.3.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  операторы үшін  -да үзіліссіз  кері операторы табылады.

*Дәлелдеуі.* Лемма 2.2.3-ті дәлелдеу үшін келесі екі мәселені шешуіміз керек: 1) , яғни  операторының  мәндер облысы  ге тең екенін көрсету; 2)  - шектеулі оператор екенін көрсету.

Алдымен  екенін дәлелдейміз. Ол үшін (2.2.2) бағалауын қолданатын боламыз. Дәлелдеуді кері жору әдісімен жүргіземіз. Айталық, мәндер облысы  де тығыз болмасын делік. Бұл - барлық  үшін келесі теңдеуді



қанағаттандыратын , элементі табылады деген сөз.

 операторына түйіндес  операторын алайық,  және барлық  үшін



теңдігі орындалады. Соңғы теңдік бойынша,

 (2.2.7)

теңдеуін қанағаттандыратын  элементі бар.

Жалпыланған функциялар теориясы тұрғысынан, , , периодты және шенелген функциялар екенін ескерсек, әрбір ақырлы  үшін . Онда (2.2.7) теңдігі бойынша, , мұндағы – Соболев кеңістігі. Демек, енгізу теоремаларының жалпы теориясынан шығатыны

. (2.2.8)

Енді (2.2.8) теңдігін және (2.2.2) бағалауын дәлелдеген кезде жасалған есептеулерді қолдана отырып, келесі теңсіздікті аламыз

. (2.2.9)

Теңсіздік (2.2.9)-дан  екені шығады. Қарама-қайшылыққа келдік. Осыдан операторының мәндер облысы -ге тең екенін аламыз.

 операторының шектеулі кері операторы бар екендігі Лемма 2.2.2-ден шығады. Лемма дәлелденді.

Енді 

.

операторын қарастырамыз. Оған кері дерлік операторды жазатын боламыз. Айталық  теріс емес және 1.2 пунктіндегі сияқты , ,  шарттарын қанағаттындыратын функциялардың жиыны болсын. Төмендегі операторларды енгіземіз:

,

, , ,

Кез-келген  нүктесі  жүйесіне тиісті кесінділердің ең көп дегенде үшеуіне тиісті [39, с. 197; 42, р. 58]. Осыны ескеріп, -ке  операторымен әсер ете отырып, мынаны аламыз:











.

Таңдауымыз бойынша,  кесіндісінде  операторының әсері  операторының әсерімен беттеседі. Сондықтан

.

Енді  екенін ескерсек,

.

Осыдан

. (2.2.10)

мұнда

.

*Лемма 2.2.4.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық  үшін,  орындалатындай  саны табылады.

*Дәлелдеуі.* Айталық . Таңдауымыз бойынша,  аралығында нөлден өзгеше функциялар - тек  функциялары. Сондықтан,

.

Осыдан, белгілі  теңсіздігін және (2.2.2) бағалауын қолданып, келесіні аламыз:











.

Демек

. (2.2.11)

Теңсіздік (2.2.11)-бойынша, -дер үшін  болатындай  саны табылады. Лемма дәлелденді.

Енді келесі операторды қарастырайық:

,

мұнда .

*Лемма 2.2.5.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық  үшін келесі бағалау орынды

.

*Дәлелдеуі.* Лемма 2.2.2**-**нің есептеулері мен тұжырымдарын қайталау арқылы лемма 2.2.5-ті дәлелдейміз.

*Лемма 2.2.6.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  болғанда  операторы үзіліссіз қайтарымды, және  кері операторы үшін

. (2.2.12)

теңдігі орындалады.

*Дәләлдеуі.* Лемма 2.2.6 дәлелдеуі (2.2.10) теңдігінен және 2.2.4, 2.2.5 леммаларынан шығады.

*Теорема 2.1.1-дің дәлелдеуі.* Алдымен келесі анықтаманы берейік:

*Анықтама 2.2.1.* Егер

,,

қатыстарын қанағаттандыратын  тізбегі табылатын болса, онда  функциясын  теңдеуінің шешімі дейміз.

Келесі теңдеуді қарастырайық

. (2.2.13)

(2.2.13) теңдеуіне  айнымалысы бойынша Фурье түрлендіруін жүргізізейік. Фурьенің тура және кері түрлендірулері былайша анықталады

,

.

Фурье түрлендіруін (2.2.13) теңдеуіне қолданып, мына теңдеуді аламыз

, (2.2.14)

мұнда ,  функциялары - ,  функцияларының  айнымалысы бойынша Фурье бейнелері. Алдағы уақытта  арқылы Фурье түрлендіруін, ал  арқылы Фурьенің кері түрлендіруін белгілейміз.

(2.2.13) теңдеуін шешу үшін (2.2.14) теңдеуін шешу жеткілікті екенін оңай байқауға болады. Жоғарыда келтірілген Лемма 2.2.6 бойынша, келесіні аламыз

.

Осыдан және  кері операторын қолданып алатынымыз:

. (2.2.15)

 кеңістігі -де тығыз екені белгілі. Шекке көше отырып, және Фурье түрлендіруінің шенелгендік және үзіліссіздік қасиеттерін пайдаланып, (2.2.15) теңдігін кез-келген  үшін аламыз. Шешімнің жалғыздығы 2.2.1 леммасынан шығады. Теорема 2.1.1 дәлелденді.

**2.3 Кортевег-де Фриз типті сызықты оператордың бөліктенуі**

Бұл пунктте коэффициенттері шенелмеген үшінші ретті (2.1.1) оператордың бөліктенуі (максималды регулярлығы) жайлы мәселені зерттейміз. Алдымен келесі операторды қарастырайық

,

мұнда , ,  - алдыңғы бөлімшеде сипатталған шенелген периодты функциялар, ал , , .

*Лемма 2.3.1.* Айталық  және  болсын, онда орындалады сонда тек сонда ғана, егер  және болса.

*Дәлелдеуі.* Лемма 2.3.1 гильберт кеңістіктерінің және комплекс сандардың қасиеттерін пайдаланып дәлелденеді.

Жоғарыда келтірілген қасиеттерді ескере отырып



операторын  шексіз дифференциалданатын, финитті және нақты мәнді функциялар жиынында қарастыра аламыз.

*Лемма 2.3.2.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық үшін келесі бағалаулар орынды:

, (2.3.1)

мұнда ;

, (2.3.2)

мұнда ;

, (2.3.3)

мұнда .

*Дәлелдеуі.* Айталық . Енді  үшін скалярлық көбейтіндіні қарастырайық:



. (2.3.4)

Бөліктеп интегралдау арқылы төмендегі теңдікті дәлелдеу қиын емес

.

Соңғы теңдікті ескере отырып, (2.3.4)-тен келесіні аламыз:



.

Осыдан,  комплекс саны үшін орындалатын  теғсіздіктерін пайдаланып, алатынымыз

. (2.3.5)

Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, (2.3.5)-тен

,

шығады, мұндағы . Осыдан

.

Теңсіздік (2.3.1) дәлелденді.

Дәл жоғарыдағыдай, (2.3.2) теңдігінен табатынымыз

.

Біз мұнда комплекс сандар қасиеттерін пайдаландық. Енді i) шартын пайдаланып, алдыңғы теңсіздіктен келесі теңсіздікті аламыз

.

 екенін ескерсек, және Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, онда

.

Соңғы теңсіздіктен түпкілікті алатынымыз

.

Теңсіздік (2.3.2) дәлелденді.

Тура осылайша

,

мұнда. Коши-Буняковский теңсіздігін қолдансақ, онда

.

Лемма 2.3.2 дәлелденді.

*Лемма 2.3.3.* Айталық і) шарты орындалсын және  ал  - -де берілген үзіліссіз функция болсын. Онда келесі бағалау орынды

. (2.3.6)

*Дәлелдеуі.* Айталық . (2.2.12) теңдігінен  функциясының қасиеттерін ескеріп алатынымыз:





.

Таңдауымыз бойынша,  аралығында  функциялары ғана нөлдік емес, сондықтан















. (2.3.7)

 болғандықтан, (2.3.7) теңсіздігінен алатынымыз:





. (2.3.8)

Лемма 2.2.5-тен  екені шығады. Осыдан және (2.3.8) -ден келесі теңсіздікті аламыз

 .

Онда

.

Лемма 2.3.3 дәлелденді.

*Лемма 2.3.4.* Айталық і) және іі) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды:

; (2.3.9)

; (2.3.10)

, (2.3.11)

мұнда  -дан  тәуелсіз.

*Дәлелдеуі.* (2.3.6) теңсіздігінен көретініміз егер шенелген болса, онда  операторы да шенелген. Сондықтан



. (2.3.12)

Лемма 2.3.2-ді, (2.3.12) теңсіздігін пайдаланып және ii) шартын ескеріп, келесі теңсіздікті аламыз



,

мұнда . Осыдан түпкілікті келесі теңсіздік шығады:

.

Соңғы бағалау Лемма 2.3.4-тегі (2.3.9) теңсіздігін дәлелдейді.

Теңсіздік (2.3.10)-ды дәлелдейік. Лемма 2.3.3-ті және 2.3.2-ні пайдаланып, келесіні аламыз





,

мұнда . Осыдан

.

Теңсіздік (2.3.10) дәлелденді.

Теңсіздік (2.3.11)-ді дәлелдейік. (2.3.9), (2.3.10) теңсіздіктерін дәлелдеуде қолданылған есептеулерді және (2.3.3) теңсіздігін пайдаланып келесіні аламыз

.

Осыдан

.

Теңсіздік (2.3.11) дәлелденді. Лемма 2.3.4 толығымен дәлелденді.

*Теорема 2.1.2– дің дәлелдеуі.*

Теорема 2.1.1 және (2.2.15) теңдігі бойынша



.

 Фурье операторының унитарлық қасиетін пайдаланып, келесіні аламыз



.

Соңғы теңсіздіктен Парсеваль теңдігін пайдалансақ, келесі теңсіздікке ие боламыз



.

Осыдан және (2.3.9) бағалауынан шығатыны

,

яғни

, (2.3.13)

мұнда .

Дәл осылайша, (2.3.10) бағалауын қолданып және (2.3.13) - ті дәлелдегенде қолданылған есептеулер мен тұжырымдарды қайталай отырып, келесі теңсіздіктерді аламыз:

; (2.3.14)

. (2.3.15)

(2.3.13)-(2.3.15) теңсіздіктерін шығатыны





 . (2.3.16)

(2.3.13)-(2.3.16) пайдаланып алатынымыз:

,

мұнда тұрақтысы  -тен тәуелсіз. Теорема 2.1.2 дәлелденді

**3 ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕРІЛГЕН ПАРАБОЛА ТИПТІ СЫЗЫҚТЫ СИНГУЛЯРЛЫ ОПЕРАТОРДЫҢ РЕЗОЛЬВЕНТАСЫНЫҢ БАР БОЛУЫ МЕН БӨЛІКТЕНУІ**

**3.1 Жазықтықта берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператор үшін алынған нәтижелердің тұжырымдамалары**

Бұл пунктте  қалауымызша тегіс финитті функциялар жиынында анықталған коэффициенттері шенелмеген мына парабола типті операторды қарастырамыз

, (3.1.1)

мұндағы , .

 коэффициентіне сәйкес тұжырымдарды дәлелдеу барысында келесі түрдегі шарттарды қоятын боламыз:

а)  - -де үзіліссіз функция, ;

ә) .

операторы **** кеңістігінде тұйықталады, соны көрсетейік. Тұйық операторлар теориясынан белгілі:  тұйықталатын оператор болуы үшін  тізбегі табылып, ,  () қатыстарынан  шығуы қажетті және жеткілікті.

Айталық  болсын.  деп  операторына формальді түйіндес операторды белгілейік және  элементін алайық. Онда  түйіндес оператор үшін

.

Формальді түйіндес  операторының  әсерін іздестірейік. Ол үшін  скалярлық көбейтіндісін ашамыз:



. (3.1.2)

Осыдан бөліктеп интегралдау арқылы мына теңдікті аламыз



Ендеше .

Енді  скалярлық көбейтіндіде  деп шекке көшіп, ,  шарттарын қолдансақ,

.

Осы  теңдігі әрбір  үшін орындалып тұр. Ендеше  жиыны  де тығыз болғандықтан, . Сонымен  операторы  кеңістігінде тұйықталады.

 операторының **** кеңістігіндегі тұйықталуын қайтадан  арқылы белгілейміз.

Біз қарастырып отырған есеп жайлы бірер сөз. Соңғы кезде коэффициенттері шенелмеген дифференциалдық операторларға қызығушылықтың күрт артқаны байқалады [38, р. 301-323; 39, с. 195-216; 42, р. 50-66; 50, р. 143-145; 51, р. 1005-1013; 52, р. 89-93; 53-64.  операторы кванттық физика есептерінде және стохастикалық жылуөткізгіштік теңдеулерінде кездеседі [55, с. 2-400; 62, р. 71-90].

Бұл тақырыпта қарастырылатын мәселенің осыған дейін алынған нәтижелерден айырмашылығы, біз  гильберттік кеңістігінде (анықтама 3.1.1-ді қараңыз) коэффициенті шексіздікте жылдам өсетін парабола типті дифференциалдық оператордың бөліктену есебін зерттейміз. Атап кету керек, мұнда коэффициенттің шексіздікте өсуі өте маңызды рөлге ие. Ж.Лере [65] жұмысында айтылғандай, дифференцалдық операторладың бүкіл  () кеңістігінде зерттеу маңызды мәселе болып табылады.

Коэффициенттері қатты өспелі дифференциалдық операторлар үшін бізді келесі сұрақтар қызықтырады:

а) резольвентаның бар болуы;

б) келесі бағалаудың орындалуы:

, (3.1.3)

мұнда  -  оператрының анықталу облысы, - -дегі норма,- тұрақты сан.

*Анықтама 3.1.1.* Егер барлық  үшін (3.1.3) бағалауы орындалса, онда параболалық операторы бөліктенеді дейді.

Бұл пункттің негізгі нәтижелері – 3.1.1, 3.1.2 теоремалары.

*Теорема 3.1.1.* Айталық i) шарты орындалсын. Онда  болғанда  - ге кері  операторы табылады және ол барлық  кеңістігінде анықталған (демек үзіліссіз).

*Теорема 3.1.2.* Айталық i) және ii) шарттары орындалсын. Онда операторы бөліктенеді.

*Мысал 3.1.1***.** Келесі операторды қарастырайық ( )

, .

.

Айнымалы коэффициент үшін 3.1.1, 3.1.2 теоремаларының шарттары орындалатынын байқау қиын емес. Ендеше -ге кері үзіліссіз  операторы бар және әрбір  үшін келесі бағалау орындалады

,

мұнда - тұрақты сан.

**3.2  кеңістігінде берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператордың резольвентасының бар болуы**

Бұл пунктте біз алдынғы пунктте келтірілген (3.1.1) операторының резольвентасының бар болуы мәселесін зерттейміз және 3.1.1 теоремасының дәлелдеуін келтіреміз. Алдымен бірнеше көмекші леммалар мен тұжырымдарды келтіреміз.

-да анықталған келесі операторды қарастырайық

,

мұнда.  операторы  кеңістігінде тұйықталатынын байқау қиын емес, және оны қайтадан  арқылы белгіліейік.

*Лемма 3.2.1.* Айталық i) шарты орындалсын. Онда  болғанда барлық  үшін келесі бағалаулар орындалады:

, (3.2.1)

.

*Дәлелдеуі.* Айталық . Онда келесі теңдік орынды:



,

мұнда  – -дегі скалярлы көбейтінді. Осы теңдіктен

,

, .

Бұл теңсіздіктерден і) шартын және Шварц теңсіздігін қолданып, келесіні аламыз

 , (3.2.2)

. (3.2.3)

Осы (3.2.2) және (3.2.3) теңсіздіктерінен 3.2.1 леммасының дәлелдеуі шығады.

Лемма дәлелденді.

 кеңістігінен

, , ,

орындалатындай  - теріс емес функциялар тізбегін алайық. мұндағы ,  [43, р. 1463; 56, с. 540-542].

 функциясын -дан бүкіл -ге жалғастырайық және оның  жалғастырулары шенелген және бірдей периодты функциялар болсын. арқылы -да анықталған



операторының тұйықталуын белгілейік.

*Лемма 3.2.2.* Айталық i) шарты орындалсын. Онда  болғанда барлық  және  үшін келесі бағалаулар орындалады

, (3.2.4)

. (3.2.5)

*Дәлелдеуі.* 3.2.1 леммасын дәлелдеуде қолданылған есептеулер мен тұжырымдарды қайталап, 3.2.2 леммасының дәлелдеуін аламыз.

*Лемма 3.2.3.*  кеңістігінде  үшін  операторы үзілісіз қайтарымды.

*Дәлелдеуі.* Теңсіздік (3.2.5)-тен шығатыны , . Сондықтан 3.2.3 леммасын ақырлы  үшін дәлелдеу жеткілікті. (3.2.4) бағалауынан  операторының  мәндер облысы  мен беттесетінін көрсету жеткілікті екенін көреміз.

Кері жориық,  мәндер облысы  кеңістігімен беттеспейді делік. Онда кез-келген  үшін



теңдігі орындалатындай ,  элементі табылады.

Осыдан  операторы мен барлық  үшін Рисс теоремасына сәйкес



теңдігі орындалады. Жалпыланған функциялар теориясы бойынша

 . (3.2.6)

 функциясы шектеулі, демек . Осыдан және (3.2.6) теңдігінен ақырлы  үшін  екені шығады. Онда енгізу теоремаларының жалпы теориясы бойынша,

.

Осыны ескеріп және 3.2.1 леммасындағы есептеулер мен тұжырымдарды қайталай отырып

,

бағалауын аламыз, мұндағы - тұрақты сан. Соңғы теңсіздіктен  екені шығады. Қарама-қайшылыққа келдік. Ол  операторының  мәндер облысы -ге тең екенін көрсетеді.

Лемманың дәлелдеуін аяқтау үшін  операторының шектеулі екенін көрсету керек. Ол лемма 3.2.2-ден шығады. Лемма 3.2.3 дәлелденді.

*Лемма 3.2.4.*  операторы үшін келесі бағалаулар орынды:

а) ;

ә) .

*Дәлелдеуі.* (3.2.4) теңсіздігінен лемманың а) бөлімі шығады. (3.2.4) теңсіздігінен табатынымыз

. (3.2.7)

Айталық  болсын, онда келесі теңдік орынды

.

Осыдан

. (3.2.8)

Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ

 (3.2.9)

екені шығады. Енді (3.2.7) және (3.2.9)-ден келесі теңсіздікті аламыз

.

Соңғы теңсіздік 3.2.4 леммасының б) бөлімін дәлелдейді. Лемма 3.2.4 дәлелденді.

Айталық

 (3.2.10)

болсын, мұндағы ,  функциялар жиыны және  3.2.2 леммасынан алынған.

Тікелей есептеулер арқылы

,

екенін аламыз, мұндағы . Шынында да













.

 кесіндісінде  операторының әсері  операторының әсерімен бірдей. Сондықтан



.

Осыдан ,  және  екенін ескерсек, онда

.

Яғни

.

*Лемма 3.2.5.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда барлық  үшін,  орындалатындай  саны табылады.

*Дәлелдеуі.* Айталық .  аралығында нөлден өзгеше функциялар - тек  функциялары. Сондықтан,



.

Осыдан,  теңсіздігін және 3.2.4 леммасының нәтижелерін пайдаланып, келесіні аламыз













.

, сондықтан

,

мұнда. Соңғы теңсіздіктен  болғанда  орындалатындай  саны табылатынын көреміз. Лемма 3.2.5 дәлелденді.

*Лемма 3.2.6.* Айталық і) шарты орындалсын. Онда  болғанда  операторы үзіліссіз қайтарымды және кері операторы үшін

. (3.2.11)

теңдігі орындалады.

*Дәләлдеуі.* Бағалау (3.2.11)-ді және 3.2.1, 3.2.2 және 3.2.5 леммаларын пайдаланып, Лемма 3.2.6 –ның дәлелдеуін аламыз.

*Лемма 3.2.7.* Айталық i) шарты орындалсын. Онда барлық үшін  операторы  кеңістігінде үзіліссіз қайтарымды.

Лемма 3.2.7-нің дәлелдуі 3.2.1, 3.2.6 леммаларынан және келесі леммадан шығады.

*Лемма 3.2.8* [44, с. 166]. Айталық,  операторы -де үзіліссіз қайтарымды және  болғанда ,  бағалауы орынды болсын. Онда  операторы да үзіліссіз қайтарымды.

*Теорема 3.1.1-дің дәлелдеуі*

Алдымен келесі лемманы дәләлдейік.

*Лемма 3.2.9.* Айталық і) шарты орындалсын және . Онда барлық  үшін келесі теңсізідік орындалады

 (3.2.12)

мұнда .

*Дәлелдеуі.* операторы коэффициенті нақты мәнді болғандықтан (3.2.12) бағалауын нақты мәнді функциялар үшін дәлелдеу жеткілікті. Айталықн ақты мәнді функция болсын. Келесі скалярлы көбейтіндіні қарастырайық:



.

Осыдан



екенін ескере отырып, бөліктеп интегралдап, келесі теңдікті аламыз

.

Коши-Буняковский теңсіздігін және і) шартын қолданып алатынымыз:



,

Яғни

.

 тұйық оператор болғандықтан, соңғы бағалау барлық  үшін дұрыс. Лемма 3.2.9 дәлелденді.

Енді  операторының бар болуын дәлелдейік. Алдымен келесі анықтаманы берейік:

*Анықтама 3.2.1.*  функциясын  теңдеуінің шешімі деп айтамыз, егер

,

қатыстарын қанағаттандыратын  тізбегі бар болса.

Анықтамадан -ге кері оператор -де анықталған  операторының тұйықталуымен беттесетіні көрінеді.

Келесі теңдеуді қарастырайық.

. (3.2.13)

Осы теңдеуге  айнамалысы бойынша Фурье түрлендіруін қолдансақ, онда

, (3.2.14)

мұнда

,



функциялары – сәйкес ,  функцияларының  айнымалысы бойынша Фурье түрлендірулерін жасағандағы бейнелері. Алдағы уақытта - арқылы Фурье түрлендіруін, ал арқылы кері Фурье түрлендіруін белгілейміз.

(3.2.13) теңдеуін шешу есебі (3.2.14) теңдеуін шешу есебіне келетінін оңай байқауға болады. Лемма 3.2.6-ға сәйкес, біз келесіні аламыз

.

Осыдан және  кері операторын қолданып алатынымыз:

.

Соңғы теңдік,  мен Фурье түрлендіруі үзіліссіз операторлар болғандықтан, кез-келген  үшін орындалады. Шешімнің жалғыз екендігі 3.2.9 леммасынан шығады. Теорема 3.1.1 дәлелденді.

**3.3 Жазықтықта берілген парабола типті сызықты сингулярлы оператордың бөліктенуі**

Алдымен коэффициенті шенелмеген (3.1.1) операторының бөліктенуі (максималды регулярлығын) есебін коэффициенттері шенелген оператор үшін осындай мәселеге келтіріп шешу үшін қажет леммаларды қарастырамыз.

*Лемма 3.3.1.* Айталық i) және ii) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалаулар орынды:

, (3.3.1)

, (3.3.2)

мұнда .

*Дәлелдеуі.* Теңсіздік (3.3.1)-дің дәлелдеуі (3.2.3) теңсіздігінен шығады.

.

Осыдан

.

Теңсіздік (3.3.2)-ні дәлелдейік. (3.2.8) теңсіздігінен және Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып



екенін аламыз. Онда

,

мұнда .

 кесіндісінде  болғандықтан, . Сондықтан соңғы теңсіздіктен

,

екені шығады. Бұл (3.3.2) бағалауын дәлелдейді. Лемма 3.3.1 дәлелденді.

*Лемма 3.3.2.* Айталық i) және ii) шарттары орындалсын және болғанда,  болсын. Онда келесі бағалау орындалады:

. (3.3.3)

*Дәлелдеуі.* 3.2.6 леммасынан  операторының шенелгендігін дәлеледеу үшін  операторының шенелгендігін дәлелдеу жеткілікті екенін көреміз. Сондықтан  операторының нормасын зерттеумен айналысамыз.

Айталық, 3.2.6 леммасын және (3.2.10) теңдігін пайдаланып







теңсіздігін аламыз. Таңдауымыз бойынша,  аралығында тек. Осыны ескеріп және  теңсіздігін пайдалансақ, келесіні табамыз:







,

мұнда . Біз мұнда  теңдігін қолдандық. Осыдан

.

Соңғы теңсіздіктен норманың анықтамасы бойынша 3.3.2 леммасының дәлелдеуін аламыз.

*Лемма 3.3.3.* Айталық 3.3.2 леммасының шарттары орындалсын. Онда келесі бағалау орындалады:

,

мұндағы - тұрақты сан.

*Дәлелдеуі.* 3.3.1 және 3.3.2 леммаларына сәйкес, келесіні аламыз:



,

мұнда . Лемма 3.3.3 дәлелденді.

*Лемма 3.3.4.* Айталық i) және ii) шарттары орындалсын. Онда келесі бағалау орындалады:

,

мұнда - саны -тен тәуелсіз.

*Дәлелдеуі.* (3.2.4) теңсіздігінен алатынымыз

, . (3.3.4)

3.3.3 леммасын қолданып

,

, (3.3.5)

екенін аламыз, мұндағы  - тұрақты сан.

Енді (3.3.4), (3.3.5) және (3.2.1) теңсіздіктерінен



 (3.3.6)

екенін аламыз, мұндағы - саны -тен тәуелсіз. Соңғы (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) бағалауларынан



теңсіздігін аламыз. Соңғы теңсіздік 3.3.4 леммасын дәлелдейді.

*Теорема 3.1.2-нің дәлелдеуі.* Теорема 3.1.1-бойынша сәйкес  кері операторы келесі түрге ие

. (3.3.7)

Соңғы теңдікті пайдалансақ,



.

 унитарлы оператор болғандықтан, соңғы теңдіктен келесі теңсіздікті аламыз



.

Осыдан



.

(3.3.1) бағалауы бойынша,

,

яғни

, (3.3.8)

екенін аламыз, мұндағы . Соңғы бағалаудағы дәлелдеулер мен есептеулерді және лемма 3.3.3-ті пайдаланып, келесі теңсіздікті аламыз:

.

Осыдан

, (3.3.9)

мұнда . Фурье түрлендіруінің қасиеттерін пайдаланып, (3.3.7) теңдіктен төмендегі теңсіздікті аламыз:

.

Осыдан және (3.3.6) теңсіздігінен табатынымыз

,

яғни

. (3.3.10)

Жоғарыдағы (3.3.8)-(3.3.10) теңсіздіктерінен кез-келген  үшін келесі бағалау орындалатындығы шығады:

.

Теорема 3.1.2 дәлелденді.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Диссертациялық жұмыста шексіз облыста коэффициенттері шектеусіз өсетін тақ ретті дербес туындылы дифференциалдық операторлардың резольвенталарының бар болуын, компактылығын және спектрлік қасиеттерін зерттеу барысында алынған нәтижелер келтірілген.

Жұмыста локализациялау әдісі, априорлы бағалау әдісі, Фурье түрлендірулері, сызықты оператор әдістері, тұйық операторлар мен салмақты функционалдық кеңістіктер теориялары әдістері қолданылды. Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелер жаңа және төмендегідей.

Жұмыстың бірінші бөлімінде шексіз жолақта берілген коэффициенттері шексіз өсетін сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторының бір класы үшін келесідей нәтижелер алынды:коэффициенттерге резольвентасының бар болу шарттары табылды;сызықталған Кортевег-де Фриз операторы үшін бөліктену шарттары алынды;сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторының резольвентасының компактылығын көрсететін қажетті және жеткілікті шарттар табылды; сызықталған Кортевег-де Фриз операторы резольвентасының екі жақты сингулярлы сандарының (*s*-саны) бағасы алынды. Демек, оператордың меншкті сандарын жоғарыдан бағалау мүмкіндігі табылды, яғни бұл табылған бағалар шешімдерді жуықтап есептеуге тікелей жол ашады.

Екінші бөлімде барлық жазықтықта берілген коэффициенттері шексіз өсетін сызықталған Кортевег-де Фриз дифференциалдық операторы үшін  кеңістігіндегі резольвентасының бар болуы мен бөліктенуі туралы теоремалар дәлелденді.

Үшінші бөлімде коэффициенттері шексіз өсетін параболалық дифференциалдық операторының бір класы үшін кері операторы бар екендігі, сонымен қатар, оператордың бөліктенуі туралы тұжырымдар дәлелденді.

Шексіз облыста, егер шекаралық режим жеткілікті ұзақ уақыт жұмыс жасайтын болса, онда кез-келген нақты физикалық жүйеге тән үйкеліс салдарынан, уақыт өткен сайын алғашқы деректердің әсері әлсірейді. Осылайша, біз алғашқы шартсыз есеп мәселесіне келеміз [41, с. 241]. Осыған байланысты дисертациялық жұмыста алғашқы шартсыз динамикалық есептер қарастырылды. Бұл ерекшеліктер шексіз облыста тақ ретті дербес туындылы операторларды зерттеудің қолданыстағы әдістерінің жеткіліксіздігімен бірге зерттеу бағытының өзектілігі мен күрделілігін анықтайды.

Әдебиеттерге шолу шенелмеген облыста берілген, коэффициенттері шексіз өсетін дербес туындылы тақ ретті дифференциалдық операторлардың резольвентасының бар болуы, бөліктенуі, спектрлік және аппроксимациялық қасиеттері толық зерттелмегендігін көрсетеді. Сонымен, ғылымда әрі практикада жиі қолданатын дербес туындылы Кортевег-де Фриз сызықты емес операторының коэффициенттері сингулярлы болып келетін сызықталған түріне жоғарыдағы айтылған сұрақтарды зерттеу маңызды әрі өзекті болып табылады.

Дәлелденген теоремалар теориялық сипатта. Олар, мысалы, [18, с. 48-50; 19, с. 4-6] мақалаларының нәтижелерін екі өлшемді дербес туындылы теңдеулерге жалпылайды. Сонымен бірге, сызықталған Кортевег-де Фриз операторы резольвентасының сингулярлы сандары (*s*-саны) үшін алынған екі жақты бағаны пайдалана отырып, алғаш рет осы оператордың меншікті сандарын жоғарыдан бағалау есебі шешілді, бұл табылған баға сингулярлы Кортевег-де Фриз теңдеуінің шешімдерін жуықтап есептеуге тікелей жол ашады.

Жұмыста алынған ғылыми тұжырымдар тақ ретті дербес туындылы дифференциалдық операторлардың резольвентасының сапалық қасиеттерін терең зерттеуде қолданылуы мүмкін. Атап айтқанда оларды шексіз облыста тақ ретті дифференциалдық операторлардың резольвентасының бар болуын, компактылығын, спектрлік қасиеттерін зерттеуге пайдалануға болады. Табылған ғылыми нәтижелерді дифференциалдық операторлар және математикалық физика теңдеулері бойынша студенттер, магистранттар мен докторанттарға арналған элективті курстарда пайдалануға болады.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1 Korteweg D.J., [Vries](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B5_%D0%A4%D1%80%D0%B8%D0%B7,_%D0%93%D1%83%D1%81%D1%82%D0%B0%D0%B2) G. [On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves](https://dx.doi.org/10.1080/14786449508620739) // [Philosophical Magazine](https://ru.wikipedia.org/wiki/Philosophical_Magazine). – 1895. – Vol. 39. – P. 422-443.

2 Temam R. Sur un probleme non linearie // J. Math. Pures. Apple. – 1969. – Vol. 48, Issue 2. – P. 159-172.

3 Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / пер. с фр. – М.: Мир, 1972. – 587 c.

4 Уизем Дж. Уравнение Кортевега-де Фриза и Буссинеска // В кн.: [Линейные и нелинейные волны](https://books.google.ru/books?id=F54-PgAACAAJ) / пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 622 с.

5 Дубинский Ю.А. Об одной абстрактной теореме и ее приложения к краевым задачам для неклассических уравнений // Математический сб. – 1969. – Т. 79(121), №1. – C. 91-117.

6 Пятков С.Г. Об одном линейном уравнений неклассического типа высокого порядка. – Новосибирск, 1981. – 25 с.

7 Колоколов И.В., Кузнецов Е.А. и др. Задачи по математическим методам физики. – М.: Либроком, 2021. – 286 с.

8 Губанков В.П. Солитоны, новое в жизни, науке, технике. – М.: Знание, 1983. – 64 с.

9 Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные урвнения. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

10 Villanueva A. On Linearized Korteweg-de Vries Equations // Journal of Mathematics Research. – 2012. – Vol. 4, №1. – P. 2-8.

11 Taflin E. Analytic linearization of the Кorteweg-de Vries equation // Pacific Journal of mathematics. –1983. – Vol. 108, №1. – P. 203-220.

12 Turbal Y., Bomba A., Turbal M. Method for Studying the Multisoliton Solutions of the Korteweg-de Vries Type Equations // Journal of Difference Equations. – 2015. – Vоl. 2015. – P. 703039-1-703039-9.

13 Zheng Ch., Wen X., Han H. Numerical Solution to a Linearized KdV Equation on Unbounded Domain // Numer. Methods Partial Differential Eq. – 2008. – Vol. 24. – P. 383-399.

14 Муратбеков М.Б., Отелбаев М. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1989. – №3. – С. 44-48.

15 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Smoothness and approximative properties of solutions of the singular nonlinear Sturm-Liouville equation // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2020. – Vol. 100, №4. – P. 113-124.

16 Оспанов К.Н. Разделимость и свойства решений нелинейной обобщенной системы Бельтарми с неограниченными коэффициентами // В кн.: Новые иссл. в выч. и прик. матем. – Караганда, 1993. – С. 38-49.

17 Алиев Б.И. Теоремы разделимости для операторного уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси // В кн.: Спектральная теория операторов. – Баку: Элм., 1989. – C. 3-10.

18 Аманова Т.Т. О разделимости одного дифференциального оператора // Известия АН КазССР. – 1981. – №3. – C. 48-51.

19 Аманова Т.Т., Муратбеков М.Б. Гладкость решения одного нелинейного дифференциального уравнения // Известия АН КазССР. – 1983. –№5. – C. 4-7.

20 Айткожа Ж.Ж. О гладкости и аппроксимативных свойствах решений дифференциальных уравнений нечетного порядка: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Алма-Ата, 2003. – 75 с.

21 Айкожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б. О гладкости и аппроксимативных свойствах решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с комплексным потенциалом // Теория приближения и вложения функциональных пространств: тез. докл. республ. науч. конф. – Караганда, 1991. – С. 52.

22 Айткожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н. О разрешимости одного класса нелинейных сингулярных уравнений третьего порядка // Вестник Евразийского национального университета им. Л.Н. Гумилева. – 2005. – Т. 46, №6. – С. 10-15.

23 Биргебаев А. Гладкость решений нелинейного дифференциального уравнения с матричным потенциалом // Тез. докл. 8-й республ. межвуз. науч. конф. по математике и механике. – Алма-Ата, 1984. – С. 11.

24 Биргебаев А., Отелбаев М. О разделимости нелинейного дифференциального оператора третьего порядка // Известия АН КазССР. – 1984. – №3. – С. 11-13.

25 Аманова Т.Т. Гладкость и аппроксимативные свойства двучленных дифференциальных операторов на бесконечном интервале: дис. … канд. физ.-мат.наук: 01.01.02. – Алма-Ата, 1984. – 80 c.

26 Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н. Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Докл. академии наук. – 2010. – Т. 435, №3. – С. 310-313.

27 Сапенов М., Шустер Л.А. О суммируемости с весом решений двучленных дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР. – 1987. – №1. – С. 38-42.

28 Тогочуев А.Ж. О суммируемости решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с весом // Известия АН КазССР. – 1985. – №5. – С. 55-58.

29 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Suleimbekova A.O. Bounded invertibility and separability of a parabolic type singular operator in space  // Turk. J. Math. – 2021. – Vol. 45. – P. 2199-2210.

30 Muratbekov M.B., Suleimbekova A.O. On the existence of the resolvent and separability of a class of the Korteweg-de Vriese type linear singular operators // Bulletin of the Karaganda University. – 2021. – Vol. 101, №1. – P. 87-97.

31 Suleimbekova A.O. Separability of the third-order differential operator given on the whole plane // Bulletin of the Karaganda University. – 2022. – Vol. 105, №1. – P. 109-117.

32 Cулеймбекова А.О. О существовании резольвенты и разделимости одного класса дифференциальных операторов третьего порядка // Вестник НИА РК. – 2021. – Т. 82, №4. – С. 168-178.

33 Муратбеков М.Б., Сулеймбекова А.О. О существований резольвенты и разделимости одного класса сингулярных линеазованных операторов Кортвега-де Фриза // Традиционная междунар. науч. апрел. конф.: тез. докл. – Алматы, 2018. – С. 58-59.

34 Муратбеков М.Б., Сулеймбекова А.О. О сущестаовании, компатности резольвенты и разделимости одного класса линейных сингулярных операторов Кортевега-де фриза // Теоретические и прикладные вопросы математики, механикии информатики: тез. докл. междунар. науч. конф. – Караганда, 2019. – С. 40-41.

35 Муратбеков М.Б., Сулеймбекова А.О. Существование, компактность и оценки сингулярных чисел резольвенты сингулярного линейного оператора типа Кортевега–де Фриза // Традиционная междунар. науч. апрел. конф.: тез. докл. – Алматы, 2020. – С. 97-98.

36 Муратбеков М.Б., Сулеймбекова А.О. Оценки сингулярных (s-чисел) и собственных чисел резольвенты линеаризованного сингулярного оператора Кортевега–де Фриза // Традиционная междунар. науч. апрел. конф.: тез. докл. – Алматы, 2021. – С. 159-160.

37 Муратбеков М.Б., Сулеймбекова А.О. Спектральные свойства линейного оператора типа Котевега-де Фриза // Актуальные проблемы теорий оптимального управления, динамических систем и операторных уравнений: матер. 4-й междунар. науч. конф. – Бишкек, 2022. – С. 143-146.

38 Everitt W.N., Giertz M. Some properties of the domains of certain differential operators. // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1971. – Vol. 3s-23, №2. – P. 301-324.

39 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в  // Тр. математического института АН СССР. –1983. – Т. 161. – С. 195-217.

40 Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

41 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

42 Muratbekov М., Otelbaev M. On the existence of a resolvent and separabili ty for a class of sinqular hyperbolic type differential operators on an unbounded domain // Eurasian mathematical Journal. – 2016. – Vol. 7, №1. – P. 50-67.

43 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Sturm-Liouville operator with a parameter and its usage to spectrum research of some differential operators // Complex variables and Elliptic Equations. – 2019. – Vol. 64, №9. – P. 1457-1476.

44 Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М: Наука, 1966. – 644 с.

45 Отелбаев M. Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. Мат. Инст. Стеклова. – 1979. –Т. 150. – С. 256-305.

46 Муратбеков М.Б. Разделимость и оценки поперечников множеств, связанных с областью определения нелинейного оператора типа Шредингера // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, №6. – С. 1034-1042.

47 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. One-Dimensional Schrodinger Operator with a Negative Parameter and Its Applications to the Study of the Approximation Numbers of a Singular Hyperbolic Operator // Filomat. – 2018. – Vol. 32, №3. – P. 785-790.

48 Юрчук Н.И. О граничных задачах для уравнений содержащих в главной части оператора вида  // Дифференциальные уравнения. – 1974. –Т. 10, №4. – C. 759-762.

49 Bona J.Y., Sun S.M., Zhang B.-Y. A nonhomogeneous boundary – value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain // Comm. Partial Differential Equations. – 2003. – Vol. 28, №7-8. – P. 1391-1436.

50 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M. Estimates of spectrum for a class of mixed type operators // Differential equations. – 2007. – Vol.43. – P. 143-146.

51 Ospanov **K.N. Qualitative and approximate characteristics of solutions of Beltrami type systems // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2015. – Vol. 60, №7. – P. 1005-1014.**

52Ospanov K.**N. Discreteness and estimates of spectrum of a first order difference operator //** Eurasian Math. J. – 2018. – Vol. 9, №2. – P. 89-94.

# 53 Kato T. Schrödinger operators with singular potentials // Isr. J. Math. – 1972. – Vol. 13, №1-2. – P. 135-148.

# 54 Рид M., Саймон Б. Методы современной математической физики / пер. с англ. – M: Mир, 1978. – Т. 2. – 394 с.

# 55 Костюченко А.Г. Саргсян И.С. Распределение собственных значений: самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1979. – 402 с.

# 56 Отелбаев M. О разделимости эллиптических операторов // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 234, №3. – C. 540-543.

57 Weis L. Operator–valued Fourier multiplier theorems and maximal *Lp*-regularity // Math. Ann. – 2001. – Vol. 319. – P. 735-758.

# 58 Haller R., Heck H., Hieber M. Muckenhoupt weights and maximal *Lp*-regularity // Arch. Math. − 2003. − Vol.81. – P. 422-430.

59 Kunze M., Lorenzi L., Lunardi A. Nonautonomous kolmogorov parabolic equations with unbounded coefficients // Transactions of the american mathematical society. – 2010. – Vol. 362, №1. – P. 169-198.

# 60 Angiuli L., Lorenzi L., Pallara D. Lp – estimates for parabolic systems with unbounded coefficients coupled at zero and first order // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 444. – P. 110-135.

61 Lozenzi L., Rhandi A. On Schrodinger operators with unbounded coefficients: generation and heat kernel estimates // J. Evol.Equ. – 2015. – Vol. 15. − P. 53-88.

# 62 Deck. T., Kruse S. Parabolic Differential Equations with Unbounded Coefficients – A Generalization of the Parametrix Method // Acta Applicandae Mathematica. – 2002. – Vol.74. – P. 71-91.

63 Kuroda T. Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations with unbounded coefficients // Nagoya Math. J. – 1970. – Vol. 37. – P. 5-12.

# 64 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Abylayeva A.M. On existence of the resolvent and discretness of the spectrum of a class of differential operators of hyperbolic type // Electronic Journal Qualitative Theory of Diff. Equ. – 2013. – Vol. 64. – Р. 1-10.

65 Лере Ж. Гиперболичекие дифференциальные уравнения / пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – 207 с.