Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университетi

ӘОЖ 517.957(043) Қолжазба құқығында

ШӘКIР АЙДОС ҒАНИЖАНҰЛЫ

**Сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулерi үшiн керi және тура есептер**

8D05401 - Математика бiлiм беру бағдарламасы

Философия докторы PhD

ғылыми дәрежесiн алу үшiн дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесшi Хомпыш Х.

ф.-м.ғ.к., доцент

Шетелдiк ғылыми кеңесшi Х.В. де Оливейра

PhD, профессор

Алгарве университетi, Португалия

Қазақстан Республикасы

Алматы, 2023

**МАЗМҰНЫ**

[КІРІСПЕ 5](#_Toc150410246)

[КӨМЕКШІ НӘТИЖЕЛЕР 19](#_Toc150410247)

[1 ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН КЕРI ЕСЕПТЕР 30](#_Toc150410248)

[1.1 Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп 30](#_Toc150410249)

[1.1.1 Есептiң қойылымы 30](#_Toc150410250)

[1.1.2 Керi есептiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы 35](#_Toc150410251)

[1.1.3 Керi есептiң әлдi шешiмiнiң бар болуы 44](#_Toc150410252)

[1.1.4 Шешiмнiң жалғыздығы 46](#_Toc150410253)

[1.2 Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп 50](#_Toc150410254)

[1.3 Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп 56](#_Toc150410255)

[1.4. Глобалды шешiлiмдi болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп 63](#_Toc150410256)

[2 АРНАЙЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚОСЫМША ШАРТПЕН ҚОЙЫЛҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН КЕРI ЕСЕПТЕР 69](#_Toc150410257)

[2.1 Сызықты интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есептiң локалды бiрмәндi шешiмдiлiгi 83](#_Toc150410258)

[2.2 Сызықты емес интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есептiң глобалды бiрмәндi шешiмдiлiгi 88](#_Toc150410259)

[3 Р-ЛАПЛАСИАНДЫ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШIН КЕРI ЕСЕП 94](#_Toc150410260)

[3.2 Сызықты емес жылу көзiмен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есептiң бiрмәндi шешiмдiлiгi 100](#_Toc150410261)

[3.3 Абсорбция мүшемен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есептiң бiрмәндi шешiмдiлiгi 117](#_Toc150410262)

[4 БIРТЕКТI ЕМЕС СҰЙЫҚТЫҚТАР ҮШIН КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН БАСТАПҚЫ-ШЕТТIК ЕСЕП 128](#_Toc150410263)

[4.1 Есептiң қойылымы 128](#_Toc150410264)

[4.2 Шешiмнiң бар болуы 134](#_Toc150410265)

[4.3 Шектiк көшу 154](#_Toc150410266)

[4.4 Жалғыздығы 164](#_Toc150410267)

[ҚОРЫТЫНДЫ 168](#_Toc150410268)

[ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР 170](#_Toc150410269)

**НОРМАТИВТIК СIЛТЕМЕЛЕР**

Бұл диссертацияда төмендегi стандарттарға сiлтемелер қолданылды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011. Қазақстан Республикасының мемлекеттiк жалпыға мiндеттi бiлiм беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейiнгi бiлiм беру. Докторантура. Негiзгi ережелер;

МЕМСТ 7.1-2003. Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелерi;

МЕМСТ 7.32-2017. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы және пiшiмдеу ережелерi.

**КІРІСПЕ**

Математиканың ең қарқынды дамып келе жатқан бағыттарының бiрi - сұйық механикасының әр алуан есептерiн математикалық талдау. Қазiргi кезде математика, физика, механика, биология және мұнай-газ өнеркәсiбi, медицина, су ресурстары және тағы да басқа ғылым мен техниканың салаларының дамуы көптеген ньютондық және ньютондық емес сұйық механикасы процестерiн қатаң жан-жақты математикалық зерттеудi және идеялық тұрғыдан дамытуды талап етуде. Себебi аталған салаларда көптеген обьектiлер осындай қасиеттерге ие.

**Зерттеу өзектiлiгi.** Ежелгi заманнан берi cұйықтың ашық және жабық арналардағы қозғалысы, сондай-ақ ыдыстың қабырғасына немесе сұйықпен ағып жатқан қатты денеге күштiк әсер етуiн зерттеу математикадағы көптеген әрi сан алуан мәселелердiң көзi болып табылады. Сұйықтың қозғалыс заңдылығының қарапайым математикалық модельдерiн зерттегенде көптеген мәселелер туындайды және олардың басым бөлiгi күнi бүгiнге дейiн шешiлмей келедi.

Бұл диссертациялық жұмыс күрделi реологиялық қасиеттерi ескерiлген сығылмайтын бiртектi және бiртектi емес сұйық ағындарын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулерi үшiн жаңа қойылымды тура және керi есептердiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң бар болуы мен жалғыздығы мәселелерiн зерттеуге арналған. Барлық мүмкiн болатын қасиеттерi ескерiлген ньютондық және ньютондық емес сұйықтар ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi және тура есептердi зерттеу теориялық тұрғыдан да, практикалық тұрғыдан да маңызды әрi өзектi болып табылады.

Сұйық механикасы туралы ең алғашқы ғылыми трактаттар бiздiң заманымызға дейiнгi 250 жылдары ежелгi Грекияда пайда болды. Архимед (287- 212 б.з.д.) өзiнiң екi бөлiмнен тұратын «Жүзетiн денелер туралы» атты шығармасында сұйықта жүзетiн дененiң тепе-теңдiгi сұрақтарын қарастырған едi. Сұйық қозғалысы туралы «гидродинамика» ғылымының пайда болуы, сұйық пен газ ағынының қозғалысын өзiндiк тәжiрибелер арқылы зерттеген Л. Да Винчи (1452-1519), С. Стеван (1548-1620), Г. Галилей (1564-1642), Б. Паскаль (1588-1651), Э. Торричелли (1608-1647), И. Ньютон (1643-1727) және тағы басқа да ғалымдардың есiмiмен тiкелей байланысты. Мәселен, 1643 жы- лы Э. Торричелли саңылаудан ағып жатқан сұйықтың жылдамдығы саңылау үстiндегi биiктiкке тура пропорционалдығы туралы формуласын қорықтан едi. Ал, 1653 жылы Б. Паскаль тек сұйық пен газдардың қозғалысы барысында қысымның тұрақты болуы туралы заңды тұжырымдады. И. Ньютон жанама кернеу мен жылдамдық градиентiнiң сызықты тәуелдiгi жөнiнде заңын ашты. Алайда, сұйық механикасының ғылыми негiзiн ХVIII ғасырдың ғалымдары Д. Бернулли (1700-1783), Л. Эйлер (1707-1783), Ж.Л. Даламбер (1717-1783) қалаған едi. Д. Бернуллидiң көпжылдық ғылыми iзденiстерiнiң нәтижесiнде 1738 жылы жарық көрген «Гидродинамика» атты монографиясында энергияның сақталу заңының салдары ретiнде сығылмайтын сұйықтың стационарлық ағысының теңдеуiн жария еттi. Ал Л. Эйлер 1757 жылы Д. Бернуллидiң нәтижесiн сығылатын сұйық (газдар) үшiн қорытындылап, сонымен қатар, идеал сұйықтың қозғалыс теңдеуiн тұжырымдаған едi. Одан кейiн оның жұмысын Ж.Л. Лагранж (1736-1813) жалғастырды. Ж.Л. Даламбер сұйықтың тепе-теңдiгi мен қозғалысы туралы өзiнiң трактаттарын жазды. А. Навье (1785-1836) молекулалардың өзара әсерлесуi гипотезасының көмегiмен тұтқыр сұйықтың қолғалысының теңдеуiн тұжырымдады. Д. Стокс (1819-1903) аксиоматикалық негiзде тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеуiн қорытып шығарды. О. Рейнольдс (1842-1912) тұтқыр сұйықтың қозғалысын зерттей отырып, оның ламинарлы және турбуленттi ағысы түсiнiгiн енгiздi, сонымен қатар, ламинарлы ағыс түрiнен турбуленттi ағыс түрiне және керiсiнше қалай жылдам өтуге болатынын көрсеттi. Л. Больцман (1844-1906) газ немесе сұйық бөлшектерiнiң статистикалық үлестiрiмiн сипаттайтын заңы арқылы гидродинамика теңдеулерiнiң кинетикалық негiздемесiн жасады.

Жоғарыда есiмдерi аталған және басқа да ғалымдар бүгiнгi таңдағы негiзгi математикалық модельдердi құрып әрi шын мәнiнде классикалық гидродинамиканың түпнегiзiн жасаған едi. Сондай-ақ, сұйықтың физикалық ерекшелiгiн сипаттау үшiн кеңiстiктiк пен уақыттық айнымалыларға тәуелдi сұйықтың жылдамдығы мен қысымы қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеулер жүйесiн алды.

Шенелген облыста бiртектi емес сығылмайтын сұйықтың  уақыт аралығында қозғалысы келесi Коши теңдеулер жүйесiмен сипатталады:

 (1)

 (2)

 (3)

мұндағы  cұйықтың жылдамдық векторы, cұйықтың қысымы,  сұйыққа әсер етушi сыртқы күштердiң тығыздығы, ρ(**x**, t) сұйықтың тығыздығы,  кернеу тензорының девиаторы және . векторы -  (набло) векторы мен кернеу тензорының девиаторы арасындағы скаляр көбейтiндi, оның компоненттерi



Кернеу тензорының девиаторын (1)-(3) теңдеулер жүйесiнiң белгiсiздерi арқылы өрнектеу үшiн кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас қолданылады. Деформация тензорын  арқылы белгiлейдi, ал оның компоненттері келесi өрнекпен анықталады



Мұндай кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры және олардың уақыт бойынша туындылары арасындағы қатынас реологиялық қатынас деп аталады.

Егер кернеу тензорының девиаторы  болса, онда идеал сығылмайтын сұйықтың қозғалысын сипаттайтын Эйлер теңдеулер жүйесi тұжырымдалады

 (4)

 (5)

 (6)

Алайда, соңғы бiр жарым ғасырдан астам уақытта гидродинамика саласында негiзiнен ньютондық сұйықтың қозғалысы зерттелiнiп келедi. Ньютондық сұйықтың қозғалысының реологиялық қатынасы

 (7)

өрнегiмен анықталады, мұндағы ұтқырлықтың кинематикалық коэффициентi. Кернеу тензорының девиаторы (7) өрнек бойынша мәнiн (1)-(3) теңдеулер жүйесiне қойғанда

 (8)

 (9)

 (10)

Навье-Стокс теңдеулер жүйесi қорытылады. Бiрақ, 1971 жылы Павловский жұмысында [1] әлсiз концентрлi су-полимерлi қоспаларының моделi үшiн кернеу тензорының девиаторын (7) өрнектiң орнына келесi түрде анықтады

 (11)

мұндағы ретардация уақыты немесе деформацияның релаксация уақыты. Кернеу тензорының девиаторы (11) өрнек бойынша мәнiн (1)-(3) теңдеулер жүйесiне қойғанда

 (12)

 (13)

 (14)

тұтқыр сығылмайтын бiртектi емес сұйықтың релаксациялық қасиеттерiн сипаттайтын Кельвин-Фойгт (Навье-Стокс-Фойгт) теңдеулер жүйесi тұжырымдалады. Ең алғаш мұндай теңдеулер жүйесi туралы туралы 1966 жылы Мәскеуде өткен математиктердiң халықаралық конгрессiнде О.А. Ладыженская баяндамасында [2] айтылып, Навье-Стокс жүйесiнiң регуляризациясы ретiнде ұсынылды.

Сөйтiп, Кельвин-Фойгт сұйығының математикалық моделiн негiзге ала отырып, релаксация уақыты дискреттi үлестiрiлген және кешiгу уақытынан тұратын сызықты тұтқыр серпiмдi сұйықтың феноменологиялық теориясы қалыптасты. Осындай қасиеттерге ие реттi Кельвин-Фойгт сұйықтығының реологиялық қатынасы келесi өрнекпен анықталады

 (15)

мұндағы релаксация уақыты, кешiгу уақыты.

Ендi соңғы өрнектен  кернеу тензорының девиаторын өрнектеу үшiн оған және  деформация тензорына, сондай-ақ, олардың уақыт бойынша туындыларына бастапқы шарттар қажет. Ол бастапқы шарттар келесi өрнекпен анықталады

 (16)

 (17)

Егер  жағдайда (15) өрнекке  айнымалысы бойынша Лаплас түрлендiруiн қолданып және (16), (17) бастапқы шарттарда  деп ұйғарсақ, онда кернеу тензорының девиаторы

 (18)

өрнегiмен тұжырымдалады. Егер (18) өрнекте және функциясының орнына жалпы түрде функциясын қарастырып, шыққан нәтиженi (1)-(3) Коши теңдеулер жүйесiне қойғанда, сәйкесiнше, келесi теңдеулер жүйесi алынады

 (19)

 (20)

 (21)

Бұл (19)-(21) теңдеулер жүйесi жоғарыда атап өткендей бiртектi емес ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. Егер қарастырылып отырған сұйық бiртектi, яғни тұрақты тығыздықты  болса, онда мұндай сұйықтың қозғалысы  дербес жағдайда

 (22)

 (23)

теңдеулер жүйесiмен тұжырымдалады. Соңғы (22)-(23) теңдеулер жүйесiн интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi деп атайды. Алайда, Звягин мен Турбин [3] атап өткендей, Кельвин де, Фойгт те кернеу тензорының девиаторы мен деформация тензоры арасындағы реологиялық қатынасты немесе тұтқыр серпiмдi сұйық үшiн конститутивтiк теңдеулер жүйесiн ұсынбаған. «Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi» деген атауды ғылымға енгiзген және оны зерттеумен қарқынды түрде айналысқан, О.А. Ладыженская ғылыми мектебiнiң өкiлi әрi шәкiртi А.П. Осколков едi. Сонымен қатар, (22)-(23) теңдеулер жүйесiн ең алғаш зерттеп бастаған А.П. Осколков [4] болғандықтан, кейбiр ғалымдардың ғылыми еңбектерiнде «Осколков теңдеулер жүйесi» деген атау да кездеседi.

Математиканың cұйық механикасы саласындағы есептердi екi түрге бөлуге болады: тура және керi есептер. Тура есептер әдетте сыртқы күштер, физикалық коэффициенттер және басқа да параметрлер сияқты кейбiр деректер берiлген табиғи немесе өндiрiстiк процестердi модельдеу мәселелерi ретiнде түсiнуге болады. Керi есептер кез келген қолданбалы тура есептер секiлдi өмiрдегi практикалық қолданыстар мен қажеттiлiктерден туындайды [5–7]. Мәселен, керi есептер физикалық құбылыстарды модельдеумен қатар, физикалық процестiң белгiсiз параметрiн қалпына келтiру қажетiлiгiнен туындайды. Олар математикадағы ең маңызды iргелi есептердiң бiрi болып табылады, өйткенi ол тiкелей бақылауға қолжетiмсiз, есептеу мүмкiн емес белгiсiз параметрлер туралы мәлiметтер бередi.

Сондықтан барлық мүмкiн болатын қасиеттердi ескере отырып, ньютондық емес сұйық механикасының сызықты және сызықты емес теңдеулерi үшiн тура және керi есептердi зерттеу маңызды болып табылады. Соңғы бiр жарым ғасырда математиктердiң сұйық механикасы саласындағы негiзгi зерттеу нысаны бiртектi және бiртектi емес ньютондық сұйықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеулерi үшiн тура есептер болды және олар бойынша көптеген жұмыстар бар. Математикалық тұрғыдан алғанда, бұл тақырыптар бойынша негiзгi жұмыстар, Ж. Леренiң [8], О.А. Ладыженская [9], Т. Като [10], Р. Темам [11], Ж. Лионс [12], Седов [13], В. да Вейга және Валли [14,15], Антонцев, Кажихов және Монахов [16], Симон [17], Х. Чой, Х. Ким [18], М. Өтелбаевтың [19,20], Ш. Смағұловтың, Н. Данаевтың, Н. Темiрбековтың [21–23] және т.б. авторлардың еңбектерiн атауға болады. Дегенмен, 3D стационарлы емес және сызықты емес Навье-Стокс жүйесiнiң уақыт бойынша бiрмәндi глобальдi шешiмдiлiгi мәселесi әлi де ашық күйiнде қалып отыр [24]. Сондықтан оны Клей математика институты математиканың алтыншы мыңжылдық есебi деп жариялады. Алайда, осы күнге дейiн Навье-Стокс және басқа да сұйық механикасы теңдеулерi үшiн керi есептер жеткiлiктi түрде зерттелiнбеген. Мысалға, ньютондық сұйық механикасының керi есептерi бойынша бiрнеше мақалаларды атауға болады, мәселен, Прилепко [5], Васин [25], У.У. Әбiлқайыров пен С.Е. Айтжанов [26, 27], Дженалиев [28, 29], Фурсиков [30], Чебаторев [31], Накамура [32], Ямамото [33] және ондағы сiлтемелердегi жұмыстар. Әйтсе де, соңғы жылдары классикалық сұйық механикасының моделдерiмен сипатталмайтын ньютондық емес сұйықтың қозғалысын [3,34–37] зерттеу математика мен физикада кең тарады. Осындай сұйыққа әртүрлi полимерлiк ерiтiндiлер, қоспалар, суспензиялар, қан, битум, жер қыртысы, әлсiз концентрлi сулы полимерлi ерiтiндiлер, кремдер, майлар және басқа да осы сияқты сұйық мысал бола алады. Мұндай ньютондық емес сұйықтың негiзгi үлгiлерiнiң бiрi – серпiмдi қасиеттерi ескерiлген тұтқыр және сығылмайтын ньютондық емес сұйық, олардың бiртектi емес қозғалысы (1.22)-(1.23) Навье-Стокс-Фойгт жүйесiмен сипатталады [3, 38, 39].

Бұл бiртектi емес сұйықтың модельдерi тiптi тура есептер үшiн де математикалық тұрғыдан жеткiлiктi түрде зерттелмегенiн байқауға болады, өйткенi олар классикалық сұйық механикасы шығаратын есептерден де күрделi. Мысалға, бiртектi сұйыққа арналған еңбектер ретiнде, О.Ладыженскаяның, А.П.Осколковтың, Жиков пен Пастухованың, С.Н. Антонцев, Х.В. де Оливейра, Х. Хомпыш, В.Г. Литвинов, В.Г. Звягин, М. Турбин, В.К. Қалантаров, К.Р. Ражогопал, Н.А. Каразеева, Е.В. Юшков, E. Тити және басқаларының (мысалы, [3,38,40–50] және ондағы сiлтемелер) жұмысын атауға болады. Бiздiң бiлуiмiзше, ньютондық емес сұйық механикасы есептерiне керi есептердi зерттеу жоқтың қасы. Мәселен, жады мүшесi жоқ (серпiмдiлiк қасиетi ескерiлмеген) және тығыздығы тұрақты  жағдайлар үшiн керi есептердi соңғы жылдары Әбiлқайыровтың [51], Кумар [52], Федоров [53,54], Антонцев пен Х. Хомпыштың [55–58] жұмыстарынан және т.б. еңбектерден көруге болады.

**Зерттеу мақсаты.** Диссертациялық жұмыстың мақсаты бiртектi және бiртектi емес сұйықтың ағынын сипаттайтын сызықты және сызықты емес Кельвин – Фойгт теңдеулер жүйесi үшiн қойылған тура және керi есептердiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң глобалды немесе локалды бар болуы мен жалғыздығын теориялық тұрғыдан зерттеу.

**Зерттеу нысаны.** Бiртектi және бiртектi емес сұйықтың ағындарын сипаттайтын сызықты емес Кельвин-Фойгт теңдеулерi үшiн керi және тура есептер мен p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есептер.

**Зерттеу әдiстерi.** Диссертациялық жұмыста келесi заманауи әдiстердiң тиiмдi комбинациялары қолданылды:

-Заманауи функционалдық әдiстер: априорлық бағалаулар әдiсi, компактылық әдiсi, Соболев кеңiстiктерi теориясы, үзiлiссiз және компакттiлi енгiзу теоремалары, интерполяциялық теңсiздiктер;

- Фаэдо – Галеркин әдiсi;

- монотондылық әдiс;

- функционалдық анализдiң энергетикалық функция әдiсi;

- тура және керi есептер жалпы теориясы;

- дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердiң жалпы теориясы.

**Теориялық және практикалық құндылығы.** Керi және тура есептер табиғатта, өндiрiсте немесе түрлi тәжiрибелiк сынамаларда зерттелетiн құбылыстың, үрдiстiң қажеттi сипаттамалары тiкелей бақылауға қол жетiмсiз немесе ғылыми зерттеулердiң жобалық-құрастырмалық әзiрлемелерi қымбат болған жағдайда қолданылады. Сондықтан сызықтық және сызықтық емес теңдеулер үшiн тура және керi есептердi шешудiң тиiмдi әдiстерiн жасау, әсiресе, тұтқыр серпiмдi ньютондық және ньютондық емес сұйықтың қозғалыс параметрiн қалпына келтiруде, инженерлiк эксперименталды зерттеулердi едәуiр жеңiлдетуде және алынған нәтижелердiң дәлдiгiн арттыруда маңызды рөл атқарады.

**Ғылыми жаңалығы. Қорғауға ұсынылған негiзгi нәтижелер.** Диссертациялық жұмыста бұрын зерттелiнбеген қойылымдағы есептер қарастырылып, жаңа нәтижелер алынды және қорғауға ұсынылды:

- Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Глобалды шешiлiмдi болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмiнiң бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Арнайы интегралдық қосымша шартпен берiлген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Сызықты емес жылу көзiмен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есебiнiң әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Абсорбция мүшемен берiлген сызықты p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есебiнiң әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Бiртектi емес сұйықтықтар үшiн бастапқы тығыздығы кейбiр iшкi облыстарда вакуумге айналатын Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн бастапқы-шеттiк есебiнiң әлдi шешiмiнiң бар болуы мен жалғыздығы, регулярлығы дәлелдендi.

**Аппробация.** Диссертациялық жұмыстың нәтижелерi «Problems of modern mathematics and its Applications» конференциясында (Бiшкек, Қырғызстан, 16-19 маусым, 2021), «Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan» конференциясында (Алматы, Қазақстан, 5- 7 сәуiр, 2022 және 2023 жыл), «Functional Analysis in Interdisciplinary Applications» конференциясында (Анталия, Түркия, 2-7 қазан, 2023 жыл), әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетi механика-математика факультетi математика кафедрасының ғылыми семинарында баяндама жасалынды және талқылаудан өттi.

Диссертациядағы барлық ұсынылып отырған жаңа нәтижелер ҚР ҒжЖБ министрлiгiнiң 2020-2022 жж. (AP08052425) және 2021-2023 жж. (AP09057950) арналған «Жас ғалымдар» гранттық жобасы аясында қаржыландырылып орындалды және докторант А. Шәкiр жоба орындаушысы ретiнде қатысып келедi.

**Ғылыми ережелердiң, қорытындылар мен нәтижелердiң сенiмдiлiгi мен негiздiлiгi** белгiлi ғалымдардың бұрын алынған нәтижелерi негiзiнде жүргiзiлген зерттеу жұмысында келтiрiлген егжей-тегжейлi дәлелдемелер арқылы, индекстелетiн халықаралық журналдардағы жарияланымдармен, сондай-ақ ғылыми қызметтiң негiзгi нәтижелерiн жариялау үшiн Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары бiлiм министрлiгiнiң Бiлiм және ғылым саласындағы бақылау комитетi ұсынған жарияланымдармен расталады, сонымен бiрге конференция материалдарында расталады.

**Жарияланымдар.** Диссертациялық зерттеу жұмысының нәтижелерi бойынша 12 жұмыс жарияланды, оның iшiнде: - Clarivate Analytics Journal Citation Reports бойынша сәйкес бiрiншi, екiншi және үшiншi квартильдерге (Q1, Q2 және Q3) енгiзiлген және/немесе Scopus дерекқорында CiteScore процентилi 99, 68, 56 және 7 болатын ғылыми журналдардағы 4 мақала; –Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары бiлiм министрлiгiнiң Бiлiм және ғылым саласында сапаны қамтамасыз ету комитетi ұсынған журналдарда 3 мақала; – халықаралық конференциялардың тезистер жинағында 5 жарияланым.

**Диссертацияның құрылымы.** Диссертациялық жұмыс нормативтiк сiлтемелерден, кiрiспеден, көмекшi нәтижелерден, негiзгi төрт бөлiмнен (әр бөлiм бөлiмшелерден), қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тiзiмiнен тұрады. Диссертацияның көлемi 177 бет.

**Диссертацияның мазмұны.** Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстағы кiрiспеде зерттеу тақырыбының өзектiлiгi мен ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық құндылығы, зерттеу әдiстерi келтiрiлген, сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берiлген. Көмекшi нәтижелер бөлiмiнде диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердi тұжырымдау үшiн математикалық және функционалдық анализ курсынан, сұйық механикасы теориясынан белгiлi функционалдық кеңiстiктер мен белгiлеулер енгiзiледi, сонымен қатар қажеттi анықтамалар, леммалар, теоремалар, алгебралық және функционалдық теңсiздiктер келтiрiледi.

Бiрiншi бөлiмде сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi үшiн керi есеп қарастырылады, оның әлдi және әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденедi, дәлелдеу барысында керi есептiң шешiмдiлiгiнiң қажеттi немесе жеткiлiктi шарттары алынады. Сондай-ақ, арнайы жағдайларда әлдi және әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелiнедi.

Екiншi бөлiмде арнайы қосымша шартпен берiлген сызықты емес интегродифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi үшiн керi есеп қарастырылады, оның әлдi және әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы және жалғыздығы дәлелденедi, дәлелдеу барысында керi есептiң шешiмдiлiгiнiң қажеттi немесе жеткiлiктi шарттары алынады. Сондай-ақ, сызықты теңдеу мен оң жағы арнайы түрде болғанда әлдi және әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелiнедi.

Үшiншi бөлiмде р-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есеп қарастырылады және әлсiз шешiмiнiң бар болуы мен жалғыздығы дәлелденедi, сонымен бiрге дәлелдеу барысында керi есептiң берiлгендерi қандай шарттарды қанағаттандырады және қандай функционалдық кеңiстiкте жатады деген секiлдi сұрақтарға жауап берiледi.

Төртiншi бөлiмде бiртектi емес cұйықтың қозғалысын сипаттайтын Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi үшiн бастапқы-шеттiк есеп қарастырылады және әлдi шешiмiнiң бар болуы және жалғыздығы, регулярлығы дәлелденедi.

Қорытынды бөлiмде алынған нәтижелерге жалпылама шолу және сараптамалық талдаулар жасалынады.

Автор отандық ғылыми кеңесшiсi – физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент Х. Хомпышқа және шетелдiк ғылыми кеңесшiсi - PhD, профессор Х.В. де Оливейраға диссертациялық жұмысты орындауда құнды кеңестерi мен жан-жақты көмегi үшiн шынайы алғысын бiлдiредi.

# КӨМЕКШІ НӘТИЖЕЛЕР

Диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердi тұжырымдау үшiн келесi функционалдық кеңiстiктер қолданылады.

Айталық,  шенелген облыс болсын. Ең алдымен  Лебег кеңiстiгi деп  дәрежесiмен интегралданатын өлшемдi функциялар кеңiстiгiн атайды, яғни функциясы



шартын қанағаттандырады, мұндағы . Сонымен қатар, Лебег кеңiстiгi төменде енгiзiлген



норма бойынша Банах кеңiстiгiн құрайды. Сондай-ақ, Гильберт кеңiстiгi деп скаляр көбейтiндi анықтауға болатын ақырсыз өлшемдi Евклид кеңiстiгiн атайды. Гильберт кеңiстiгiнiң қарапайым мысалы ретiнде  жағдайда  Лебег кеңiстiгiн айтуға болады. Бұл  кеңiстiгiнде норма және скаляр көбейтiндi, сәйкесiнше





өрнектерiмен анықталады. Ал  Соболев кеңiстiгi деп реттi жалпылама туындысымен бiрге  кеңiстiгiне тиiстi өлшемдi функциялар кеңiстiгiн атайды және ол төменде енгiзiлген норма бойынша



Банах кеңiстiгiн құрайды, мұндағы  кез келген бүтiн сан, мультииндекс, мультииндекс бойынша жалпылама туынды. Егер  болса, онда  кеңiстiгi Гильберт кеңiстiгiн құрайды және оны  арқылы да белгiлейдi. Бұл кеңiстiкте скалярлық көбейтiндi келесi өрнекпен анықталады:



Ендi арқылы шексiз реттi үзiлiссiз дифференциалданатын әрi финиттi функциялар кеңiстiгiн белгiлейiк.  кеңiстiгiн  кеңiстiгiнiң нормасымен толықтыру жасасақ, онда  Банах кеңiстiгi алынады. Бұл кеңiстiкке түйiндес Банах кеңiстiгiн



арқылы белгiлейдi.

 арқылы Бохнер бойынша интегралданатын, яғни  функциясы үшiн



шарттын қанағаттандыратын өлшемдi функциялар кеңiстiгiн белгiлейдi, мұндағы  және  Банах кеңiстiгi. Сонымен қатар,  кеңiстiгi төменде енгiзiлген норма бойынша Банах кеңiстiгiн құрайды



Ендi диссертациялық жұмыста қолданылатын функционалдық тiзбектердiң әлсiз, жұлдызша әлсiз және әлдi жинақтылықтардың анықтамаларына тоқталайық.

**Анықтама 1.** (Әлдi жинақтылық) Егер ** тiзбегi мен ** элементi келесi



шектiк теңдiктi қанағаттандырса, онда  тiзбегi  элементiне әлдi жинақты деп атайды.

**Анықтама 2.** (Әлсiз жинақтылық) Егер **тiзбегi мен **элементi келесi



шектiк теңдiктi қанағаттандырса, онда  тiзбегi  элементiне әлсiз жинақты деп атайды, мұндағы   және  Банах кеңiстiктерi арасындағы екiжақтылық жақшасы.

**Ескерту 1.** Сонымен бiрге,  тiзбегiнiң  элементiне кеңiстiгiнде әлсiз жинақтылығын келесi түрде ықшамдап қайта жазуға болады

 әлсіз жинақты  

**Анықтама 3.** (**әлciз жинақтылық) Егер ** тiзбегi мен ** элементi келесi



шектiк теңдiктi қанағаттандырса, онда  тiзбегi  элементiне әлсiз (жұлдызша әлсiз) жинақты деп атайды, мұндағы  және  Банах кеңiстiктерi арасындағы екiжақтылық жақшасы.

**Ескерту 2.** Сонымен қатар,  тiзбегiнiң  элементiне  кеңiстiгiнде әлсiз жинақтылығын келесi түрде ықшамдап қайта

 әлсіз жинақты 

**Теорема 1.** Айталық, ** тiзбегi ** рефлексивтi Банах кеңiстiгiнiң нормасымен бiрқалыпты шенелген болсын. Онда  тiзбегiнен **кеңiстiгiнде  элементiне әлсiз жинақталатын ** iштiзбегiн бөлiп алуға болады, яғни

 әлсіз жинақты  

**Теорема 2.** Айталық, ** тiзбегi  сеперабель Банах кеңiстiгiнiң нормасымен бiрқалыпты шенелген болсын. Онда  тiзбегiнен кеңiстiгiнде  элементiне әлсiз жинақталатын ** iштiзбегiн бөлiп алуға болады, яғни

 әлсіз жинақты 

Сондай-ақ, диссертациялық жұмыстағы қорытынды нәтижелердi дәлелдеуде төмендегi алгебралық және функционалдық теңсiздiктер қолданылады.

**Юнг теңсiздiгi.** Кез келген  және  көрсеткiштерi үшiн



теңсiздiгi орынды, мұндағы  кез келген оң еркiн тұрақты .

**Гельдер теңсiздiгi.** Келесi  дәрежелерi және  функциялары үшiн төмендегi теңсiздiк орынды



**Минковсий теңсiздiгi.** Кез келген  функциялары үшiн



теңсiздiгi орынды, мұндағы .

**Интерполяциялық теңсiздiк.** Айталық,  және



болсын. Сонымен қатар,  болсын. Онда  функциясы үшiн келесi теңсiздiк орынды



**Интегралдық Гронуолл теңсiздiгi.** Айталық,  және  функциялары терiс емес,  аралығында үзiлiссiз функциялар болсын. Сондай-ақ,



теңсiздiгiн қанағаттандырсын, мұндағы  оң тұрақты. Онда  функциясы үшiн төмендегi бағалау орынды



**Лемма 1 (Сызықты емес Гронуолл теңсiздiгi).** Айталық, ** үзiлiссiз функциясы келесi



теңсiздiгiн қанағаттандырсын, мұндағы  және  оң тұрақтылар. Онда  функциясы үшiн



**Лемма 2.** Барлық ** және ** мәндерiнде ** және ** тәуелдi **  және ** тұрақтылары табылып, сонымен қатар барлық ** үшiн

 (24)

және

 (25)

теңсiздiктерi орынды.

**Ладыженская теңсiздiктерi.** Кез келген  функциясы үшiн келесi теңсiздiктер орынды

 (26)

 (27)

 (28)

Сұйық механикасынан белгiлi келесi функционалдық кеңiстiктердiң анықтамасын берейiк:

 (29)

тұйықталуы (30)

 тұйықталуы. (31)

**Лемма 3.** Айталық, **шенелген облыс және оның ** липщиц үзiлiссiз шекарасы болсын. Егер ** болса, онда келесi теңсiздiктер орынды

 (32)

 (33)

 (34)

Сонымен қатар, келесi үзiлiссiз енгiзулер орынды

 және 

 және 

 және 

Сондай-ақ, төмендегi компактiлi енгiзулер орынды

және 

және 

және 

Алдағы уақытта  өрнегiн қысқаша  арқылы белгiленедi, ал  жағдайда  ға тең, мұндағы .

**Лемма 4.** (Обэн-Лионс леммасы) Айталық, *, * және ** Банах кеңiстiктерi болсын. Бұл Банах кеңiстiктерi **, сәйкесiнше, компактiлi және үзiлiссiз енгiзулердi қанағаттандырса, онда келесi

 (35)

 (36)

компактiлi енгiзулерi орынды.

Сондай-ақ, 3-леммада келтiрiлген Соболев теңсiздiктерiмен қоса келесi пайдалы теңсiздiктер қолданылады.

**Лемма 5.** Айталық, ** облысы ** шенелген облыс және ** болсын. Егер **шекарасы ** класының элементi болса, онда **функциясы үшiн келесi теңсiздiктер орынды

 (37)

 (38)

Егер  шекарасы  класының элементi болса, онда  функциясы үшiн келесi теңсiздiктер орынды

 (39)

 (40)

Мұндағы келесi өрнекпен анықталады



дербес жағдайда, және . Айта кету керек, соңғы лемманың тармақтарында қолданылған  белгiлеулерi әр түрлi оң константалар болып есептелiнедi.

Диссертациялық жұмыста қарастырылатын тура есепте қысымды қалпына келтiруге маңызды рөлге ие келесi де Рамм леммасын тоқталайық.

**Лемма 6.** Айталық, ** және ** болсын. Егер



болса, онда

және 

шарттарын қанағаттандыратын жалғыз түрде  табылады. Сонымен қоса,  оң тұрақтысы үшiн келесi бағалау орынды



Мұнымен қоса, регуляр нәтижелер үшiн қажеттi Стокс операторының анықтамасын келтiрейiк. Келесi

 (41)

шарттарын қанағаттандыратын  бейнелеуi Стокс операторы деп аталады, мұндағы  Лере проекциясы. Бұл оператор

 (42)

 (43)

 (44)

стационарлық Стокс есебiнiң  шешiмi мен  сыртқы күштер арасындағы сәйкестiктi орнатады. Лере проекциясының симметриялығынан келесi өрнек тұжырымдалады

 (45)

Эллиптикалық операторлар теориясынан белгiлi келесi нәтиженi келтiрейiк.

**Лемма 7.** Айталық, **шенелген облыс және оның ** шекарасы болсын, сонымен қатар ** бетi ** класына тиiстi болсын. ** болса, онда (42)-(43) Стокс есебiн **да барлық дерлiк нүктеде қанағаттандыратын, сонымен қатар ** және ** қасиеттерге ие жалғыз ** шешiмi табылады және әрi келесi бағалауды

 (46)

қанағаттандырады, мұндағы  оң тұрақты сан. Сондай-ақ,  функциясы үшiн (44) шарт орынды.

(46) өрнектен келесi бағалауды алуға болады

 (47)

(41) Стокс операторы мен  күш өрiсi арасындағы сәйкестiктi пайдаланып, (47) өрнекте жағдайында, төмендегi бағалау алынады

 (48)

# 1 ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН КЕРI ЕСЕПТЕР

Бұл бөлiмде интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесi үшiн қойылған керi есеп қарастырылады. Қарастырылып отырған керi есептiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы зерттелiнедi.

## **1.1 Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп**

### **1.1.1 Есептiң қойылымы**

Айталық,  шенелген облыс және оның  жатық шекарасы болсын.  бүйiр бетiмен анықталған цилиндрiнде  функциялар үштiгiн анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпiмдi сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

 (1.1)

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесiн,

 (1.2)

сығылмайтын сұйықтық теңдеуiн,

 (1.3)

бастапқы шартын,

 (1.4)

сырғанау шекаралық шартын және

 (1.5)

қосымша шартты қанағаттандыратын керi есептi қарастырайық, мұндағы сұйықтың жылдамдығы мен сұйықтың қысымы, ал  және  оң сандары, сәйкесiнше, сұйықтың кинематикалық тұтқырлық және релаксациясының коэффициенттерi,  вектор функциясы сыртқы күштердiң тығыздығын, ал  сыртқы күштердiң интенсивтiлiгiн сипаттайды. Сондай-ақ, , , , ,  белгiлi функциялар.

Ғылыми әдебиеттерде (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесiн интегродифференциалдық Кельвин-Фойгт [4] теңдеулер жүйесi кейде Осколков теңдеулер жүйесi [42] деп те атайды. Физикалық жағынан мұндай теңдеулер жүйесi сығылмайтын тұтқыр ньютондық емес сұйықтың ағынын сипаттайды. (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесiнiң толыққанды физикалық негiздемесiн және математикалық моделiн [1, 3, 4, 34, 59] жұмыстардан көруге болады.

Сондай-ақ, (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесiнде сыртқы күштердiң тығыздығы  шамасы белгiлi болғанда тура есеп деп аталады және олар көптеген авторлардың жұмысында қарастырылған [3, 42, 46].

Тек  бастапқы жылдамдық пен  сыртқы күштердiң шамалары белгiлi болғанда ғана iзденуге рұқсат етiлетiн тура есептердi теориялық тұрғыдан зерттеу маңызды болып табылады. Алайда, математикалық моделдiң жалпы үдерiсi белгiлi болып, бiрақ физикалық үдерiс жердiң астында, жоғары температуралы ортада болып жатқанда, немесе физикалық үдерiсте параметрдi тiкелей өлшеу мүмкiн емес болғанда, немесе нақты бiр параметрi белгiсiз (мысалы,  сыртқы күштердiң интенсивтiлiгi) болғанда керi есептердiң [5] маңызды екенiн аңғаруға болады.

Кеңiстiктiк айнымалыдан тәуелдi  функциясын қалпына келтiруге арналған оң жағы  түрiндегi сызықты (конвективтi мүшесi жоқ) (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесi үшiн



қосымша шарттарды қанағаттандыратын керi есеп  жағдайда [60] жұмыста, ал  жағдайда [51] жұмыста қарастырылды. Жылдамдық векторымен бiрге  өзегiн анықтауға арналған (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесi үшiн (1.5) қосымша шартпен қойылған керi есеп [52] жұмыста қарастырылған. Осы секiлдi әртүрлi Кельвин-Фойгт теңдеулерi үшiн керi есептер [51, 52, 54, 55, 60, 61] жұмыстарда зерттелiндi.

Егер (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесiнде  және  болса, онда классикалық Навье-Стокс жүйесi шығады. Навье-Стокс және оған қатысты гидродинамиканың теңдеулер жүйесi үшiн керi есептер [5, 26, 27, 31, 32, 62–64] жұмыстарда қарастырылды.

**Анықтама 1.1.** (1.1)-(1.5) керi есебiнiң әлсiз шешiмi деп

1.  , ;

2. да барлық дерлiк жерде бастапқы шартты;

3. Кез келген  және барлық  үшiн төмендегi интегралдық тепе-теңдiктi

 (1.6)

қанағаттандыратын функциялар жұбын атайды.

**Анықтама 1.2.** (1.1)-(1.5) керi есебiнiң әлдi шешiмi деп

1. 

2. әрбiр теңдеудi сәйкес облыстарда барлық дерлiк жерде қанағаттандыратын функциялар жұбын атайды.

**Ескерту 1.2.** Әдеттегiдей, әлсiз шешiмiнiң анықтамасында ** қысым туралы мағлұмат келтiрiлмеген. Оны [65] мақаладағыдай ** және ** функциялары белгiлi болғаннан кейiн 6-лемманы қолданып, (1.2) теңдеуден бiрмәндi қалпына келтiруге болады.

**Керi есептi эквиваленттi локалды емес тура есепке келтiру**

Айталық, есептердiң берiлгендерi келесi шарттарды қанағаттандырсын дейiк.

 (1.7)

 (1.8)

 (1.9)

 (1.10)

 (1.11)

 (1.12)

Ендi (1.1) теңдеудi  функциясына көбейтiп және  облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнектi бөлiктеп интегралдап, сондай-ақ (1.5) қосымша және (1.8) шартты қолдансақ, онда функциясы келесi түрде анықталады

 (1.13)

Мұнан соң, (1.13) өрнектi (1.1) теңдеуге қойсақ, онда белгiсiз  және  функцияларын табуға арналған

 (1.14)

теңдеулер жүйесiн, (1.3) бастапқы және (1.4) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын локалды емес тура есеп алынады, мұндағы функциясы (1.13) өрнекпен анықталады. Демек, (1.1)-(1.5) керi есебiн, сәйкесiнше, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есепке алып келдiк.

Керi есеп пен локалды емес тура есептiң эквиваленттiлiгi жөнiнде келесi лемма орынды.

**Лемма 1.1.** Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Демек, (1.1)-(1.5) керi есебi (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiне эквиваленттi, яғни **функциялары (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмi болса, онда ** жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болып табылады және керiсiнше, ** функциялары (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болса, онда ол (1.13) өрнекпен анықталған **функциясымен бiрге (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмiн бередi.

**Ескерту 1.2.** (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмiнiң анықтамасы 1.1 және 1.2-анықтамаға ұқсас түрде берiледi.

**Дәлелдеуi.** Шын мәнiнде, лемманың дәлелдеуiнiң бiрiншi бөлiгi (1.1)-(1.2) теңдеулер жүйесiнен (1.14) теңдеудi алуда дәлелдендi.

Ендi екiншi бөлiгiн дәлелдейiк. Айталық, ** функциялар жұбы (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болсын. Екiншi жағынан, ** функциялар жұбы (2.13) өрнегiмен анықталған ** функциясымен бiрге (1.1)-(1.4) өрнектердi қанағаттандырады. Олай болса, ** функциялары (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмi екенiн дәлелдеу үшiн (1.5) қосымша шарттың орынды екенiн көрсету жеткiлiктi.

Керi жорып, яғни (1.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық, яғни

 (1.15)

болсын, мұндағы  үшiн . Шешiмнiң анықтамасы мен (1.10), (1.15) шарттардан  орындалады, сонымен қатар (1.11) үйлесiмдiлiк шарттарынан төмендегi нәтиже қорытылады



Ендi (1.14) өрнекке  функциясын көбейтiп және бөлiктеп интегралдау өрнегiн қолданып, сонымен бiрге (1.15) шартты ескерсек, онда

 (1.16)

теңдiгi шығады, сондай-ақ (1.8) шарттан  функциясы үшiн келесi Коши есебi алынады

 (1.17)

және одан үшiн  тұжырымдалады.

### **1.1.2 Керi есептiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы**

Алдағы уақытта 1.1-лемма бойынша (1.1)-(1.5) керi есебiнiң орнына (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмдiлiгi зерттелiнедi.

**Теорема 1.1.** Айталық, (1.7)-(1.12) шарттар орындалсын және қандай да бiр ** оң саны табылып келесi шарт орындалсын

 (1.18)

Онда ақырлы  уақыты табылып, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң  цилиндрiнде кемiнде бiр әлсiз шешiмi табылады, мұндағы  мәнi төменде (1.35) өрнекпен анықталады. Сондай-ақ, әлсiз шешiм келесi априорлық бағалауды қанағаттандырады

 (1.19)

мұндағы  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi тұрақты.

**Ескерту 1.3.** 1.1-теоремадағы (1.18) шарт (1.5) қосымша шартқа қатысты бағалаулар алу кезiнде пайда болды.

**Дәлелдеуi.** Теореманы дәлелдеу үшiн Фаэдо-Галеркин әдiсi қолданылады: ең алдымен жуық шешiмдер құрылып, оған бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденедi.

**Галеркиндiк жуықтау.** Айталық,  функциялары  кеңiстiгiнiң элементтерiнен құралған,  кеңiстiгiнде ортогональ және сызықтық комбинациялары  кеңiстiгiнде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемi ге () тең және  ,  жүйесiнiң сызықтық комбинациясынан тұратын  кеңiстiгiн қарастырайық. Кез келген  үшiн (1.1)-(1.4), (1.13) есептiң жуық шешiмi келесi түрде iзделiнедi

 (1.20)

мұндағы , коэффициенттерi белгiсiз және төмендегi жай дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесiнiң шешiмi болып табылады

 (1.22)

мұндағы  және

 (1.23)

Ендi (1.21) ЖДТ жүйесiн келесi бастапқы шарттармен толықтырайық

 (1.24)

мұндағы



функциясы  кеңiстiгiндегi функционалдық тiзбек болып табылады және

әлді жинақты  (1.25)

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (1.21)-(1.23) Коши есебiнiң аралығында  шешiмi локалды бар болады. Төменде, априорлық бағалаулар арқылы Коши есебiнiң шешiмiн  кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

**Априорлық бағалаулар.** (1.21) жүйесiнiң теңдеуiн  және  көбейтiп,  бойынша 1-ден ге шейiн қосындыласақ, сәйкесiнше, келесi теңдiктер алынады

 (1.25)

 (1.26)

Жоғарыдағы (2.25) және (2.26) теңдiктердi бiрiктерсек, онда

 (1.27)

өрнегi алынады. Соңғы (1.27) өрнектiң оң жағына Гельдер және Юнг теңсiздiктерiн қолданып келесiдей бағалайық

 (1.28)

 (1.29)

 (1.30)

 (1.31)

 (1.32)

Осылайша, алынған (1.28)-(1.32) теңсiздiктердi (1.27) өрнектiң оң жағына қойғанда келесi дифференциалдық теңсiздiк шығады

 (1.33)

мұндағы





Ендi  таңдасақ және дiң сәйкес мәнi үшiн  теңсiздiгiнiң жоғарғы шекарасын нен ге дейiн кеңейтуге болады. Алайда,  саны болатындай таңдалмауы керек, себебi  болғандығынан .

(1.33) өрнектi s бойынша ден ға шейiн интегралдап, (1.24) өрнектi қолдансақ, келесi интегралдық теңсiздiкке келемiз

 (1.34)

мұндағы





Әрi қарай  функциясы үшiн 1-леммадағы сызықтық емес Гронуолл теңсiздiгiн қолданғанда (1.34) өрнектен

 (1.35)

уақыт аралығы үшiн келесi бағалау орынды

 (1.36)

Демек, кез келген үшiн (1.36) өрнектен келесi бағалау орынды екенiн көруге болады

 (1.37)

(1.37) бағалауды (1.34) өрнектiң оң жағына қолданып және бойынша супремум алғанда келесi априорлық бағалау тұжырымдалады

 (1.38)

**Шектiк көшу.** Жоғарыдағы (1.20) өрнекпен анықталған  жуық шешiмi (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандырады. Бұдан  тiзбегiнiң iштiзбегi табылып, ол келесi әлсiз және әлсiз жинақтылықтардың орынды екенiн көруге болады. Ескерер жәйт, шектiк көшудi дәлелдеуде ыңғайлылық үшiн  iштiзбегiн  арқылы белгiлеуi қолданылады.

әлсiз жинақты  (1.39)

 әлсiз жинақты  (1.40)  әлсiз жинақты  (1.41)

Сонымен қатар, (1.19) априорлық бағалаудан келесi тұжырымдар орынды

тізбегі  бірқалыпты шенелген (1.42)

 тізбегі  бірқалыпты шенелген (1.43)

Сонымен бiрге, компактiлi енгiзуi және Обэн-Лионс леммасы бойынша келесi әлдi жинақтылық шығады

 әлді жинақты  (1.44)

Айталық,  болсын. (1.21) өрнектi  функцияға көбейтiп,  мен  аралығында интегралдасақ, онда төмендегi өрнек орынды

 (1.45)

Сондай-ақ, ны бекiтiп және (1.39)-(1.44) нәтижелердi қолданып, (1.45) өрнектен  шекке көшсек, онда төмендегi өрнек тұжырымдалады

 (1.46)

Соңғы теңдiктегi конвективтi мүше үшiн келесi шектiк көшудi орынды

 әлсiз жинақты  (1.47)

Шын мәнiнде, (1.47) өрнектi интеграл арқылы жазсақ, онда төмендегi түрде болады



бұл өрнекке Гелдер теңсiздiгiн (1.19) мен (1.44) өрнектерiмен бiрге қолданғанда оң жағындағы бiрiншi интегралдың мәнi нөлге жинақтылатынын аңғаруға болады



Ал, (1.39) өрнектiң және  әсерiнен екiншi интеграл нөлге барады. Аналогты түрде локалды емес мүше үшiн де келесi шектiк көшу орынды



Соңғы өрнекте екiншi мүше (1.41) өрнектiң, үшiншi мүше (1.39) өрнектiң, бесiншi мүше (1.40) өрнектiң әсерiнен жинақты. Сондай-ақ, бiрiншi мүше тривиалды түрде, ал төртiншi мүше (1.47) өрнектiң әсерiнен жинақты. (1.46) теңдеу сызықты болғандықтан кез келген  функцияларының ақырлы сызықтық комбинациясы мен  шартын қанағаттандыратын  функциясы үшiн де орынды болып қалады. Мұнымен қоса, (1.46) өрнектегi  аралығындағы интеграл астындағы барлық қосылғыштар  айнымалысы бойынша үзiлiссiз функция болып табылады. Демек, барлық дерлiк  және  үшiн келесi интегралдық теңдiк алынды

 (1.48)

1.1-теореманың дәлелдеуi аяқталды.

Бұл бөлiмшеде қарастырылып отырған керi есептiң әлдi шешiмiнiң бар болуы зерттелiнедi.

### **1.1.3 Керi есептiң әлдi шешiмiнiң бар болуы**

**Теорема 1.2.** Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Мұнымен қоса, бастапқы функция үшiн келесi шартты орынды болсын

 (1.49)

Олай болса, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есебiнiң  цилиндрiнде кемiнде бiр әлдi шешiмi бар болады. Сонымен қатар, (1.1)-(1.5) керi есебiнiң де кемiнде бiр әлдi шешiмi бар болады және ол (1.19) бағалауға қоса

 (1.50)

бағалау орынды болады, мұндағы  мәнi (1.35) өрнектен белгiлi және  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi тұрақты.

**Дәлелдеуi.** Әлдi шешiмнiң бар болуын дәлелдеу үшiн арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (1.14), (1.3)-(1.4) локалды емес тура есеп үшiн

 (1.51)

түрiнде Стокс операторы үшiн қойылған спектралды есептiң меншiктi функциялары қолданылады, мұндағы  Лере проекциясы. Сондай-ақ,  жүйесi  кеңiстiгiнде ортогональ және кеңiстiгiнде ортонормаланған жүйенi құрайды [66], [67].

Олай болса, әлсiз шешiм үшiн алынған барлық априорлық бағалаулар әлдi шешiмге де орынды. 1.2-теореманы толық дәлелдеу үшiн  мен ға априорлық бағалаулар алсақ жеткiлiктi.

Сөйтiп, (1.21) өрнектi ға көбейтiп,  бойынша ден ге шейiн қосындыласақ, онда келесi өрнек шығады

 (1.52)

мұндағы  функциясы (1.22) өрнегiмен анықталады және төмендегi бағалауды қанағаттандырады

 (1.53)

Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiн және (1.53) бағалауды бiрге қолданып, тi бағалайық

 (1.54)

(1.54) бағалауды (1.52) теңдiкке ескергенде, келесi теңсiздiк қорытылады

 (1.55)

Ендi (1.55) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және әлсiз шешiм үшiн алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегi интегралдық теңсiздiк алынады

 (1.56)

мұндағы





Мұнан кейiн, (1.56) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

 (1.57)

бағалауы қорытылады. Егер (1.56) өрнектiң екi жағынан  бойынша супремум алып және (1.57) бағалауды қолдансақ, онда төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (1.58)

### **1.1.4 Шешiмнiң жалғыздығы**

**Теорема 1.3.** Айталық, 1.1-теореманың шарттары орындалсын. Сонымен қатар, ** мен ** функциялары (1.1)-(1.4), (1.13) есебiнiң бiрдей берiлгендерi үшiн ** мен ** әлсiз (әлдi) шешiмi болсын. Онда барлық ** үшiн (1.1)-(1.4), (1.13) есебiнiң әлсiз (әлдi) шешiмі жалғыз болады, яғни **, мұндағы **әлсiз (әлдi) шешiмнiң бар болуының максималды уақыты.

**Дәлелдеуi.** ** және ** үшiн (1.14) теңдеудi жазып және оларды бiр-бiрiн азайтып, шыққан нәтиженi сәйкесiнше  және  функцияларына  кеңiстiгiнде скаляр көбейткенде, сәйкес келесi өрнектер алынады

 (1.59)

 (1.60)

Соңғы алынған теңдiктердi қоссақ, онда төмендегi нәтиже шығады

(1.61)

Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiнiң көмегiмен (1.59) өрнектiң оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

 (1.62)

 (1.63)

 (1.64)

 (1.65)

 (1.66)

 (1.67)

 (1.68)

Алынған (1.62)-(1.68) бағалауларды (1.61) өрнекке қойғанда, келесi дифференциалдық теңсiздiк алынады

 (1.69)

мұндағы









Ендi  функциялары және әлсiз шешiм үшiн алынған бағалауларда  шарты кезiндегi  сәйкес мәнiн де  коэффициенттерi оң және ақырлы болып табылады. Олай болса, (1.69) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдасақ, онда келесi теңсiздiк қорытылады

 (1.70)

мұндағы



1.3-теореманың шарты мен Гронуолл леммасы бойынша (1.70) өрнектен  үшiн тұжырымдалады, яғни .

## **1.2 Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп**

Бұл параграфта (1.1)-(1.5) керi есебiнiң дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесiнде конвективтi мүшесi болмағанда әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденедi. Сондай-ақ, (1.19) өрнектегi априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды екенiн дәлелдеудiң негiзгi қиындығы  функциясының (1.14) және (1.13) өрнектер бойынша анықтамасында  сызықты емес конвективтi мүшенiң отыруы. Жоғарыда қарастырылған керi есептiң сызықты жағдайда глобалды шешiмдiлiгi [68,69] жұмыстарда зерттелiндi. Алайда, қарастырылып отырған керi есептердiң глобалды шешiмдiлiгi есептiң берiлгендерiне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Сызықты Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептi қарастырайық

 (1.71)

 (1.72)

 (1.73)

 (1.74)

 (1.75)

Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орынды болсын. Онда (1.71)-(2.75) керi есебiне эквиваленттi  функциясын табуға арналған тура есебi (1.73) бастапқы және (1.74) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

 (1.76)

теңдеудi қанағаттандырады, мұндағы  функционалы

 (1.77)

өрнекпен анықталады.

**Лемма 1.2.** Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1.71)- (1.75) керi есебi (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiне эквиваленттi.

**Дәлелдеуi.** Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секiлдi дәлелденедi.

Ендi (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiнiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 1.4.** Айталық, (1.7)-(1.12) және (1.18) шарттар орындалсын. Онда ** цилиндрiнде (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiнiң ** әлсiз шешiмi бар болады әрi жалғыз және барлық ** үшiн (1.19) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Соңғы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмдiлiгi секiлдi (1.71)-(1.75) керi есебi үшiн де дәлелденедi. Нақтырақ айтқанда, (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiнiң әлсiз шешiмi барлық  үшiн (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Ал дәлелдеу алгоритмi 1.1-теореманың дәлелдеуi секiлдi жүргiзiледi. Демек, конвективтi мүше болмаған жағдайда (1.25) және (1.26) өрнектерiн ескерiп және оларды бiрiктiрсек, онда

 (1.78)

теңдiгi алынады, мұндағы функционалы (1.77) өрнекпен анықталған және

. (1.79)

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.78) теңдiктiң оң жағын бағалау үшiн бiрiншi және екiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (1.28) және (1.29) бағалауларды қолданып, ал үшiншi және төртiншi қосылғыштарын, сәйкесiнше, (1.30) және (1.31) бағалауларын негiзге ала отырып (1.79) өрнектi бiрге ескерiп бағалағанда



функциясы үшiн келесi дифференциалдық теңсiздiк шығады

 (1.80)

мұндағы





Ендi  таңдасақ және дiң сәйкес мәнi үшiн  теңсiздiгiнiң жоғарғы шекарасын нен ге дейiн кеңейтуге болады. Алайда,  саны  болатындай таңдалмауы керек, себебi  болғандығынан .

Ендi (1.80) өрнектi s бойынша ден ға шейiн интегралдап, (1.24) өрнектi қолдансақ, келесi интегралдық теңсiздiк шығады

 (1.81)

мұндағы



Сөйтiп, (1.81) өрнектiң сол жағындағы екiншi, үшiншi және төртiншi қосылғыштарды ескермей сызықты Гронуолл теңсiздiгiн қолданғанда

 (1.82)

бағалауы тұжырымдалады.

Егер (1.82) бағалауды (1.81) өрнектiң оң жағына ескерiп, сондай-ақ, екi жағынан  бойынша супремум алсақ, онда келесi әлсiз шешiм үшiн априорлық бағалау қорытылады

 (1.83)

**Теорема 1.5.** Айталық, 1.4-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық ** үшiн (1.50) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Бұл теорема дәлелдеу үшiн (1.76), (1.73), (1.74) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық ** үшiн (1.50) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Дәлелдеу алгоритмi 1.2-теореманың дәлелдеуiне ұқсас түрде жүргiзiледi.

Демек, (1.52) өрнегiне аналогты энергетикалық теңдiк келесi түрде болады

 (1.84)

Ендi (1.84) оң жағын бағалау үшiн Гельдер және Юнг теңсiздiктерiн (1.79) өрнекпен бiрге қолданғанда

. (1.85)

Cөйтiп, (1.85) өрнектi s бойынша ден ға шейiн интегралдап және әлсiз шешiм үшiн алынған априорлық бағалауларды ескерсек, онда төмендегi интегралдық теңсiздiк алынады

 (1.86)

мұндағы



Демек, (1.86) өрнекке Гронуолл теңсiздiгiн ескерсек, онда келесi бағалау алынады

 (1.87)

Егер (1.86) өрнектiң екi жағынан  бойынша супремум алып және (1.87) бағалауды қолдансақ, онда төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (1.88)

(1.71)-(1.75) керi есебiнiң жалғыздығы туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 1.6.** Айталық, 1.4-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.71)-(1.74), (1.77) есебiнiң әлсiз шешiмi жалғыз болады.

**Дәлелдеуi.** Бұл тұжырымның дәлелдеуi 1.3-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде тұжырымдалады, сондықтан дәлелдеусiз қалдырдық.

## **1.3 Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп**

Бұл параграфта (1.1)-(1.5) керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы есептiң берiлгендерiне қойылған (1.18) шарттың көмегiнсiз тұжырымдалады. Ол тек (1.1) теңдеулер жүйесiнiң оң жағын арнайы түрде деп жеке жағдайын қарастырғанда ғана (1.18) шарттан құтылуға болады. Оң жағы арнайы түрдегi сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептi қарастырайық

 (1.89)

 (1.90)

 (1.91)

 (1.92)

 (1.93)

Айталық, (1.9), (1.10) және

 (1.94)

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (1.89)-(1.93) керi есебiне эквиваленттi  функциясын табуға арналған тура есеп келесi түрде болады, яғни (1.91) бастапқы және (1.92) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

 (1.95)

теңдеудi қанағаттандырады, мұндағы  функционалы

 (1.96)

өрнегiмен анықталады және  тұрақты.

**Лемма 1.3.** Айталық, (1.8)-(1.11) шарттар орындалсын. Онда (1.89)-(1.93) керi есебi (1.95), (1.91), (1.92) тура есебiне эквиваленттi.

**Дәлелдеуi.** Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секiлдi дәлелденедi.

Ендi (1.95), (1.91), (1.92) тура есебiнiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 1.7.** Айталық, (1.7), (1.11)-(1.12) және (1.94) шарттар орындалсын. Онда ақырлы ** уақыты табылып, (1.76), (1.73), (1.74) локалды емес тура есебiнiң ** цилиндрiнде кемiнде бiр әлсiз шешiмi табылады және барлық ** үшiн (1.19) бағалауды қанағаттандырады, мұндағы ** мәнi төменде (1.104) өрнекпен анықталады.

**Дәлелдеуi.** Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмдiлiгi секiлдi (1.89)-(1.93) керi есебi үшiн де дәлелденедi. Нақтырақ айтқанда, (1.95), (1.91), (1.92) тура есебiнiң әлсiз шешiмi барлық  үшiн (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Ал дәлелдеу алгоритмi 1.1-теореманың дәлелдеуi секiлдi жүргiзiледi.

Демек, (1.25) және (1.26) өрнектерiне аналогты энергетикалық теңдiктерге алып және оларды бiрiктiрсек, онда

 (1.97)

теңдiгi алынады, мұндағы  функционалы (1.96) өрнекпен анықталған және

 (1.98)

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.97) теңдiктiң оң жағын бағалау үшiн ең алдымен, үшiншi және төртiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (1.30) және (1.31) бағалауларды (1.98) өрнекпен бiрге пайдаланып бағаласақ, онда келесi

 (1.99)

 (1.100)

теңсiздiктер қорытылады, сондай-ақ, жағдайда бiрiншi, екiншi және бесiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (1.28), (1.29) және (1.32) бағалауларды ескерсек, онда



функциясы үшiн келесi дифференциалдық теңсiздiк шығады

 (1.101)

мұндағы



.

Ендi (1.101) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап, (1.24) өрнектi ескерсек, онда

 (1.102)

мұндағы



Әрi қарай  функциясы үшiн 1.1-леммадағы сызықтық емес Гронуолл теңсiздiгiн қолданғанда, онда (1.101) өрнектен келесi бағалау қорытылады

 (1.103)

және төмендегi уақыт аралығы үшiн орынды

 (1.104)

Демек, кез келген  үшiн (1.103) өрнектен келесi бағалау орынды екенiн көруге болады

 (1.105)

(1.37) бағалауды (1.101) өрнектiң оң жағына қолданып және  бойынша супремум алғанда, келесi априорлық бағалау тұжырымдалады

 (1.106)

**Теорема 1.8.** Айталық, 1.7-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.95), (1.91), (1.92) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық  үшiн (1.50) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Демек, (1.52) өрнегiне аналогты энергетикалық теңдiк келесi түрде болады

 (1.107)

Соңғы өрнектiң оң жағын бағалау үшiн Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiн және (1.98) бағалауды бiрге қолданайық, демек,

 (1.108)

(1.108) бағалауды (1.107) теңдiкке ескергенде, келесi теңсiздiк қорытылады

 (1.109)

Ендi (1.109) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және әлсiз шешiм үшiн алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегi интегралдық теңсiздiк алынады

 (1.110)

мұндағы





Мұнан кейiн, (1.110) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

 (1.111)

бағалауы қорытылады. Егер (1.110) өрнектiң екi жағынан  бойынша супремум алып және (1.111) бағалауды қолдансақ, онда төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (1.112)

**Теорема 1.9.** Айталық, 1.7-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.89)-(1.92), (1.96) есебiнiң әлсiз шешiмi жалғыз болады.

**Дәлелдеуi.** Бұл тұжырымның дәлелдеуi 1.3-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде тұжырымдалады.

## **1.4. Глобалды шешiлiмдi болатын интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есеп**

Бұл тармақта (1.1)-(1.5) керi есебiнiң дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесiнде конвективтi мүшесi болмағанда және оң жағын арнайы түрде таңдағанда әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденедi. Берiлген теңдеулер жүйесiнде оң жағын болғанда (1.18) шарттан құтылуға мүмкiндiк бередi. Сонымен қатар, (1.1) теңдеудiң сызықты жағдайын қарастыру (1.18) өрнектегi априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды орынды екенiн дәлелдеуге мүмкiндiк бередi. Жоғарыда қарастырылған отырған керi есептiң сызықты жағдайда глобалды шешiмдiлiгi [68,69] жұмыстарда зерттелiндi. Алайда, қарастырылып отырған керi есептердiң глобалды шешiмдiлiгi есептiң берiлгендерiне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Демек, сызықты әрi оң жағы арнайы түрдегi Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептi қарастырайық

 (1.113)

 (1.114)

 (1.115)

 (1.116)

 (1.117)

Айталық, (1.8), (1.10), (1.94) шарттар орындалсын. Сөйтiп, қарастырылып отырған (1.113)-(1.117) керi есебiне эквиваленттi ** функциясын табуға арналған тура есеп келесi түрде болады, яғни (1.115) бастапқы және (1.116) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

 (1.118)

теңдеудi қанағаттандырады, мұндағы функционалы

 (1.119)

өрнегiмен анықталады және  тұрақты.

**Лемма 1.4.** Айталық, (1.8), (1.10)-(1.11) және (1.94) шарттар орындалсын. Онда (1.113)-(1.117) керi есебi (1.118), (1.115), (1.116) тура есебiне эквиваленттi.

**Дәлелдеуi.** Бұл лемма аналогты түрде 1.1-лемма секiлдi дәлелденедi.

Ендi (1.118), (1.115), (1.116) тура есебiнiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 1.10.** Айталық, (1.7), (1.10)-(1.12) шарттар орындалсын. Онда ** цилиндрiнде (1.118), (1.115), (1.116) тура есебiнiң ** әлсiз шешiмi бар болады және барлық ** үшiн (1.19) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Соңғы тұжырым аналогты түрде (1.1)-(1.5) керi есебiнiң шешiмдiлiгi секiлдi (1.113)-(1.117) керi есебi үшiн де дәлелденедi. Нақтырақ айтқанда, (1.118), (1.115), (1.116) тура есебiнiң әлсiз шешiмi барлық ** үшiн (1.19) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Ал дәлелдеу алгоритмi 1.1-теореманың дәлелдеуi секiлдi жүргiзiледi.

Демек, (1.25) және (1.26) өрнектерiне аналогты энергетикалық теңдiктерді алып және оларды бiрiктiрсек, онда

 (1.120)

теңдiгi алынады, мұндағы функционалы (1.119) өрнекпен анықталған және

 (1.121)

бағалауын қанағаттандырады.

Соңғы (1.120) теңдiктiң оң жағын бағалау үшiн ең алдымен, үшiншi және төртiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (1.30) және (1.31) бағалауларды (1.121) өрнекпен бiрге пайдаланып бағаласақ, онда келесi

 (1.122) (1.123)

теңсiздiктер қорытылады, сондай-ақ,  жағдайда бiрiншi және екiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (1.28) және (1.29) бағалауларды ескерсек, онда



функциясы үшiн келесi дифференциалдық теңсiздiк шығады

 (1.124)

мұндағы



.

Ендi (1.124) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап, (1.24) өрнектi ескерсек, онда

 (1.125)

мұндағы



Сөйтiп, (1.125) өрнектiң сол жағындағы екiншi, үшiншi және төртiншi қосылғыштарды ескермей сызықты Гронуолл теңсiздiгiн қолданғанда

 (1.126)

бағалауы тұжырымдалады.

Егер (1.126) бағалауды (1.125) өрнектiң оң жағына ескерiп, сондай-ақ, екi жағынан бойынша супремум алсақ, онда келесi әлсiз шешiм үшiн априорлық бағалау қорытылады

 (1.127)

**Теорема 1.11.** Айталық, 1.10-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (1.49) шарт орынды болсын. Онда (1.118), (1.115), (1.116) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық  үшiн (1.50) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Демек, (1.52) өрнегiне аналогты энергетикалық теңдiк келесi түрде болады

 (1.128)

Соңғы өрнектiң оң жағын бағалау үшiн Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiн және (1.121) бағалауды бiрге қолданайық, демек,

 (1.129)

(1.129) бағалауды (1.128) теңдiкке ескергенде, келесi теңсiздiк қорытылады

 (1.130)

Ендi (1.130) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және әлсiз шешiм үшiн алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегi интегралдық теңсiздiк алынады

 (1.131)

мұндағы





Мұнан кейiн, (1.131) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

 (1.132)

бағалауы қорытылады. Егер (1.131) өрнектiң екi жағынан  бойынша супремум алып және (1.132) бағалауды қолдансақ, онда төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (1.133)

**Теорема 1.12.** Айталық, 1.10-теореманың шарттары орындалсын. Онда (1.113)-(1.116), (1.119) есебiнiң әлсiз шешiмi жалғыз болады.

**Дәлелдеуi.** Бұл тұжырымның дәлелдеуi 1.3-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде тұжырымдалады.

# 2 АРНАЙЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ҚОСЫМША ШАРТПЕН ҚОЙЫЛҒАН СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ИНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦИАЛДЫҚ КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН КЕРI ЕСЕПТЕР

Бұл бөлiмде арнайы қосымша шартпен қойылған сызықты емес интегродиференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептердiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы зерттелiнедi.

**Есептiң қойылымы.** Айталық,  шенелген облыс және оның  жатық шекарасы болсын.  бүйiр бетiмен анықталған  цилиндрiнде  функциялар үштiгiн анықтауға арналған, сығылмайтын тұтқыр серпiмдi сұйықтықтардың ағынын сипаттайтын

 (2.1)

интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесiн,

 (2.2)

сығылмайтын сұйықтық теңдеуiн,

 (2.3)

бастапқы шартын,

 (2.4)

сырғанау шекаралық шартын және

 (2.5)

қосымша шартты қанағаттандыратын керi есептi қарастырайық, мұндағы сұйықтықтың жылдамдығы мен сұйықтықтың қысымы болып табылады, ал  және  оң коэффициенттерi, сәйкесiнше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы және релаксациясын,  вектор функциясындағы  сыртқы күштердiң интенсивтiлiгiн сипаттайды. Сондай-ақ, , , , ,  белгiлi функциялар.

**Анықтама 2.1.** (2.1)-(2.5) керi есебiнiң әлсiз шешiмi деп

1.  , ;

2. да барлық дерлiк жерде  бастапқы шартты;

3. Кез келген  және барлық  және барлық

 (2.6)

қанағаттандыратын  функциялар жұбын атайды.

**Анықтама 2.2.** (2.1)-( 2.5) керi есебiнiң әлдi шешiмi деп

1. ;

2. әрбiр теңдеудi сәйкес облыстарда барлық дерлiк жерде қанағаттандыратын

 функциялар жұбын атайды.

**Ескерту** 2**.1.** Әдеттегiдей, әлсiз шешiмiнiң анықтамасында ** қысым туралы мағлұмат келтiрiлмеген. Оны [65] мақаладағыдай ** және ** функциялары белгiлi болғаннан кейiн де Рам леммасын қолданып, (2.2) теңдеуден жалғыз түрде қалпына келтiруге болады.

**Керi есептi қайта тұжырымдау: эквиваленттi локалды емес тура есеп**

Керi есептердiң берiлгендерi келесi шарттарды қанағаттандырсын

 (2.7)

 (2.8)

 (2.9)

 (2.10)

 (2.11)

 (2.12)

Ендi (2.1) теңдеудi  функциясына көбейтiп және  облыс бойынша интегралдайық. Алынған өрнектi бөлiктеп интегралдап, сондай-ақ (2.5) қосымша және (2.8) шартты қолданғанда, онда функциясы табылады

 (2.13)

Демек, (2.13) өрнектi (2.1) теңдеуге қойғанда, онда белгiсiз  және  функцияларын табуға арналған

 (2.14)

теңдеулер жүйесiн, (2.3) бастапқы шартты және (2.4) шекаралық шартты қанағаттандыратын локалды емес тура есеп тұжырымдалады, мұндағы  функциясы (2.13) өрнекпен анықталады. Демек, (2.1)-( 2.5) керi есебiн, сәйкесiнше, (2.14), (2.3)-( 2.4) локалды емес тура есептерiне алып келдiк.

Керi есептер мен локалды емес тура есептердiң эквиваленттiлiгi жөнiнде келесi лемма орынды.

**Лемма 2.1.** Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орындалсын. Демек, (2.1)-(2.5) керi есебi (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiне эквиваленттi, яғни **функциялары (2.1)-(2.5) керi есебiнiң шешiмi болса, онда ** жұбы (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болып табылады және керiсiнше, ** функциялары (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болса, онда (2.13) өрнекпен анықталған ** функциясымен бiрге (2.1)-(2.5) керi есебiнiң шешiмi болып табылады.

**Ескерту 2.2.** (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмiнiң анықтамасы 2.1 және 2.2-анықтамаға ұқсас түрде берiледi.

**Дәлелдеуi.** Шын мәнiнде, лемманың дәлелдеуiнiң бiрiншi бөлiгi (2.1)-(2.2) теңдеулер жүйесiнен (2.14) теңдеудi алуда дәлелдендi.

Ендi екiншi бөлiгiн дәлелдейiк. Айталық, ** функциялар жұбы (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмi болсын. Екiншi жағынан, ** функциялар жұбы (2.13) өрнегiмен анықталған ** функциясымен бiрге (2.1)-(2.4) өрнектердi қанағаттандырады. Олай болса, ** функциялары (2.1)-(2.5) керi есебiнiң шешiмi екенiн дәлелдеу үшiн (2.5) қосымша шарттың орынды екенiн көрсету жеткiлiктi.

Онда керi жорып, яғни (2.5) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық. Сондай-ақ,

 (2.15)

болсын, мұндағы  үшiн . Шешiмнiң анықтамасы мен (2.10), (2.15) шарттардан  орындалады, сонымен қатар (2.11) үйлесiмдiлiк шарттарынан төмендегi нәтиже қорытылады



Ендi (2.14) өрнекке  функциясын көбейтiп және бөлiктеп интегралдау өрнегiн қолданып, сонымен бiрге (2.15) шартты ескерсек, онда

 (2.16)

теңдiгi шығады, сондай-ақ (2.8) шарттан  функциясы үшiн келесi Коши есебi алынады

 (2.17)

және одан  үшiн  тұжырымдалады.

Алдағы уақытта 2.1-лемма бойынша (2.1)-(2.5) керi есебiнiң орнына (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есебiнiң шешiмдiлiгi зерттелiнедi.

**Теорема 2.1.** Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Ақырлы ** уақыты табылып, ** цилиндрiнде (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есептерiнiң кемiнде бiр әлсiз шешiмi бар болады, мұндағы ** мәнi төменде (2.31) өрнектен табылады. Сонымен қатар, әлсiз шешiм келесi априорлық бағалауды қанағаттандырады

 (2.18)

мұндағы  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi тұрақты.

**Дәлелдеуi.** Теореманы дәлелдеу үшiн Фаэдо-Галеркин әдiсi қолданылады: ең алдымен жуық шешiмдер құрылып, оған априрлық бағалаулар алынады және шекке көшу дәлелденедi.

**Галеркиндiк жуықтау.** Айталық,  функциялары  кеңiстiгiнiң элементтерiнен құралған,  кеңiстiгiнде ортогональ және сызықтық комбинациялары  кеңiстiгiнде барлық жерде тығыз жүйе болсын. Өлшемi ге () тең және ,  жүйесiн қамтитын  кеңiстiгiн қарастырайық. Кез келген  үшiн (2.1)-(2.4), (2.13) есептiң жуық шешiмi келесi түрде iзделiнедi

 (2.19)

мұндағы ,  коэффициенттерi белгiсiз және төмендегi жәй дифференциалдық теңдеулер (ЖДТ) жүйесiнiң шешiмi болып табылады

 (2.20)

мұндағы  және

 (2.21)

Ендi (2.21) ЖДТ жүйесiн келесi бастапқы шарттармен толықтырайық

 (2.22)

мұндағы



функциясы  кеңiстiгiндегi функционалдық тiзбек болып табылады және

әлді жинақты  (2.23)

Жай дифференциалдық теңдеулер теориясы бойынша (2.20)-(2.22) Коши есебiнiң  аралығында  шешiмi локалды бар болады. Төменде априорлық бағалаулар арқылы Коши есебiнiң шешiмiн  кеңейтуге болатынын көруге болады, мұндағы априорлық бағалаулар орынды болатын максималды аралық.

**Сөйлем 2.1.** Айталық, (2.7)-(2.12) шарттар орындалсын. Олай болса, ақырлы ** уақыты табылып, барлық ** үшiн келесi априорлық бағалауы орынды

 (2.24)

мұндағы  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi оң тұрақты.

**Дәлелдеуi.** (2.20) өрнектi  функциясына көбейтiп,  бойынша ден ге шейiн қосындылап және  облыста интегралдағанда

 (2.25)

теңдiгi алынады, мұндағы

және 

Гельдер және Юнг теңсiздiктерiн қолдану арқылы (2.25) өрнектiн оң жағындағы қосылғыштарды бағалайық

 (2.26)

 (2.27)

 (2.28)

Алынған (2.27), (2.28) нәтижелердi (2.25) өрнектiң оң жағына қойғанда, төмендегi теңсiздiк шығады

 (2.29)

мұндағы





Енді



белгiлеуiн енгiзейiк. (2.29) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдағанда

 (2.30)

сызықты емес интегралдық теңсiздiк шығады және 1-лемманы ескерiп

 үшін (2.31)

бағалауы орынды екенiн аңғаруға болады. Соңғы өрнек көмегiмен келесi априорлық бағалауы алынады

 (2.32)

мұндағы



(2.32) бағалауды (2.29) өрнектiң оң жағына қолданып және  бойынша екi жағынан супремум алғанда

 (2.33)

бiрiншi априорлық бағалауы алынады, мұндағы .

**Сөйлем 2.2.** 2.1-сөйлемнiң барлық шарттары орындалсын. Онда  үшiн келесi априорлық бағалауы орынды

 (2.34)

мұндағы  мәнi (2.31) өрнектен белгiлi, ал  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi оң тұрақты.

**Дәлелдеуi.** (2.20) өрнектiң екi жағын  функциясына көбейтiп,  бойынша ден ға шейiн қосындылап және  облыста интегралдап, бөлiктеп интегралдау формуласын қолданғанда

 (2.35)

теңдiгi алынады. Ендi (2.27) және (2.28) өрнектерi үшiн алынған бағалауларға ұқсас Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiн (2.24) бiрiншi априорлық бағалаумен бiрге қолдану арқылы (2.35) өрнектiң оң жағын бағалайық

 (2.36)

 (2.37)

 (2.38)

Алынған (2.36)-(2.38) бағалауларды (2.35) өрнекке қойғанда

 (2.39)

бағалауы алынады, мұндағы







Ендi (2.39) өрнектен  бойынша ден ға шейiн интегралдап, сондай-ақ екi жағынан супремум алғанда

 (2.40)

екiншi априорлық бағалау шығады, мұндағы



**Ескерту 2.3.** (2.18) априорлық бағалауы негiзiнде (2.19) жуық шешiмi (2.1)-(2.5) керi есебiнiң 2.1-анықтама мағынасындағы әлсiз шешiмiне ұмтылатынын көрсету 1-бөлiмдегi секiлдi аналогты түрде дәлелденеді.

**(2.1)-(2.5) керi есебiнiң әлдi шешiмiнiң бар болуы.**

(2.1)-(2.5) керi есебiнiң әлдi шешiмiнiң бар болуы туралы 1.2-теоремаға аналогты түрде келесi теорема орынды.

**Теорема 2.2.** Айталық, 2.1-теореманың шарттары орындалсын және

 (2.41)

болсын. Онда  цилиндрiнде (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есептерiнiң кемiнде бiр әлдi шешiмi бар болады, сәйкесiнше, эквиваленттi (2.1)-(2.5) керi есебiнiң де кемiнде бiр әлдi шешiмi бар болады және келесi априорлық бағалауды қанағаттандырады

 (2.42)

мұндағы  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi оң тұрақты.

**Дәлелдеуi.** Жоғарыдағы тұжырымның дәлелдеуi 1.11-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде дәлелденедi. Жалпылама әлдi шешiмнiң бар болуын дәлелдеу үшiн арнайы базис, нақтырақ айтқанда, (2.14), (2.3)-(2.4) локалды емес тура есеп үшiн

 (2.43)

түрiнде Стокс операторы үшiн қойылған спектралды есептiң меншiктi функциялары қолданылады, мұндағы  Лере проекциясы. Сондай-ақ,  жүйесi  кеңiстiгiнде ортогональ және  кеңiстiгiнде ортонормаланған жүйенi құрайды [66], [67].

Олай болса, әлсiз шешiм үшiн алынған барлық априорлық бағалаулар әлдi шешiмге де орынды. 2.2-теореманы толық дәлелдеу үшiн  мен ға априорлық бағалаулар алсақ жеткiлiктi.

Сөйтiп, (2.20) өрнектi ға көбейтiп,  бойынша ден ге шейiн қосындыласақ, онда келесi өрнек шығады

 (2.44)

мұндағы  функциясы (2.21) өрнегiмен анықталады және төмендегi бағалауды қанағаттандырады

 (2.45)

Гельдер мен Юнг теңсiздiктерiн және (2.45) бағалауды бiрге қолданып, тi бағалайық

 (2.46)

(2.46) бағалауды (2.44) теңдiкке ескергенде, келесi теңсiздiк қорытылады

 (2.47)

Ендi (2.47) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және әлсiз шешiм үшiн алынған априорлық бағалауларды қолдансақ, төмендегi интегралдық теңсiздiк алынады

 (2.48)

мұндағы





Мұнан кейiн, (2.48) өрнекке Гронуолл леммасын қолданғанда,

 (2.49)

бағалауы қорытылады. Егер (2.48) өрнектiң екi жағынан  бойынша супремум алып және (2.49) бағалауды қолдансақ, онда төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (2.50)

**Теорема 2.3.** Айталық, 2.1-теореманың шарттары орындалсын. (2.1)- (2.4), (2.13) есебiнiң бiрдей белгiлiлерi үшiн ** мен ** әлсiз және әлдi шешiмдерi болсын. Онда барлық ** үшiн (2.1)-(2.4), (2.13) есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерi жалғыз, яғни **, мұндағы **әлсiз және әлдi шешiмдердiң бар болуының максималды уақыты.

## **2.1 Сызықты интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есептiң локалды бiрмәндi шешiмдiлiгi**

Бұл тармақта (2.1)-(2.5) керi есебiнiң дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесiнде конвективтi мүшесi болмағанда әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелденедi. Сондай-ақ, (2.18) өрнектегi априорлық бағалаудың уақыт бойынша глобалды екенiн дәлелдеудiң негiзгi қиындығы  функциясының (2.13) өрнектер бойынша анықтамасында  сызықты емес конвективтi мүшенiң отыруы. Жоғарыда қарастырылған отырған керi есептiң сызықты жағдайда глобалды шешiмдiлiгi [68, 69] жұмыстарда зерттелiндi. Алайда, қарастырылып отырған керi есептердiң глобалды шешiмдiлiгi есептiң берiлгендерiне шектеу қою арқылы тұжырымдалады. Демек, сызықты Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептi қарастырайық

 (2.51)

 (2.52)

 (2.53)

 (2.54)

 (2.55)

Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орынды болсын. Сөйтiп, қарастырылып отырған (2.51)-(2.55) керi есебiне эквиваленттi  функциясын табуға арналған тура есеп келесi түрде болады, яғни (2.53) бастапқы және (2.54) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

 (2.56)

теңдеудi қанағаттандырады, мұндағы  функционалы

 (2.57)

өрнекпен анықталады.

**Лемма 2.2.** Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орындалсын. Онда (2.51)-(2.55) керi есебi (2.56), (2.53), (2.54) тура есебiне эквиваленттi.

**Дәлелдеуi.** Бұл лемма аналогты түрде 2.1-лемма секiлдi дәлелденедi.

**Теорема 2.4.** Айталық, (2.7)-(3.12) шарттар орындалсын. Онда ** цилиндрiнде (2.56), (2.53), (2.54) тура есебiнiң ** әлсiз шешiмi бар болады әрi жалғыз және барлық  үшiн (2.18) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Соңғы тұжырым аналогты түрде (2.1)-(2.5) керi есебiнiң шешiмдiлiгi секiлдi (2.51)-(2.55) керi есебi үшiн де дәлелденедi. Нақтырақ айтқанда, (2.56), (2.53), (2.54) тура есебiнiң әлсiз шешiмi барлық ** үшiн (2.18) бағалауды немесе (2.24), (2.34) априорлық бағалауларды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Ал дәлелдеу алгоритмi 2.1-теореманың дәлелдеуi секiлдi жүргiзiледi.

Демек, (2.25) және (2.35) өрнектерiне аналогты энергетикалық теңдiктер келесi түрде болады

 (2.58)

 (2.59)

мұндағы функционалы (2.57) өрнекпен анықталған және

 (2.60)

Ал (2.58) теңдiктiң оң жағын (2.60) өрнектi ескерiп бағаласақ, онда

 (2.61)

теңдiздiгi шығады. Мұнан соң, (2.61) теңсiздiгiн (2.58) теңдiктiң оң жағына қойсақ, онда



функциясы үшін

 (2.62)

теңсiздiгi қорытылады, мұндағы





Осылайша (2.62) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдасақ, онда

 (2.63)

интегралдық теңсiздiгi алынады, мұндағы



Cөйтiп, (2.63) өрнекке сызықты Гронуолл теңсiздiгiн қолдансақ, онда

 (2.64)

бағалауы шығады.

Алынған (2.64) бағалауды (2.63) өрнектiң оң жағына қолданып, екi жағынан  бойынша супремум алсақ, онда келесi априорлық бағалау алынады

 (2.65)

мұндағы .

Демек, (2.24) априрлық бағалау тұжырымдалды. Мұнан кейiн екiншi априорлық бағалаудың орынды екенiн дәлелдеу үшiн ең алдымен, (2.59) теңдiктiң оң жағын (2.60) өрнектi ескерiп бағаласақ, онда

 (2.66)

Мұнан соң, (2.66) теңсiздiгiн (2.59) теңдiктiң оң жағына қойып, сонымен қатар,  бойынша ден ға шейiн интегралдап,  бойынша супремум алып және (2.65) априорлық бағалауды ескерсек, онда

 (2.67)

екiншi априорлық бағалауы тұжырымдалады, мұндағы



Осылайша теореманың дәлелдеуi бiттi.

**Теорема 2.5.** Айталық, 2.4-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (2.41) шарт орынды болсын. Онда (2.56), (2.53), (2.54) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық  үшiн (2.42) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Соңғы тұжырымның дәлелдеуi 2.2-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде жүргiзiледi.

## **2.2 Сызықты емес интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есептiң глобалды бiрмәндi шешiмдiлiгi**

Бұл тармақта (2.1)-(2.5) керi есебiнiң дербес жағдайы, нақтырақ айтқанда, теңдеулер жүйесiнiң оң жағы арнайы түрде, яғни  болғанда әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша глобалды бар болуы зерттелiнедi. Демек, оң жағы  функциясына тең сызықты емес Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есептi қарастырайық

 (2.68)

 (2.69)

 (2.70)

 (2.71)

 (2.72)

Айталық, (2.9), (2.10) және

 (2.73)

шарттар орынды болсын.

Демек, қарастырылып отырған (2.68)-(2.72) керi есебiне эквиваленттi u функциясын табуға арналған тура есеп келесi түрде болады, яғни (2.70) бастапқы және (2.71) шекаралық шарттарды, сондай-ақ

 (2.74)

теңдеудi қанағаттандырады, мұндағы функционалы

 (2.75)

өрнегiмен анықталады және тұрақты.

**Лемма 2.3.** Айталық, (2.8)-(2.11) шарттар орындалсын. Онда (2.68)- (2.72) керi есебi (2.74), (2.70), (2.71) тура есебiне эквиваленттi.

**Дәлелдеуi.** Бұл лемма аналогты түрде 2.1-лемма секiлдi дәлелденедi. Ендi (2.74), (2.70), (2.71) тура есебiнiң әлсiз шешiмiнiң бар болуы туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 2.6.** Айталық, (2.7), (2.11)-(2.12) және (2.73) шарттар орындалсын. Онда (2.74), (2.70), (2.71) локалды емес тура есебiнiң ** цилиндрiнде кемiнде бiр әлсiз шешiмi табылады және барлық ** үшiн (2.18) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Жоғарыдағы тұжырым аналогты түрде (2.1)-(2.5) керi есебiнiң шешiмдiлiгi секiлдi (2.68)-(2.73) керi есебi үшiн де дәлелденедi. Нақтырақ айтқанда, (2.74), (2.70), (2.71) тура есебiнiң әлсiз шешiмi барлық ** үшiн (2.18) априорлық бағалауды қанағаттандыратын көрсету жеткiлiктi. Ал дәлелдеу алгоритмi 2.1-теореманың дәлелдеуi секiлдi жүргiзiледi.

Демек, (2.25) және (2.35) өрнектерiне аналогты энергетикалық теңдiктер келесi түрде болады

 (2.76)

 (2.77)

еңдiгi алынады, мұндағы функционалы (2.96) өрнекпен анықталған және

 (2.78)

бағалауын қанағаттандырады.

Ең алдымен (2.77) теңдiктiң оң жағындағы екiншi қосылғышты (2.78) өрнектi пайдаланып бағаласақ, онда

 (2.79)

теңсiздiгi тұжырымдалады. Ал бiрiншi қосылғыш үшiн (2.27) бағалауды қолданып және (2.79) теңсiздiкпен бiрге (2.76) оң жағына ескерсек, онда



функциясы үшiн келесi дифференциалдық теңсiздiк шығады

 (2.80)

мұндағы



.

Ендi (2.80) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап, (2.24) өрнектi ескерсек, онда

 (2.81)

интегралдық теңсiздiк қорытылады, мұндағы



Cөйтiп, (2.81) өрнекке сызықты Гронуолл теңсiздiгiн қолдансақ, онда

 (2.82)

бағалауы шығады.

Алынған (2.82) бағалауды (2.81) өрнектiң оң жағына қолданып, екi жағынан бойынша супремум алсақ, онда келесi априорлық бағалау алынады

 (2.83)

мұндағы .

Ендi (2.77) теңдiктiң оң жағындағы бiрiншi қосылғышты (2.78) және (2.83) өрнектердi бiрге пайдаланып бағаласақ, онда

 (2.84)

теңсiздiгі қорытылады. Cондай-ақ, екiншi және үшiншi қосылғыштарға, сәйкесiнше, (2.36) және (2.38) өрнектердi негiзге ала отырып бағалап, (2.77) теңдiктiң оң жағына (2.84) өрнекпен бiрге қойғанда

 (2.85)

.

Cөйтiп, (2.85) өрнектi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және  бойынша супремум алсақ, онда

 (2.86)

екiншi априорлық бағалауы қорытылады, мұндағы



Демек, 2.6- теорема дәлелдендi.

**Теорема 2.7.** Айталық, 2.6-теореманың барлық шарттары орындалсын. Сонымен қатар, (2.41) шарт орынды болсын. Онда (2.74), (2.70), (2.71) тура есебiнiң әлдi шешiмi барлық  үшiн (2.42) бағалауды қанағаттандырады.

**Дәлелдеуi.** Соңғы тұжырымның дәлелдеуi 2.2-теореманың дәлелдеуiне аналогты түрде жүргiзiледi.

# 3 Р-ЛАПЛАСИАНДЫ ПСЕВДОПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШIН КЕРI ЕСЕП

Бұл бөлiмде p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн қойылған керi есебiнiң әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы және жалғыздығы зерттелiнедi.

**3.1. Есептiң қойылымы**

Айталық, шенелген облыс және  оның жатық шекарасы болсын. Ал  цилиндрi  бүйiр бетiмен анықталсын.

Бұл бөлiмде  және  функцияларын табуға арналған

 (3.1)

р-Лапласианды және оң жағы сызықты емес мүшеден тәуелдi псевдопараболалық теңдеудi,

 (3.2)

бастапқы шартты,

 (3.3)

шекаралық шартты,

 (3.4)

қосымша интегралдық шартты қанағаттандыратын керi есептi қарастырайық. Мұндағы  коэффициентi оң () немесе терiс () бола алатын тұрақты. Сондай-ақ,  және  белгiлi функциялар, ал  және  коэффициенттерi оң тұрақтылар және келесi шартты қанағаттандырады

 (3.5)

Аталмыш (3.1) типтi теңдеулер псевдопараболалық немесе Соболев типтi теңдеулер деп аталады және математика мен физиканың көптеген салаларында кездеседi [70], [71]. Мысалы, олар термодинамикалық процестердi [72], жарылған тау жыныстарындағы сұйықтық ағынын [73], кеуектi ортадағы фильтрацияны [74], стационарлы емес екiншi реттi сұйықтық ағынын [75], ньютондық емес сұйықтықтардың қозғалысын [71], [3], атап айтқанда, Кельвин-Фойгт сұйықтарын және жоғарыда келтiрiлген көптеген анықтамаларды [40,41] модельдеуде пайдаланылды. Керi есептерде белгiсiз коэффициенттiң болуына байланысты бастапқы және шекаралық шарттармен бiрге қосымша шарт та берiлдi [70], [76], [77], [5]. Бұл жұмыста қосымша шарт ретiнде (3.4) интегралдық қайта анықтау шарты ұсынылған, оны физикалық түрде бүкiл  ауданындағы берiлген ағынның орташа жылдамдығы ретiнде түсiнуге болады.

Егер  және  болса, онда (3.1) теңдеу классикалық псевдопараболалық теңдеудi бередi. Бiздiң бiлуiмiзше, псевдопараболалық теңдеулер үшiн керi есептер көп зерттелмеген, классикалық псевдопараболалық теңдеулер үшiн [78], [70], [53], [79], [80], [81], [82, 83] және p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеулер мен оған қатысты теңдеулер үшiн [84], [51], [55], [60,61], [85] керi есептердi осы мақалалардан және ондағы сiлтемелерден көруге болады.

Аталмыш (3.1)-(3.4) керi есебi бұл жұмыстан тәуелсiз параллель түрде оң жағы  арнайы түрдегi Антонцев және онымен соавторлардың [84] жұмысында қарастырылды, мұндағы  функциясы (3.4) қайта анықтау шартында сынақ функциясы ретiнде пайдаланылады. Бұл математикалық және физикалық тұрғыдан есептiң тұжырымдалуын шектеуi мүмкiн. [84] жұмыста әлсiз шешiмнiң уақыт бойынша локалды бар болуы  көрсеткiштерi мен  өлшемiнiң келесi

 және 

мәндерінде дәлелденді.

Сөйтiп, ұсынылған жұмыста (3.1)-(3.4) керi есебiнiң оң жағы  түрiнде  еркiн функциясы болғанда  көрсеткiштерi және  өлшемiнiң барлық мүмкiн жағдайларында бiрмәндi шешiмдiлiгi зерттелiндi. Сондай-ақ әлсiз шешiмнiң жалғыздығын  және  болған жағдайда да дәлелдедiк.

3.1.-бөлiмде (3.1)-(3.4) керi есебiнiң (3.11)-(3.14) локалды емес тура есепке эквиваленттiлiгi дәлелденедi. 3.2.-бөлiмде әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша глобалды және локалды бар болуы  жағдайда, ал 3.3.-бөлiмде  жағдайда тұжырымдалады. Ол үшiн  галеркиндiк жуықтаулары құрылып және оларға бiрiншi және екiншi априорлық бағалаулар алынады. Сондайақ, әлсiз, әлсiз және әлдi жинақтылықтарды монотондылық әдiсiмен бiрге қолданып,  бойынша шекке көшу дәлелденедi. 3.4-бөлiмде  және  жағдайда (3.11)-(3.14) есептiң әлсiз шешiмiнiң жалғыздығы тұжырымдалады.

**Әлсiз қойылым.** Есептiң берiлгендерi төмендегi шарттарды қанағаттандырсын

 (3.6)

барлық  үшін (3.7)

 (3.8)

және  (3.9)

 (3.10)

**Лемма 3.1.** Айталық, (3.7), (3.9)-(3.10) шарттар орындалсын. Онда (3.1)- (3.4) керi есебi төмендегi сызықты емес псевдопараболалық теңдеу үшiн локалды емес тура есепке эквиваленттi

 (3.11)

 (3.12)

 (3.13)

мұндағы

 (3.14)

**Дәлелдеуi.** 1. Айталық,  фукнциялар жұбы (3.1)-(3.4) керi есебiнiң шешiмi болсын. Демек, (3.1) теңдеудi  функциясына көбейтiп,  облыста интегралдап және бөлiктеп интегралдау өрнегiн ескерсек, онда

 (3.15)

теңдiгi алынады. Төмендегi теңдiктi



(3.4) қосымша шартты және (3.7) ұйғарымды қолданып, (3.15) теңдеуден (3.14) өрнек қорытылады.

2. Ендi  функциясы (3.14) өрнекпен бiрге (3.11)-(3.13) тура есебiнiң шешiмi болсын, яғни  функциялар жұбы (3.1)-(3.3) есептiң шешiмi болып табылады. Демек, осы  жұбы (3.1)-(3.4) керi есебiнiң шешiмi болатындығын дәлелдеу үшiн  функциясы (3.4) қосымша шартты қанағаттандыратынын көрсету жеткiлiктi. Олай болса, керi жорып, (3.4) қосымша шарт орындалмасын деп ұйғарайық және

 (3.16)

болсын, мұндағы барлық  үшiн . Сондай-ақ, (3.4) және (3.9) шарттарға сәйкес  және келесi теңдiк орынды



(3.11) өрнектi  функциясына көбейтiп және бөлiктеп интегралдап, (3.14) шартты қолдансақ, онда

 (3.17)

теңдiгi тұжырымдалалды, мұндағы  мәнi (3.14) өрнекпен берiлген. (3.14) өрнектi (3.17) теңдiкке қойғанда, келесi теңдiк шығады

 (3.18)

(3.18) теңдiктен  функциясы үшiн төмендегi Коши есебi тұжырымдалады

 (3.19)

Соңғы Коши есебiнен барлық  үшiн  тұжырымы қорытылады.

**Анықтама 3.1.** (3.11)-(3.14) есебiнiң әлсiз шешiмi деп

1.,

2. -да барлық дерлiк жерде  бастапқы шартты,

3. Кез келген  және барлық дерлiк  үшiн төмендегi теңдiктi

 (3.20)

қанағаттандыратын  функциясын атайды.

## **3.2 Сызықты емес жылу көзiмен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есептiң бiрмәндi шешiмдiлiгi**

Бұл бөлiмде (3.11)-(3.14) есептiң шешiмдiлiгiн зерттеуде ең алдымен  көрсеткiшi және  коэффициентi, сәйкесiнше, және

 (3.21)

жағдайы қарастырылады. Аталмыш ұйғарымдарға байланысты (3.11)-(3.14) керi есебiнiң шешiлiмдiлiгi туралы келесi теорема орынды.

**Теорема 3.1.** [Глобалды бар болуы] Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, ** көрсеткiштерi келесi шартты қанағаттандырсын

 (3.22)

Онда (3.11)-(3.14) есебiнiң 3.1-анықтама мағынасында әлсiз шешiмi глобалды бар болады. Сонымен қатар, әлсiз шешiм үшін

 (3.23)

 (3.24)

априорлық бағалаулары орынды, мұндағы  және  есептiң берiлгендерiнен тәуелдi тұрақтылар.

**Теорема 3.2.** [Локалды бар болуы]. Айталық, (3.6)-(3.10), (3.21) шарттар орындалсын, сондай-ақ, ** көрсеткiштерi

 (3.25)

шарттарын келесi ұйғарыммен

 (3.26)

бiрге қанағаттандырсын. Онда (3.63) өрнекпен анықталған ақырлы  уақыты табылап, (3.11)-(3.14) есебiнiң 3.1-анықтама мағынасында  аралығында кемiнде бiр әлсiз шешiмi локалды бар болады. Сонымен қатар, әлсiз шешiм барлық  үшiн (3.23)-(3.24) априорлық бағалауды қанағаттандырады.

**Ескерту 3.1.** Ескерер жәйт, (3.25) шарт *,* шекке көшкенде қажеттi, төменде (3.76) өрнектi қараңыз. 3.1-теоремада ** ұйғарымнан соң, соңғы теоремадағы (3.26) шартта ** көрсеткiштерiнiң екiден үлкен кезi қарастырылады.

**Дәлелдеуi.** Теореманы дәлелдеу үшiн Фаэдо-Галеркин әдiсi қолданылады: ең алдымен жуық шешiмдер құрылып, оған априрлық бағалаулар алынады, одан кейiн шекке көшу дәлелденеді.

**Галеркин жуықтаулары.** Айталық,  жүйесi  кеңiтiгiнде ортогональ және оның сызықтық комбинациясы  кеңiстiгiнде тығыз болып табылады. Берiлген  үшiн ,..., жүйесiнiң сызықты қабықшасы -өлшемдi  векторлық кеңiстiк болсын. Әрбiр  үшiн келесi жуық шешiмдердi құрайық

 (3.27)

мұндағы  белгiсiз коэффициенттерi төмендегi  жәй дифференциалдық теңдеулерден (ЖДТ) анықталады

 (3.28)

Жоғарыдағы (3.28) ЖДТ-лер келесi бастапқы шарттармен толықтырғанда

 (3.29)

Коши есебi шығады және төмендегi әлдi жинақтылықты қанағаттандырады

 (3.30)

Олай болса, (3.28)-(3.29) Коши есебiнiң  шешiмi  уақыт аралығында локалды бар болады. Төмендегi алынған априорлық бағалаулар арқылы Коши есебiнiң шешiмiн  аралығына дейiн кеңейтуге болады.

**Бiрiншi және екiншi априорлық бағалау.** Бұл бөлiмде (3.21) жағдайда жуық шешiм үшiн глобалды априорлық бағалау алынады.

**Лемма 3.2.** Айталық,



болсын, сонымен бiрге (3.6)-(3.10), (3.21), (3.29)-(3.30) және

 (3.31)

шарттар орындалсын. Онда барлық  үшiн төмендегi априорлық бағалау орынды

 (3.32)

Егер



болса, онда барлық  үшiн екiншi априорлық бағалау орынды

 (3.33)

**Дәлелдеуi.** (3.28) өрнектi  функциясына көбейтiп,  бойынша қосындылап және шыққан нәтиженiң екi жағына -ны қосқанда

 (3.34)

теңдiгi шығады, мұндағы

 (3.35)

Ендi Гелдер мен Юнг теңсiздiктерiн (4.31) шартымен бiрге қолданып (3.34) теңдiктiң оң жағын бағалайық

 (3.36)

 (3.37)

 (3.38)

мұндағы



 (3.39)



Ендi (3.36)-(3.39) теңсiздiктердi (3.34) теңдiкке қойғанда, онда

 (3.40)

дифференциалдық теңсiздiк шығады, мұндағы



және (3.9)-(3.10) шарттардың көмегiмен  көруге болады.

(3.40) теңсiздiктiң сол жағындағы екiншi және үшiншi қосылғыштарды ескермей, содан кейiн Гронуолл леммасын



функциясы үшiн қолдансақ төмендегi бағалау алынады

 (3.41)

Ендi (3.40) теңсiздiктi  бойынша ден ға шейiн интегралдап және  бойынша супремум алайық. Одан шыққан нәтижеге (3.41) бағалауды қолданғанда, онда (3.32) априорлық бағалау тұжырымдалады.

Ендi (3.28) өрнектi  функциясына көбейтiп,  бойынша қосындылап және одан шыққан нәтиженi  бойынша ден ға шейiн интегралдасақ, онда

 (3.42)

теңдiгi қорытылады, мұндағы

 (3.43)

Ең алдымен (3.42) теңдiктiң екi жағына -ны қосып, (3.31) және (3.41) өрнектер арқылы алынатын келесi

 (3.44)

бағалауды пайдаланып, сондай-ақ Гелдер теңсiздiгiн (3.30) және (3.32) шарттармен бiрге қолдансақ, онда

 (3.45)

теңсiздiгi шығады. Мұнан кейiн, Гелдер мен Юнг теңсiздiктерiн және (3.32) бағалауды пайдаланып  қосылғышты бағалайық

 (3.46)

мұндағы





Олай болса, (3.46) теңсiздiктi (3.42) өрнекке қойғанда

 (3.47)

бағалауы қорытылады және одан  бойынша супремум алсақ, онда екiншi априорлық бағалау тұжырымдалады

 (3.48)

Айталық,  және  болсын. Бұл жағдайда локалды априорлық бағалаулар алынады.

**Лемма 3.3.** Айталық,



болсын және (3.6)-(3.10), (3.29)-(3.30), (3.21) шарттар орындалсын. Сонымен қатар, келесi шарт орынды болсын

 (3.49)

және

 (3.50)

Онда  оң саны табылып және (3.56) өрнекпен анықталған  уақыты үшiн аралығында келесi априорлық бағалау орынды болады

 (3.51)

**Дәлелдеуi.** (3.49) шартты пайдаланып (3.34) оң жағындағы ден басқа қосылғыштарды бағалайық:

 (3.52)

 (3.53)

мұндағы 

Соболев және Пуанкаре теңсiздiктерi көмегiмен қосылғышты бағалайық

 (3.54)

мұндағы



(3.52),(3.37), (3.53), (3.54) өрнектердi (3.34) теңдiкке қойып,  бойынша интегралдасақ, онда

 (3.55)

сызықты емес дифференциалдық теңсiздiк қорытылады, мұндағы  ((3.50) өрнектен ) және







Ендi (3.55) теңсiздiктiң сол жағындағы интегралдық қосылғышты ескермей және 1-леммадағы теңсiздiктi қолдансақ, онда

 (3.56)

мәнi үшiн келесi бағалау қорытылады

 (3.57)

(3.55) теңсiздiктi  бойынша ден ға шейiн интегралдап,  бойынша супремум алып және (3.57) бағалауды қолданғанда, онда төмендегi априорлық бағалау тұжырымдалады

 (3.58)

келесi қадамда (3.49) жағдайында Галеркин жуықтаулары үшiн екiншi априорлық бағалауды алайық.

**Лемма 4.4.** Айталық, 3.3-лемманың шарттары орындалсын және



болсын. Онда  оң тұрақтысы және (3.63) өрнекпен анықталған  уақыты табылып, барлық  үшiн келесi бағалау орынды

 (3.59)

**Дәлелдеуi.** Аналогты түрде (3.46) өрнекке Гелдер теңсiздiгiн (3.30), (3.58) және

 (3.60)

шарттарымен бiрге қолданғанда, онда төмендегi бағалау қорытылады

 (3.61)

мұндағы





(3.61) және (3.60) өрнектi (3.42) теңдiкке қойып, (3.30) шарты қолдансақ, төмендегi бағалау алынады

 (3.62)

мұндағы



Демек, (3.61) өрнектiң сол жағындағы алғашқы екi қосылғышты ескермей және 1-лемманы функциясына үшiн қолдансақ, онда

 (3.63)

мәнi үшiн

 (3.64)

бағалауы алынады. Демек, (3.64) және (3.60) бағалауларды (3.62) өрнекке ескерiп және  бойынша супремум алсақ, онда (3.59) априорлық бағалау тұжырымдалады.

**бойынша шектiк көшу.** (3.32) және (3.51) бағалаудардан төмендегi әлсiз және әлсiз жинақтылықтар қорытылады

 әлсiз жинақты  (3.65)

 әлсiз жинақты  (3.66)

 әлсiз жинақты  (3.67)

 әлсiз жинақты  (3.68)

 әлсiз жинақты  (3.69)

Екiншi жағынан, (3.51) және (3.33) бағалаудан  және  функцияларының табылатын көруге болады, сәйкесiнше

 әлсiз жинақты  (3.70)

 әлсiз жинақты  (3.71)

мұндағы  және  сандары, сәйкесiнше,  және  сандарының Гелдер түйiндестерi. (3.67) және (3.69) өрнектерден, компакт және үзiлiссiз енгiзулерге байланысты, яғни



және Обэн-Лионс компактiлiк леммасынан төмендегi әлдi жинақтылық алынады

 әлді жинақты  (3.72)

және жеке жағдайда,

 әлді жинақты  (3.73)

мұндағы  саны  санының Соболев түйiндесi, яғни .

Ендi (3.73) әлдi жинақтылық пен Рисс-Фишер теоремасы бойынша  тiзбегiнiң iштiзбегi үшiн барлық дерлiк нүктедегi жинақтылық алынады, яғни

 барлық дерлік нүктеде  (3.74)

(3.71) өрнегiмен бiрге (3-лемма [12, 12 б.])

 әлсiз жинақты  (3.75)

Сонымен қатар, (3.25) және (3.69), (3.72) ұйғарымдарынан келесi нәтиже орынды болып табылады

 әлді жинақты 

және

  (4.76)

Айталық,  үзiлiссiз әрi  аралығында дифференциалданатын функция болсын, мұндағы  бiрiншi және екiншi априорлық бағалауларды қанағаттандыратын максималды уақыт. (3.28) өрнектi  функциясына көбейтiп және  бойынша интегралдасақ, онда

 (3.77)

теңдiк алынады және жоғарыдағы (3.69), (3.70), (3.75) және (3.66) нәтижелерден барлық  үшiн

 (3.78)

теңдiгi тұжырымдалады.

(3.78) өрнектiң аргументiнiң сызықтылығы мен үзiлiссiздiгi көмегiмен төмендегi нәтиже орынды, яғни



Ендi монотондылық әдiстi қолданып төмендегi теңдiктi дәлелдейiк

 (3.79)

Бiрiншiден жиыны де тығыз, олай болса, және тест функцияларын (3.77) және (3.78) өрнектерге қойғанда, сәйкесiнше, төмендегi теңдiктер алынады

 (3.80)

және

 (3.81)

Келесi, (3.21) жинақтылықпен қатар монотонды  операторының ([86] қараңыз) қасиетiн қолдансақ, онда барлық  үшiн төмендегi өрнек орынды

 (3.82)

(3.82) және (3.80) өрнектi ескерсек, онда

 (3.83)

өрнегi шығады.  және  қосылғыштардың жинақтылығына байланысты ([55] қараңыз) келесi ұйғарымды айта кету керек

 (3.84)

мұндағы  арқылы -де Банах мәндi  аралығында үзiлiссiз  кеңiстiгiнiң iшкеңiстiгiн белгiлейдi. Демек, (3.84) өрнек бойынша , ,  және  шамаларының мәнi бар деген сөз.

(3.83) өрнектен алып,  және  қасиеттерiн қолданып, және  қосылғыш үшiн (3.76) жинақтылықты,  және  қосылғыштар үшiн (3.70) жинақтылықты,  қосылғыш үшiн (3.75) жинақтылықты, сонымен бiрге  және  қосылғыштар үшiн (3.69) жинақтылықты ескерсек, онда

 (3.85)

шектiк көшу алынады. (3.81) өрнектi (3.85) шектiк көшумен бiрiктiргенде

 (3.86)

өрнегi қорытылады. (3.86) өрнек кез келген  үшiн орынды. Мәселен,  түрiнде еркiн  және  үшiн алсақ, онда (4.86) өрнектен

 (3.87)

тұжырым алынады. (3.87) тұжырымда δ → 0 болса, онда

 (3.88)

өрнек шығады.  еркiн түрде таңдалғандығынан  тұжырымы орынды, демек (3.79) дәлелдендi.

## **3.3 Абсорбция мүшемен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есептiң бiрмәндi шешiмдiлiгi**

Бұл бөлiмде (3.11)-(3.14) есебi  көрсеткiшi мен  коэффициентiнiң, сәйкесiнше,  және

(3.89)



мәндерi қарастырылады. Аталмыш жағдайда (3.11)-(3.14) керi есебiнiң шешiмiнiң бар болуы туралы төмендегi теорема орынды.

**Теорема 3.3.** [Глобалды бар болуы] Айталық, (3.6)-(3.10), (3.89) шарттар орындасын және

 (3.90)

болсын. Онда (3.11)-(3.14) керi есебiнiң кез келген  үшiн кемiнде бiр  әлсiз шешiмi бар болады. Сондай-ақ, әлсiз шешiм келесi бағалауларды қанағаттандырады

 (3.91)

 (3.92)

**Теорема 3.4.** [Локалды бар болуы] Айталық, (3.5), (3.6)-(3.10), (3.89) шарттар орындалсын және

 (3.93)

болсын. Онда ақырлы  уақыты табылып, (3.11)-(3.14) керi есебiнiң кемiнде бiр әлсiз шешiмi  үшiн бар болады. Сонымен қатар,  әлсiз шешiмi барлық  үшiн (3.91) және (3.92) априорлық бағалауларды қанағаттандырады, мұндағы  және ақырлы уақыты төменде (3.114) өрнекпен анықталады.

**Ескерту 3.2.** ** жағдайында, 3.3-теоремадағы ** шарт қажеттiлiк тудырмайды. Демек, (3.89) шартты ** немесе ** операторының монотондылық қасиетiмен бiрге қолдансақ, онда **мәнi үшiн төмендегi өрнек шығады

 (3.94)

Олай болса, (3.83) өрнек келесi түрде болады

 (3.95)

Бұл жағдайда,  және  қосылғыштарының жинақтылығы үшiн (3.75) өрнек орынды, ал қалған қосылғыштар үшiн жинақтылық өткен бөлiмдегi секiлдi ([55], 17 б. қараңыз).

**Дәлелдеуi.** 3.3 және 3.4-теоремаларды дәледеу үшiн (3.32) және (3.33), сәйкесiнше, бiрiншi және екiншi априорлық бағалаулардың орынды болатынын  жағдайында дәлелдеу керек. Мұнан соң, жоғарыдағы бөлiм секiлдi шектiк көшу тұжырымдалады.

**Глобалды және локалды бағалаулар**

**Лемма 3.5.** Айталық,

 (3.96)

болсын және (3.6)-(3.10) және (3.89) шарттар орындалсын. Егер (3.90) шарт орындалса, онда барлық  үшiн келесi априорлық бағалау (уақыт бойынша глобалды) орынды

 (3.97)

 (3.98)

Егер (3.90) шарттың орнына (3.93) орынды болса, онда ақырлы  және уақыты табылып, барлық  үшiн (3.97) бағалау және барлық  үшiн (3.98) бағалау орынды, мұндағы  және  мәнi (3.108) және (3.113) өрнектермен анықталады.

**Дәлелдеуi.** Демек, (3.89) жағдайда, (3.34) және (3.42) энергетикалық теңдiктер келесi түрде болады

 (3.99)

 (3.100)

мұндағы

 (3.101)

 (3.102)

Гелдер және Юнг теңсiздiктерiн қолданып,  қосылғышты бағалайық. Ал,  және  қосылғыштар үшiн  жағдайда, сәйкесiнше, (3.37) және (3.38) теңсiздiктер орынды.

 (3.103)

мұндағы



Келесi (3.37), (3.53), (3.103) өрнектердi (3.99) теңдiкке қойып және дифференциал астына дi қоссақ, онда төмендегi теңсiздiк қорытылады

 (3.104)

мұндағы



және  саны (3.53) өрнекпен анықталады. (3.104) өрнектi  бойынша интегралдасақ, онда

 (3.105)

теңсiздiк алынады, мұндағы





(3.105) өрнекке  және (3.90) жағдайда сызықты Гронуолл теңсiздiгiн, ал және (3.93) жағдайда сызықты емес Гронуолл теңсiздiгiн (1-лемма) қолданғанда төмендегi теңсiздiктер қорытылады

 жағдайда (3.106)

және

 (3.107)

 жағдайда (3.108)

Демек, (3.106) және (3.107) өрнектердi (3.105) теңсiздiкке қойып және  бойынша супремум алғанда, келесi энергетикалық бағалау тұжырымдалады

 (3.109)

егер (3.90) болса, онда  және егер (3.93) болса, онда .

Ендi Гелдер мен Коши теңсiздiктерiн қоланып,  қосылғышын бағалайық

 (3.110)

мұндағы





Олай болса, (3.110) бағалауды (3.100) өрнекке қойып және екi жағына дi қосқанда, онда



функциясы үшiн

 (3.111)

теңсiздiгi қорытылады, мұндағы



(3.111) теңсiздiктiң сол жағындағы интегралдық қосылғышты ескермей,  және (3.90) жағдайда сызықты Гронуолл теңсiздiгiн,  және (3.93) жағдайда сызықты емес Гронуолл теңсiздiгiн (1-лемма) қолдансақ, онда төмендегi дифференциалдық теңсiздiктер қорытылады

 (3.112)

және

 (3.113)

үшiн

 (3.114)

(3.112) және (3.114) теңсiздiктердi (3.111) өрнекке қойып,  бойынша супремум алғансақ, онда

 (3.115)

екiншi энергетикалық бағалау тұжырымдалады, мұндағы (4.90) жағдайда  және (3.93) жағдайда .

**3.4. Жалғыздығы**

**Теорема 3.5.** Айталық, төмендегi шарттар орындалсын

 (3.116)

 (3.117)

және

 мұндағы  (3.118)

Егер жағдайда (3.116)-(3.118) шарттарымен бiрге 3.2 және 3.4- лемманың барлық шарты орындалсын.

Егер  жағдайда (3.116)-(3.118) шарттарымен бiрге 3.5-лемманың барлық шарты орындалсын.

Онда (3.11)-(3.14) есебiнiң әлсiз шешiмi жалғыз болады, мұндағы  және  сандары, сәйкесiнше,  және  сандарының Соболев түйiндесi.

**Ескерту 3.3.** (3.118) өрнектегi ** шартты келесi түрде түсiну қажет, егер **болса, онда ** көрсеткiшi жеткiлiктi үлкен болады немесе егер ** болса, онда ** өлшемi жеткiлiктi аз болады.

**Дәлелдеуi.**  және  функциялары (3.11)-(3.13) есебiнiң 3.1-анықтама мағынасындағы әлсiз шешiмi болсын. Мұнан соң, (3.1) өрнекке тест функциясы ретiнде  функцияны қолданып,  үшiн теңдеуден  үшiн теңдеудi алып тастағанда

 (3.119)

дифференциалдық теңдiк шығады, мұндағы

 (3.120)

Айталық,  болсын. Онда (24) теңсiздiк немесе монотонды оператордың қасиетi бойынша, келесi шарттар орынды

 (3.121)

Гелдер мен Юнг теңсiздiктерiн және 2-леммадағы (24) өрнектi  мәнiмен қолданып, тi бағалайық

 (3.122)

мұндағы





2. Ендi  жағдайын қарастырайық. Бұл жағдайда (3.119) өрнектен, төмендегi теңсiздiк қорытылады

 (3.123)

мұндағы



2-леммадағы екiншi теңсiздiктi  мәнiнде қолдансақ, онда келесi түрдегi бағалау алынады

 (3.124)

мұндағы



.

Ал  үшiн (3.122) бағалауы орынды.

Алынған нәтижелерден (3.119) теңдiкке, егер  болғанда (3.121) және (3.122) өрнектердi, ал болғанда (3.122) және (3.124) өрнектердi қойсақ, онда төмендегi Коши есебi қорытылады

 (3.125)

мұндағы

 егер 

 егер .

Сондай-ақ, және  жағдайда 3.5-теорема шарттарына байланысты, мұндағы  мәнi (3.11)-(3.14) есебiнiң әлсiз шешiмiнiң бар болатын максималды уақыты. (3.125) дифференциалдық теңсiздiктен кез келген  үшiн  болады, демек 

# 4 БIРТЕКТI ЕМЕС СҰЙЫҚТЫҚТАР ҮШIН КЕЛЬВИН-ФОЙГТ ЖҮЙЕСI ҮШIН БАСТАПҚЫ-ШЕТТIК ЕСЕП

## **4.1 Есептiң қойылымы**

Бұл бөлiмде эластикалық қасиеттерге ие бiртектi емес сығылмайтын сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын Кельвин-Фойгт теңдеулер жүйесi үшiн бастапқы-шеттiк есеп қарастырылады

 (4.1)

 (4.2)

 (4.3)

 (4.4)

 (4.5)

мұндағы  шенелген облыс, ал  цилиндр және оның  бүйiр бетi болып табылады. Сонымен қатар, , ,  және  функциялары, сәйкесiнше, физикалық тұрғыдан сұйықтықтың жылдамдығын, көлемдiк күштi, сұйықтықтың тығыздығын және қысымын, ал  және  коэффициенттерi, сәйкесiнше, сұйықтықтың кинематикалық тұтқырлығы мен релаксациясын сипаттайды және төмендегi шарттарды қанағаттандырады

 (4.6)

Қарастырылып отырған (4.1)-(4.5) есебiнде ,және  iзделiндi, ал ,  және  белгiлi функциялар. Бұл жұмыстағы алынған нәтижелер  жағдайы үшiн орынды, алайда табиғаттағы сұйықтықтың қозғалысы үшiн  жағдайы жеткiлiктi.

Сондай-ақ,  импульстiң бастапқы мәнi және ол  өрнегiне тең, ал  және  мәндерi

 (4.7)

 (4.8)

шарттарын қанағаттандырады, мұндағы  бастапқы жылдамдық,  оң тұрақты. (4.8) шартты аңғарып қарасақ  сұйықтықтың тығыздығы  облыстарда нөлге барады, яғни бастапқы уақыт мезетiнде кеңiстiк облыстың кейбiр бөлiгiнде вакуум болады. (4.7) шартты келесi шарттардың бiреуiмен қоса анықтайық

 (4.9)

 (4.10)

мұндағы  кеңiстiгi  түрдегi Соболев кеңiстiгi болып табылады және  кеңiстiгi анықтамасы (31) өрнекпен анықталған функционалдық кеңiстiк. Бұл жұмыста Монография [87,88]-дағы функционалдық кеңiстiктердiң анықтамалары мен белгiлеулерi қолданылады. Мәселен, берiлген  және  үшiн  және  түрiнде Лебег және Соболев кеңiстiктерi белгiленедi. Ал,  жағадайда  белгiлеуi қоданылады. Сонымен қатар,  арқылы  кеңiстiгiн  кеңiстiгiнiң нормасы арқылы тұйықтағанда шығатын кеңiстiктi белгiлейдi.  кеңiстiгi  кеңiстiгiне түйiндес кеңiстiк, мұндағы саны  санының Гелдер түйiндесi болып табылады.

Қарастырылып отырған есептiң әлсiз шешiмiн зерттеуде (4.9) шарт жеткiлiктi, ал әлдi шешiм үшiн (4.10) шартты қажет етедi. Олай болса, сәйкесiнше  функциясы үшiн де төмендегi екi ұйғарым қарастырылады

 (4.11)

 (4.12)

Егерде  барлық уақыт аралығын қарастырмаған жағдайда  үзiлiссiз енгiзуi орынды екенi анық. Қарастырылып отырған бастапқы-шеттiк есептiң шешiмдiлiгi үшiн  функциясына (4.11) шарт қою жеткiлiктi саналады, алайда регуляр нетижелер үшiн (4.12) шартты қою талап етiледi. (4.1)-(4.5) есебiнiң iзделiндi әлдi шешiмiнiң анықтамасы келесi түрде берiледi.

**Анықтама 4.1.** Айталық, ** және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалсын. (4.1)-(4.3) теңдеулердегi**, ** мен **регуляр жалпылама функциялар болсын. Сондай-ақ, ** цилиндрiнде барлық дерлiк жерде **, ** мен ** функциялары (4.1)-(4.3) теңдеулердi, ал ** мен ** функциялары (4.4)-(4.5) бастапқы және шеттiк шарттарды қанағаттандырсын. Онда **функциялар үштiгi (4.1)-(4.5) есебiнiң әлдi шешiмi деп аталады.

Бұл бөлiмде негiзiнен (4.1)-(4.5) есебiнiң әлдi шешiмдерiнiң бар болуы туралы сұрақтарға жауап берiледi. Алғашқы нәтижелердiң бiрi төмендегi теоремада келтiрiледi, сондай-ақ кеңiстiктiк облыстың шекарасына минималды шарттар қойылады.

**Теорема 4.1.** Айталық, ** және ** шенелген облыс, ал оның ** Липшиц үзiлiссiз шекарасы болсын. Егер (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда (4.1)-(4.5) есебiнiң төмендегi шарттарды қанағаттандыратын кемiнде бiр ** шешiмi табылады

1. , барлық  және  үшін;

2.  және ;

3.  және ;

4. .

Егер (4.11) шарттың орнына (4.12) шартты қарастырған жағдайда, онда

1.  және  тұжырымы орынды.

Бiртектi емес сұйықтықтардың қозғалысын сипаттайтын Навье-Стокс теңдеуi ((4.2) теңдеуде  мүшесi болмаған жағдайда) үшiн  немесе дәлелдеуде (төменде (4.55) және (4.58) қараңыз) қосымша шарттарды қажет етедi. Осы нәтиженi дәлелдеу үшiн [18]-де келесi ұйғарымдарды қарастырады

 (4.13)

 (4.14)

Алайда, (4.13)-(4.14) шарттармен қоса,  және  бастапқы функцияларына Стокс есебiнiң үйлесiмдiлiк шарттары қойылған едi

 (4.15)

 (4.16)

 (4.17)

мұндағы  және . (4.13) шартқа қатысты ескеретiн жәйт,  (қараңыз [89, VIII.7-теорема]) Соболев енгiзуi бойынша  (немесе тұжырымы (4.11) шартының орнын баса алады. Жақын уақытта, бiртектi емес Навье-Стокс теңдеуi үшiн (4.15)-(4.17) үйлесiмдiлiк шарттарынан құтылуға болатын, алайда  және  үшiн

 (4.18)

шарттары орынды болатын [90] жұмыста зерттелiндi. Осындай нәтижелер бұл жұмыста бiртектi емес Навье-Стокс-Фойгт есебi үшiн  функциясына (4.13)-(4.14) ұйғарымдарын ескермей және (4.15)-(4.17) немесе (4.18) үйлесiмдiлiк шарттарынсыз регуляр нәтижелер алынды. Оған (4.2) теңдеудегi  релаксациялық мүше көмегiн тигiздi.

Регуляр шешiм алуда жатық шекаралық облыс ғана емес кеңiстiктiң өлшемi де үлкен рөл атқарады. Сол мақсатта келесi теорема маңызды.

**Теорема 4.2.** Айталық, ** болсын. Сондай-ақ, ** шенелген облыс және оның ** кеңiстiкте жататын ** шекарасы болсын. Онда (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда (4.1)-(4.5) есебiнiң кемiнде бiр ** шешiмi табылады және 4.1-теореманың (1)-(4) шарттарына қоса келесi шарттар орынды

1.  және ;

2. ;

егер (4.11) орнына (4.12) шартты қарастырсақ, 4.1-теореманың екiншi бөлiгiндегi (1) шартқа қоса төмендегi шарттар орынды

1. ;

2. .

Бiртектi емес Навье-Стокс теңдеуi үшiн [18, 90]-де алынған регулярлықпен қорытынды нәтижелердi салыстырсақ, онда бұл жұмыста  және  регулярлығы (төменде(4.57) және (4.59) қараңыз) алынды, дегенмен де мұндай нәтиженi (4.2) теңдеуде  мүшесi болмаған жағдайда алу мүмкiн емес едi.

4.1 және 4.2-теоремаларының дәлелдеулерi тұжырымдалады.

**Ескерту 4.1.** Ескерер жәйт, ** және ** регулярлығына қоса, төмендегi

 және 

регулярлығы орынды. Мұны (38) және (40) Соболев теңсiздiктерiн жоғарыда айтылған регуляр нәтижелермен бiрiктiру арқылы алуға болады. Нақтырақ, төмендегi 4.4-ескертудi де қараңыз.

Келесi  әлдi шешiмдердiң бар болуының қосымша нәтижесi ретiнде төмендегi теорема орынды, сонымен қатар бұл нәтижелер  және  шешiмдерiнiң жалғыздығын дәлелдеуге мүмкiндiк беретiн шарттар тұжырымдалады, мұндағы  саны  санының Соболев түйiндесiн бiлдiреді.

**Теорема 4.3.** Айталық, ** және ** функциялары (4.1)-(4.5) есептiң және 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын шешiмдер болсын. Егер

 (4.19)

 (4.20)

 (4.21)

шарттары орындалса, онда  және .

[65, 4-5-теорема]-де есептiң жалғыздығы  жағдайда, сонымен бiрге (4.21) және

 (4.22)

 (4.23)

шарттарымен

 (4.24)

өлшем үшiн дәлелдендi. (4.24) шарттан  ұйғарымы орынды. Мұнымен қоса, (4.22) шарттың және  Соболев кеңiстiгiнiң үзiлiссiз енгiзуi көмегiмен (4.19) шарттан құтылуға болады. Екiншi жағынан,  үшiн орынды  үзiлiссiз енгiзуiне байланысты (4.20) шартты қабылдасақ, онда (4.23) шарттан құтылуға болады.

## **4.2 Шешiмнiң бар болуы**

(4.1)-(4.5) есебiнiң шешiмiнiң бар болуын дәлелдеуi Галеркин жуықтауларына негiзделедi. Төменде  облысының iшжиындар ұясын



және  Фридрихс өзегiн қарастырайық. Сондай-ақ,



болсын. Сонымен қатар,  және  бастапқы берiлгендерi, сәйкесiнше,  және орташалау функциялары арқылы регулярланады және ол келесi қатынаспен анықталады

 (4.25)

 (4.26)

Бұрыннан белгiлi  үшiн оның  орташалау функциясы келесi шарттарды қанағаттандырады.

 барлық дерлік нүктеде (4.27)

 (4.28)

Егер  болса, онда келесi өрнек орынды

 (4.29)

Сонымен қатар, (4.8), (4.25)-(4.26) және (4.27)-(4.28) өрнектердi ескере отырып төмендегi шарттар алынады

 (4.30)

 (4.31)

Cонымен бiрге,  функциясының жеткiлiктi регулярлығынан, келесi шарттар қорытылады

 (4.32)

Жеткiлiктi үлкен әрi еркiн  санын ескерiп төмендегi бастапқы-шеттiк есептi қарастырайық

 (4.33)

 (4.34)

 (4.35)

 (4.36)

 (4.37)

Галеркин сұлбасы арқылы (4.33)-(4.37) есептiң шешiмi iзделiнедi. Стокс операторының инъективтi, өз-өзiне түйiндес және компакттiлi керi оператор ([91, 4.2-4-сөйлем] қараңыз) болғандығынан, оның  оң меншiктi мәндерiнiң тiзбегi мен

 (4.38)

шартты қанағаттандыратын  меншiктi функциялары табылады. Олай болса,  жүйесiн  кеңiстiгiнде ортогоналдауға және  кеңiстiгiнде ортонормалауға болады. Берiлген  үшiн - өлшемдi және (4.38) өрнекпен анықталған , жүйесiн қамтитын  кеңiстiгiн қарастырайық. Барлық  үшiн [65, 1-теорема] ([92, 1-сөйлем] да қараңыз) дәлелдеуi секiлдi жуық шешiмдердiң

 (4.39)

 (4.40)

бар екенiн төмендегi  жәй дифференциалдық теңдеулер шешiмi екенiн көрсету арқылы дәлелдеуге болады

 (4.41)

 (4.42)

(4.41)-(4.42) жүйе келесi бастапқы шарттармен үйлестiрiледi

 (4.43)

мұндағы , ал  арқылы  ортогональ проекцияны бiлдiредi, демек

 (4.44)

мұндағы  өрнегi  кеңiстiгiндегi скаляр көбейтiндi.  бiрқалыпты үзiлiссiз болғандықтан келесi ұйғарым орынды деуге болады

 (4.45)

Бастапқы тығыздықтың  жуық мәнi үшiн төмендегi шарт орынды

 (4.46)

(4.30)-(4.32) және (4.45)-(4.46) өрнектерiнен

 (4.47)

 (4.48)

 (4.49)

тұжырымдарын алуға болады. (4.41) өрнектен  функциясының сызықтылығы және үзiлiссiздiгi әрi регулярлығынан  аралығында жалпылама функция мағынасындағы келесi ұйғарым орынды

 (4.50)

Сондай-ақ, 6-лемма бойынша жалғыз түрде қысымның бар болуын дәлелдеуге болады

 (4.51)

демек,

 (4.52)

теңдiгi  аралығында барлық дерлiк нүктеде орынды болады [65, 2- теорема].

**Априорлық бағалаулар.** Бұл бөлiмде ,  және  жуықтауларына ден тәуелсiз бағалаулар алынады, сондай-ақ  функциясына қатысты шарттарға қарай бiрнеше сөйлемдер тұжырымдалады. Алынған априорлық бағалаулардың  тұтқырлық және  релаксация коэффициенттерiне тәуелдi болуы (4.2) теңдеудегi  және  қосылғыштарының маңызды екенiн аңғартады. Сонымен қатар, априорлық бағалаулар нен де тәуелсiз екенiн айта кету керек.

**Сөйлем 4.1.** Айталық, **, ** және ** функциялары (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектерiмен анықталған (4.33)-(4.37) есептiң әлсiз жуық шешiмдерi болсын.

1. Егер (4.8) шарт орындалса, онда келесi бағалау орынды

 (4.53)

2. Егер  және (4.8), (4.9) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.54)

3. Егер  және (4.8), (4.9), (4.11) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.55)

4. Егер  және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.56)

5. Егер  және (4.8), (4.10), (4.11) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.57)

Ендi (4.11) ұйғарымының орнына (4.12) ұйғарымы ескерiлiп, 4.1-сөйлемнiң нәтижелерiн жақсарту мақсатында бағалаулар тұжырымдалады.

**Сөйлем 4.2.** Айталық, **, ** және ** функциялары (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектерiмен анықталған (4.33)-(4.37) есептiң әлсiз жуық шешiмдерi болсын.

1. Егер және (4.8), (4.9), (4.12) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.58)

2. Егер  және (4.8), (4.10), (4.12) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  саны табылып, келесi бағалауды қанағаттандырады

 (4.59)

Ең алдымен, 4.1 және 4.2-сөйлемдердiң дәлелдеуiне кiрiспес бұрын (4.2) теңдеуде  жағдайда, яғни Навье-Стокс теңдеуi үшiн алынған нәтижелерге талдау жасайық.

**Ескерту 4.2.** 1 Айта кету керек, (4.54) априорлық бағалауы [92,4-лемма]-да алынған едi, алайда, бұл жұмыста авторлар  деген ғана шарт қойып отыр. Сондай-ақ, төмендегi (4.66) ((4.86) де қараңыз) априорлық бағалаудың көмегiмен (4.54) өрнекте  релаксация коэффициентiн  тұтқырлық коэффициентiмен алмастыруға болатын көру оңай.

2 Ал, (4.56) априорлық бағалауы бастапқы тығыздықтың вакуум болуына немесе болмауына тәуелдi емес. Әйтсе де,  бастапқы тығыздықтың оң болғандағы нәтижелер [65,3-теорема] мақалада басқа тәсiл арқылы дәлелдендi. Сондай-ақ, төмендегi (4.86) априорлық бағалаудың көмегiмен (4.56) өрнекте  релаксация коэффициентiн  тұтқырлық коэффициентiмен алмастыруға болатын көру оңай.

**Дәлелдеуi.** (4.1-сөйлем) Дәлелдеудi жеңiлдету мақсатында бiрнеше тармақтарға бөлiнiп қарастырылады.

1. [65,1-теорема] ([93,1.2-лемма] да қараңыз) дәлелдеуiн талдай отырып және (4.47) өрнекпен бiрге максимум принципiн қолданып (4.53) өрнек орындылығы дәлелденедi. Сондай-ақ, соленоидылығын,  шартын (4.42) және (4.43)3-пен бiрге қолданып, барлық және  үшiн келесi өрнек тұжырымдалады



 (4.60)

2. (4.50) өрнектi -ға көбейтiп, шыққан нәтиженi  мен  аралығында интегралдап, (4.42) үзiлiссiздiк теңдеуi мен  соленоидылығын ескерiп, (4.43) бастапқы шартты қолдансақ, онда төмендегi теңдiк қорытылады

 (4.61)

Ендi (4.61) өрнектегi соңғы қосылғышты Гельдер және Коши теңсiздiктерiн қолданып бағаласақ, онда келесi теңсiздiк алынады

 (4.62)

Сөйтiп, (4.62) теңсiздiктi (4.61) теңдiкке ескерiп және (4.47)-(4.48), (4.49)1 өрнектерiмен бiрге (4.53) шартты қолдансақ, онда



теңсiздiгi тұжырымдалады. Оған Гронуолл теңсiздiгiн қолданып және  бойынша супремум алсақ, онда  оң тұрақтысы үшiн (4.54) бағалауы қорытылады.

3. Келесi (4.50) өрнектi  функциясын көбейтсек, онда

 (4.63)

теңдiгi алынады, мұндағы



Олай болса, (4.63) өрнектегi соңғы қосылғышты (4.62) теңдiк секiлдi бағалағанда, онда төмендегi теңсiздiк шығады

 (4.64)

Сондай-ақ,  функционалын бағалау үшiн (4.53) өрнекпен Коши және Гельдер теңсiздiктерiн бiрге қолдансақ, онда

 (4.65)

теңсiздiгi шығады, мұндағы  және оң тұрақтылар. Мұнан әрi (4.64) және (4.65) бағалауларды (4.63) өрнекке қойып, шыққан нәтиженi  мен  аралығында интегралдап, сондай-ақ, (4.43) бастапқы шарт пен (4.54) бағалауды ескерсек, онда



бағалауы алынады, мұндағы  оң тұрақты. Соңғы бағалауды бойынша супремумдап және (4.49)1-дi ескерсек, онда

 (4.66)

бағалауы қорытылады, мұндағы  оң тұрақты. Сонымен бiрге, (4.54) өрнектi ескерсек, онда (4.66) бағалаудан (4.55) бағалауы тұжырымдалады.

4. Ендi (4.50) теңдiктi -ға көбейтсек, онда

 (4.67)

теңдiгi алынады, мұндағы  бейнелеуi (41) өрнекпен анықталған Стокс операторы. Егер (4.39) түрiндегi  фукнциясын ескерiп, (48) және (4.38) өрнектерiмен бiрге (41) Стокс операторының сызықтылығын қолдансақ, онда төмендегi өрнек алынады





Соңғы теңдiктердiң көмегiмен (4.67) өрнекке ауыстыру жасағанда, келесi теңдiк алынады

 (4.68)

Мұнан кейiн Гелдер, Коши және Минковский теңсiздiктерiн (4.53) өрнекпен бiрге қолдансақ, онда

 (4.69)

теңсiздiгi шығады, мұндағы . Алынған теңсiзiдiктi  мен  аралығында интегралдап және  бойынша супремум алғанда келесi теңсiздiк қорытылады

 (4.70)

Ендi, (48) өрнектi (38), (41) және (4.44) өрнектерiмен бiрге ескерсек, онда келесi нәтиженi тұжырымдауға болады

 (4.71)

 (4.72)

мұндағы ,  және  оң тұрақтылар. Айта кету керек, (4.72) теңсiздiкте  ((4.38) қараңыз) меншiктi функциялар үшiн  Лере проекциясы мен Лаплас операторының арасындағы байланыс қолданылды, сондай-ақ,  симметриялығын пайдаланып Лаплас операторы үшiн де (4.38) өрнектi дәлелдеуге болады. Олай болса, (4.71)-(4.72) теңсiздiктердi (4.70) өрнекке қолданғанда, онда

 (4.73)

теңсiздiгi алынады, мұндағы . Екiншi жағынан, Гельдер, Коши және (32)-(33), (37) Соболев теңсiздiктерiнiң көмегiмен









 (4.74)

теңсiздiгi қорытылады, мұндағы , ,  оң тұрақтылар, ал  тұрақтысы (4.73) өрнектен белгiлi оң сан. Егер (4.74) теңсiздiктi (4.73) өрнекке қойып және (4.49)2 шартты қолданып, сонымен қатар (4.54) және (4.55) бағалауларды ескерсек, онда  оң тұрақтысы үшiн (4.56) бағалауы тұжырымдалады.

5. Бұл жағдайда, Гельдер және Коши теңсiздiктерiн (4.53) өрнекпен бiрге пайдаланып, (4.63) өрнектiң оң жағын бағаласақ, онда

 (4.75)

 (4.76)

теңсiздiктерi шығады. Соңғы (4.75) және (4.76) теңсiздiктердi (4.63) өрнекке ескерiп, сондай-ақ,  мен аралығында интегралдасақ, онда келесi теңсiздiк қорытылдаы

 (4.77)

Екiншi жағынан,  болғандықтан, 7-лемманы пайдаланып, келесi Стокс есебiнiң әлсiз шешiмдерi, яғни   және  жалғыз түрде табылатын дәлелдеуге болады

 (4.78)

 (4.79)

 (4.80)

Сондай-ақ,  оң тұрақтысы үшiн келесi теңсiздiк орынды

 (4.81)

Ескерер жәйт, кез келген  үшiн  мәнiмен бiрге  және  функциялары (4.78)-(4.80) Стокс есебiн қанағаттандырады, демек, (4.81) өрнектен келесi бағалау алынады

 (4.82)

мұндағы  оң тұрақты. Соңғы өрнектi  мен аралығында интегралдап және (4.43) бастапқы шартты ескереск, онда

 (4.83)

теңсiздiгi тұжырымдалады. Жеткiлiктi аз  саны теңсiздiктi қанағаттандырса, онда (4.77) және (4.83) теңсiздiктерiнен





 (4.84)

теңсiздiгi шығады, мұндағы  және  оң тұрақтылар. Жоғарыдағы теңсiздiкте соңғы қосылғыш (4.74) өрнек секiлдi бағаланады, бiрақ жеткiлiктi аз  саны үшiн Коши теңсiздiгiнiң соңғы бөлiгi қолданылады, демек,

 (4.85)

мұндағы  және , ал  мен  тұрақтылары, сәйкесiнше, (4.74) және (4.84) өрнектерден белгiлi. (4.85) теңсiздiктi (4.84) өрнекке ескерiп, жоғарыдағы шарттар үшiн  санын таңдап, алынған теңсiздiктен  бойынша супремумдап және (4.49) бастапқы шарт пен қайтадан (4.54) бағалауды қолдансақ, төмендегi бағалау тұжырымдалады

 (4.86)

мұндағы  оң тұрақты. Егер (4.54), (4.55) және (4.56) бағалауларды ескере отырып, (4.86) бағалаудан қажеттi нәтиже (4.57) бағалау алынады.

**Ескерту 4.3.** (4.57) бағалауды және (4.56) бағалаудың тармағын басқа жолмен де алуға болады. Ол үшiн (4.50) теңдiктi -ға көбейтсек, онда төмендегi теңдiк шығады

 (4.87)

мұндағы A бейнелеуi (41) өрнектен белгiлi Стокс операторы. Егер (4.70) өрнек үшiн алынған нәтижелердi қайталасақ, онда төмендегi теңсiздiк алынады

 (5.88)

мұндағы оң тұрақты. Олай болса, (4.71)-(4.72) және



теңсiздiктердi қолдансақ, онда келесi теңсiздiк тұжырымдалады

 (4.89)

Жоғарыдағы теңсiздiкте соңғы қосылғышты бағалау үшiн (4.74) өрнектен өзгеше түрде төмендегiдей бағалау алынады

 (4.90)

мұндағы ,  оң тұрақтылар және  тұрақтысы (4.89) өрнектен белгiлi оң сан. (4.90) теңсiздiктi (4.89) өрнекке қойып, сонымен қатар (4.49)2 бастапқы шарт пен (4.54) және (4.55) бағалауларды пайдалансақ, онда келесi бағалау тұжырымдалады

 (4.91)

мұндағы  оң тұрақты. Қорыта айтқанда, (4.91) өрнектен (4.57) бағалау алынады.

Алайда (4.58) және (4.59) бағалауды дәлелдеуге кiрiспестен бұрын, айта керту керек, (4.57) бағалауды тұжырымдау мақсатында 4.3-ескертуде тура әдiс арқылы алынған (4.91) бағалаудың 4.1-сөйлемдi дәлелдеуде алынған (4.86) өрнектен ерекшелiгi дәлелдеу барысында кейбiр ақпаратты жоғалтумыз мүмкiн. Сонымен қатар, 4.1-сөйлемнiң дәлелдеу жолы (4.59) бағалауды алуда үлкен ықпалын тигiзедi.

**Дәлелдеуi.** (4.2-сөйлем) Дәлелдеу екi кезеңнен тұрады.

1. (4.63) теңдiктi келесi түрде қайта жазайық

 (4.92)

Сөйтiп, (4.65) үшiн алынған бағалау секiлдi есептеулер жасасақ

 (4.93)

мұндағы  оң тұрақты. Коши теңсiздiгiнен келесi тұжырым қорытылады

 (4.94)

(4.64) және (4.93)-(4.94) теңсiздiктердi (4.92) өрнекке ескерсек, онда

 (4.95)

теңсiздiгi алынады. Мұнан әрi қарай (0, T) бойынша (4.95) теңсiздiктен супремум алып, (4.12) ұйғарымды және (4.53), (4.54) бағалауларды ескерсек, онда  оң тұрақтысы үшiн (4.58) бағалауы тұжырымдалады.

2. Бұл жағдайды дәлелдеуге (4.82) өрнектi келесi түрде қайта жазайық

 (4.96)

Сөйтiп, (4.74) өрнекке алынған бағалау секiлдi есептеулер жасасақ, онда

 (4.97)

теңсiздiгi қорытылады, мұндағы  оң тұрақты.

Сондай-ақ,(4.97) өрнектен  бойынша супремумдап, (4.12) шартпен (4.53), (4.54), (4.56) және (4.58) бағалауларды бiрге қолдансақ, онда  оң тұрақтысы үшiн (4.59) бағалауы шығады.

**Сөйлем 4.3.** Айталық, ** және **, ** және ** функциялары, сәйкесiнше, (4.39), (4.40) және (4.51) өрнектермен анықталған (4.33)-(4.37) есептiң әлсiз жуық шешiмдерi болсын

1. Егер (4.8), (4.9), (4.11) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  оң тұрақтысы табылып және ол төмендегi бағалауды қанағаттандырады

 (4.98)

2. Егер (4.8), (4.9), (4.12) шарттар орындалса, онда ден (және нен) тәуелсiз  оң тұрақтысы табылып және ол төмендегi бағалауды қанағаттандырады

 (4.99)

**Дәлелдеуi.** 1 Кiшкене артқа көз салып, (4.78)-(4.80) Стокс есебi және онымен байланысты (4.81) регулярлылықты еске түсiрейiк. Сонымен қатар, (4.82), (4.81) өрнектерден келесi теңсiздiк қорытылады

 (4.100)

мұндағы  оң тұрақты. Сөйтiп, (4.86) өрнек үшiн алынған бағалаулар секiлдi есептеулер жасасақ, онда

 (4.101)

бағалауы қорытылады, мұндағы  оң тұрақты. Сондай-ақ, (4.101) өрнектен (4.98) бағалау алынады, мұндағы , ал  тұрақтысы (4.57) өрнекпен берiлген.

2. Бұл жағдайда, (4.96) өрнекке ұқсас түрде (4.100) өрнектi қайта жазсақ, онда келесi теңсiздiк тұжырымдалады

 (4.102)

Ендi (4.102) өрнектi ескерiп, (4.97) үшiн алынған бағалау секiлдi есептеулер жасасақ, онда төмендегi теңсiздiк қорытылады

 (4.103)

мұндағы  оң тұрақты.

Қорыта айтқанда, (4.59) бағалау (4.97) өрнектiң салдары болып табылады, сондай-ақ, (4.103) өрнектен (4.99) бағалауды қорытуға болады, мұндағы , ал  тұрақтысы (4.59) өрнектен анықталады.

## **4.3 Шектiк көшу**

**шектiк көшу.** Бұл бөлiмде, өткен бөлiмдерде басталған 4.1- теореманың дәлелдеуi жалғасын табады.



**Дәлелдеуi.** (4.1-теорема) (4.54)-(4.59) бағалаулар мен Банах-Алаоғлы теоремасын ескерсек, онда келесi нәтижелердi тұжырымдауға болады

 әлсiз жинақты  (4.104)

 әлсiз жинақты  (4.105)

 әлсiз жинақты  (4.106)

 әлсiз жинақты  (4.107)

 әлсiз жинақты  (4.108)

 әлсiз жинақты  (4.109)

 әлсiз жинақты  (4.110)

 әлсiз жинақты  (4.111)

 әлсiз жинақты  (4.112)

 әлсiз жинақты  (4.113)

Олай болса, Обэн-Лионстың компактiлiк леммасын ((35) 4-лемма), (4.108) өрнек пен  компактiлi енгiзуiмен бiрге қолдансақ, онда  iштiзбегi үшiн төмендегi әлдi жинақтылық орынды

 әлдi жинақты  (4.114)

Сондай-ақ, (4.53) өрнектi және Банах-Алаоғлы теоремасын ескерсек, онда  iштiзбегi үшiн келесi ∗− әлсiз жинақтылық орынды екенiн көруге болады

 әлсiз жинақты  (4.115)

Сонымен қатар,  жуықтауы төмендегi өрнектердi қанағаттандырады

 (4.116)

 (4.117)

Мұнымен қоса, төмендегi

 (4.118)

тұжырымын (4.116) өрнекпен бiрге қолданып, (4.53) және (4.54) бағалауларды ескерсек, онда келесi бiрқалыпты шенелгендiктi дәлелдеуге болады

 бірқалыпты шенелген . (4.119)

Сонымен бiрге, келесi компактiлi және үзiлiссiз енгiзулер орынды

 (4.120)

Олай болса, (4.53), (4.119) және (4.120) өрнектер арқылы Обэн-Лионс леммасын қолданып, iштiзбегi үшiн келесi әлдi жинақтылық орынды екенiн аңғаруға болады

 , әлдi жинақты  (4.121)

Сондай-ақ, (4.36)2 және (4.43)3 өрнектердi (4.60) өрнекпен бiрге қолданып төмендегi теңдiктердi тұжырымдауға болады

 және  (4.122)

Демек, (4.115) және (4.122) өрнектердi (4.121) әлдi жинақтылықпен бiрге қолданып, барлық  үшiн келесi өрнек алынады

 (4.123)

Сөйтiп, (4.117) және (4.123) өрнектерден келесi жинақтылық қорытылады

 (4.124)

Ал, (4.121) және (4.124) өрнектерден

 , әлдi жинақты 

тұжырымы орынды. Соңғы және (4.53) өрнектен

 , әлдi жинақты  (4.125)

әлдi жинақтылық та тұжырымдалады.

Ендi (4.108) және (4.114) жинақтылықтарды (4.117) және (4.125) өрнектермен бiрге қолдансақ, онда келесi тұжырымдарды қорытуға болады

 әлсіз жинақты  (4.126)

 әлсіз жинақты  мұндағы  (4.127)

Сондай-ақ, (4.53), (4.54) және (4.55) өрнектермен (4.114) және (4.125) жинақтылықтарды бiрге ескерiп, келесi жинақтылық қорытуға болады

 ,  (4.128)

Сонымен бiрге, (4.106) және (4.110) өрнектерден

 әлсіз жинақты  (4.129)

 әлсіз жинақты  (4.130)

тұжырымдар қорытылады.

Айталық,  болсын. (4.50) өрнектi  функциясына көбейтiп, содан кейiн  мен  аралығында интегралдасақ, онда  функциясы үшiн төмендегi нәтиже тұжырымдалады

 (4.131)

Сонымен қатар, (4.52) өрнек үшiн де жоғарыдағы секiлдi есептеулер жасасақ, онда  функциясы үшiн

 (4.132)

теңдiгi қорытылады. Сондай-ақ, (4.42) өрнектi  функциясына көбейтiп, алынған нәтиженi  цилиндр бойынша интегралдағанда, онда төмендегi өрнек тұжырымдалады

 (4.133)

Мұнан әрi қарай (4.131) өрнектегi әрбiр қосылғыш үшiн (4.126), (4.128), (4.129)-(4.130) жинақтылықтармен бiрге (4.125) әлдi жинақтылықты пайдаланып, (4.41) теңдiктен бойынша шекке көшу қорытылады.

Сөйтiп, (4.112), (4.125) және (4.127) жинақтылықтармен қоса (4.46) әлдi жинақтылық арқылы (4.133) теңдiктен  бойынша шекке көшу тұжырымдалады.

Демек,  және барлық  функциялары үшiн

 (4.134)

 (4.135)

сонымен қатар,  және барлық  функциялары үшiн

 (4.136)

теңдiктерi тұжырымдалады.

**** **шектiк көшу**. Өткен бөлiмде  мәнiнде кемiнде бiр  шешiм табылып,  функциясы үшiн

 (4.137)

және  функциясы үшiн

 (4.138)

теңдiктерiн  аралығында жалпылама функция мағынасында қанағаттандыратынын дәлелдедiк. Мұнымен қоса, (4.116) өрнектен  функциясы үшiн келесi теңдiк орынды екенiн көруге болады

 (4.139)

Ендi (4.137), (4.138) және (4.139) теңдiктердi қолданып, сондай-ақ, (4.53), (4.54)-(4.59) және (4.98)-(4.99) бағалауларды алу тәсiлiндей келесi теңсiздiктердi тұжырымдауға болады

 (4.140)

 (4.141)

 (4.142)

 (4.143)

 (4.144)

 (4.145)

 (4.146)

 (4.147)

 (4.148)

 (4.149)

ал , , , ,  және  оң нен тәуелсiз тұрақтылар. Олай болса, (4.141), (4.143), (4.144), (4.145), (4.146) және (4.147) бағалаулар арқылы Банах-Алаоғлы теоремасын қолданып келесi әлсiз және әлсiз жинақтылықтар алынады

 әлсiз жинақты  (4.150)

 әлсiз жинақты  (4.151)

 әлсiз жинақты  (4.152)

 әлсiз жинақты  (4.153)

 әлсiз жинақты  (4.154)

 әлсiз жинақты  (4.155)

 әлсiз жинақты  (4.156)

 әлсiз жинақты  (4.157)

 әлсiз жинақты  (4.158)

 әлсiз жинақты  (4.159)

Сондай-ақ, (4.150) және (4.154) жинақтылықтармен Обэн-Лионстың компакттiлi енгiзу леммасын (4-лемма (35) қараңыз) бiрге қолдансақ, онда төмендегi әлдi жинақтылық тұжырымдалады

 әлдi жинақты  (4.160)

Сонымен қатар, (4.116) өрнектi (4.140) және (4.141) жинақтылықтарымен Обэн-Лионстың компакттiлi енгiзу леммасын бiрге қолдансақ, онда келесi

 бірқалыпты шенелген . (4.161)

бiрқалыпты шенелгендiк алынады.

Ендi, (4.116) және (4.161) өрнектер арқылы Обэн-Лионстың компактiлiк туралы леммасын (лемма 4 (36) қараңыз)  iштiзбегi үшiн қолданғанда, төмендегi әлдi жинақтылық тұжырымдалады

 , әлдi жинақты  (4.162)

Мұнан соң,

 , әлдi жинақты  (4.163)

әлдi жинақтылықты да қорытуға болады, мұндағы  функциясы (4.3) теңдеудiң шешiмi және келесi шарттарды қанағаттандырады

 (4.164)

 (4.165)

Егер де  функциясы ден өзгеше болғанда, онда  шешiм де бiрқалыпты шенелмеген болар едi. Бұл  бойынша шекке көшкенде үлкен қиындық тудырары анық.

**Лемма 4.1.** Айталық, 4.1-теореманың шарттары мен (4.162), (4.163) жинақтылықтар орынды болсын. Онда ** iштiзбегi табылып, төмендегi әлдi жинақтылықтарды қанағаттандырады

 (4.166)

  (4.167)

**Дәлелдеуi.** 4.1-лемманы дәлелдеу үшiн ди Перна-Лионс [94] ренормаланған аргументтi сызықты тасымал теңдеуiнiң теориясына негiзделедi. Сонымен бiрге, [95, 2.5-теорема] және Дежарден [96] қараңыз.

Соңғы нәтиженi пайдаланып (4.116) және (4.33) өрнектердi (4.135) және (4.136) өрнектермен бiрге қолднсақ, онда барлық  функциясы үшiн

 (4.168)

және барлық  және барлық

 (4.169)

теңдiктер қорытылады.

Ендi (4.150)-(4.152), (4.158), (4.166) және (4.167) өрнектердi (4.25), (4.26) және (4.28) өрнектермен бiрге қолданып, (4.168) теңдiкте  бойынша шеккен көшккенде ,  және  функциялары үiшн (4.2) теңдеу да жалпылама функция мағынасында орындалатынын көруге болады. Сондай-ақ, (4.166) және (4.167) өрнектердi (4.26) және (4.28) өрнектермен бiрге қолданып, (4.169) теңдiктен  бойынша шеккен көшккенде ,  функциялары үiшн (4.3) теңдеу да жалпылама функция мағынасында орындалатынын көруге болады.

Қорыта айтқанда, (4.140) және (4.141)-(4.147) бағалауларды (4.150)- (4.158) және (4.166)-(4.167) жинақтылықтармен бiрiктiргенде, 4.1- теореманың (1)-(5) тармақтары және 4.2-теореманың (1)-(4) тармақтары орындалатынын көру болады.

**Ескерту 5.4.** Ескерер жәйт, (4.145) және (4.146) бағалауларды (38) және (40) Соболев теңсiздiктерiмен бiрге қолданып **, ** оң тұрақтылары үшiн төмендегi бағалаулар тұжырымдалады.





## **4.4 Жалғыздығы**

Бұл бөлiмде (4.1)-(4.5) есебiнiң шешiмiнiң  және  компоненттерiнiң жалғыздығы дәлелденедi. Дәлелдеуге кiрiсбес бұрын, (5.1)-(4.5) есебiнiң  шешiмiне қатысты қосымша регулярлылық беретiн кейбiр нәтижелер қолданылады.

Ең алдымен, бiртектi емес Навье-Стокс теңдеулерi үшiн  тығыздыққа қатысты регулярлық нәтижесiн еске түсiрейiк. Бұл нәтиже пайдалы, өйткенi үзiлiссiздiк теңдеуi бiртектi емес Навье-Стокс пен Навье-Стокс-Фойгт теңдеулер жүйелерi үшiн бiрдей.

**Сөйлем 4.4.** Айталық, ** функциялары 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебiнiң шешiмдерi болсын. Егер (4.21) және

 (4.170)

орынды болса, онда барлық  үшiн келесi регулярлық тұжырымдалады

 (4.171)

 (4.172)

**Дәлелдеуi.** Бұл тұжырымды дәлелдеу үшiн Ладыженская және Солонниковтiң [93, 1.3-лемма] жұмысындағы 4.4-сөйлемге негiзделедi.

Келесi нәтиже шешiмдердiң жоғары регулярлығы есептiң берiлгендерiне қаншалықты тәуелдi екенiн көрсетедi.

**Сөйлем 4.5.** Айталық, ** функциялары 4.2-теореманың шарттарын қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебiнiң шешiмдерi болсын. Егер, (4.21) шартпен қоса (4.22)-(4.23) және (4.24) шарттар орынды болса, онда ** және ** оң тұрақтылары үшiн төмендегi бағалалулар орынды

 (4.173)

 (4.174)

**Дәлелдеуi.** Ескерер жәйт, (4.21) және (4.22)- (4.23) шарттарын қолданып, [65, 4-теорема]-де тұрақтылары үшiн келесi бағалау алынған болатын

 (4.175)

 (4.176)

Айта кету керек, ның iшкi облыстарында бастапқы тығыздық жойылып кетуi мүмкiн бе деген сұрақ бұл нәтиже үшiн маңызды емес. Сөйтiп, (4.24) шартты (32) және (37) Соболев теңсiздiктерiн қолданып, төмендегiдей нәтиже алынады





Демек, (38) шарттың көмегiмен (4.175)-(4.176) бағалаулардың салдары ретiнде (4.173) және (4.174) бағалауларды аңғаруға болады.

Ендi 4.3-теореманы дәлелдеудi бастайық.

**Дәлелдеуi.** (4.3-теорема) Айталық,  және  функциялары (5.1)-(4.5) есебiнiң бiрдей бастапқы берiлгендерiне сәйкес шешiмдерi болсын. Осы екi жұп шешiмдердiң әрқайсысы қанағаттандыратын (4.1)-(4.5) есебiнен алгебралық түрлендiру арқылы келесi өрнектi алуға болады



 (4.177)

 (4.178)

 (4.179)

мұндағы ,  және  . Олай болса, (4.177) өрнектi  функциясына көбейтiп және  облыс бойынша интегралдап, (4.179) шартты қолдансақ, онда

 (4.180)

теңдiгi шығады. Сондай-ақ (4.178) өрнектi  функциясына көбейтiп және  облыс бойынша интегралдап, (4.179) шартты қолдансақ, онда келесi теңдiк тұжырымдалады

 (4.181)

Ендi (4.180) және (4.181) өрнектердi бiрiктiрсек, онда барлық  үшiн төмендегi теңдiк алынады

 (4.182)

Осылайша, (4.182) теңдiктiң оң жағындағы қосылғыштарға бағалаулар алу (4.164), (4.21) және (4.173)-(4.174) өрнектердi пайдалана отырып, [65, 5- теорема] жұмыстағы секiлдi дәлелденедi. Демек, барлық  және қайсыбiр  функциясы үшiн төмендегi дифференциалдық теңсiздiк алынады

 (4.183)

мұндағы  функциясы 4.2-теоремадан, (4.164), (4.21) және (4.173)-(4.174) нәтижелерiнен  кеңiстiгiнiң элементi екенiн көру қиын емес. (4.183) өрнекке Гронуолл теңсiздiгiн қолдану арқылы  және тұжырымы алынады.

# ҚОРЫТЫНДЫ

Ұсынылып отырған диссертациялық жұмыстағы кiрiспеде зерттеу тақырыбының өзектiлiгi мен ғылыми жаңалығы, теориялық және практикалық құндылығы, зерттеу әдiстерi келтiрiлдi, сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың қысқаша мазмұны берiлдi.

Көмекшi нәтижелер бөлiмiнде диссертациялық жұмыста алынған нәтижелердi тұжырымдау үшiн математикалық және функционалдық анализ курсынан, сұйықтар механикасы теориясынан белгiлi функционалдық кеңiстiктер мен белгiлеулер енгiзiледi, сонымен қатар қажеттi анықтамалар, леммалар, теоремалар, алгебралық және функционалдық теңсiздiктер келтiрiлдi.

Алынған нәтижелер:

­­ - Сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Сызықты интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Оң жағы арнайы сызықты емес интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Глобалды шешiлiмдi болатын интегро-дифференциалдық КельвинФойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмiнiң бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Арнайы интегралдық қосымша шартпен берiлген сызықты емес интегро-дифференциалдық Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн керi есебiнiң әлсiз және әлдi шешiмдерiнiң уақыт бойынша локалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Сызықты емес жылу көзiмен берiлген p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есебiнiң әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Абсорбция мүшемен берiлген сызықты p-Лапласианды псевдопараболалық теңдеу үшiн керi есебiнiң әлсiз шешiмiнiң уақыт бойынша локалды және глобалды бар болуы мен жалғыздығы дәлелдендi;

- Бiртектi емес сұйықтықтар үшiн бастапқы тығыздығы вакуумге айналатын Кельвин-Фойгт жүйесi үшiн бастапқы-шеттiк есебiнiң әлдi шешiмiнiң бар болуы мен жалғыздығы, регулярлығы дәлелдендi.

Диссертациялық жұмысты орындау барысында алынған негiзгi нәтижелер [68, 69, 97–106] жұмыстарда жарияланды.

# ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР

* 1. Павловский В.А. К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров//Докл. АН СССР. — 1971. — Т. 200, № 4. — С. 809–812.
  2. Ладыженская О.А. О некоторых нелинейных задачах теории сплош- ных сред//Международный конгресс математиков. Тезисы докладов. — Москва: 1966. — P. 560–573.
  3. Zvyagin, V.G., Turbin M.V. The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin-Voigt//J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 168. — P. 157–308.
  4. Oskolkov A.P. Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voigt fluids and Oldroyd fluids//Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1989. — Vol. 179. — P.137–182.

1. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin. I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — New York: Marcel Dekker, 1999.
2. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications.— Berlin: De Gruyter, 2011.
3. Ramm A.G. Inverse problems, Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering — New York: Springer, 2005.
4. Leray, J. Etude de diverses ´equations int´egrales nonlin´eaires et de quelques probl´emes que pose l’hydrodynamique//J. Math. Pures. Appl. — 1933. — Vol. 12. — P. 1–82.
5. Ladyzhenskaya, O.A. Mathematical problems in the dynamics of a viscous incompressible fluid//O.A. Ladyzhenskaya. —Moscow: GIFML, 1961.
6. Kato T. Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in Rd//J. Funct. Anal. — 1972. — Vol. 9. — P. 296–305.
7. Temam R. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis— Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1977.
8. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non liniaires — Paris: Dunod, 1969.
9. Sedov L. Mechanics of Continuous Media II — Moscow: MIR Editions, 1997.
10. da Veiga H.B., Valli A. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids I//Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1980. — Vol. 63. — P. 151–168.
11. da Veiga H.B., Valli A. On the Euler equations for nonhomogeneous fluids II// Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. —1980. — Vol. 73. — P. 338–350.
12. Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary value problems in the mechanics of inhomogeneous fluids. — Novosibirsk: Science, 1983. — С. 320.
13. Simon J. Nonhomogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density, and pressure//SIAM J. Math. Anal. — 1990.— Vol. 5. — P. 1093–1117.
14. Choe H.J., Kim H. Strong solutions of the Navier-Stokes equations for nonhomogeneous incompressible fluids//Comm. Part. Diff. Equations. —1984. — Vol. 28, no. 5-6. — P. 1183–1201.
15. Baldybek Zh., Otelbaev M., Smagulov Sh. A method for the approximate solution of an initial-boundary value problem for the Navier-Stokes equations//Doklady Mathematics. — 2002. — Vol. 66, no. 2. — P. 206–209.
16. Baldybek Zh., Otelbaev M., Smagulov Sh. One of the approximated method of solving initial- value-edged problem of Navier-Stocks equation// Doklady Akademii Nauk. — 2002. — Vol. 386, no. 4. — P. 439–443.
17. Смагулов Ш., Орунханов М. Метод фиктивных областей для уравнений Навье–Стокса с неоднородными граничными условиями//Матем. моделирование. —2000. —Т.12, №10. — С.121–127.
18. Danaev N.T., Smagulov Sh., N.T., Temirbekov N.M. Numerical solution of Navier-Stokes equations for an incompressible liquid in channels with a porous insert//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 1995. — Vol. 36, no. 5. — P. 658–665.
19. Данаев Н.T., Смагулов Ш., Темирбеков Н.М. Об одном классе итера- ционных схем для решения сеточных уравнений Навье–Стокса// Сиб. журн. вычисл. матем. — 2002.— Т. 5, № 3. — С. 225–231.
20. Ladyzhenskaya O.A. Sixth problem of the millennium: Navier-Stokes equations, existence and smoothness//Russian Mathematical Surveys. — 2003. — Vol. 2. — P. 251–286.
21. Vasin I.A. A nonlinear inverse problem of the simultaneous reconstruction of the evolution of two coefficients in Navier–Stokes equations. II//Differ. Uravn. — 1997. — Vol. 8. — P. 1095–1100.
22. Abylkairov U.U. Odnoznachnaya razreshimost zadachi protekaniya dlya 2D-3D sistemy Navier-Stokesa.II//Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 17, no. 3. — P. 11–18.
23. Abylkairov U.U., Aitzhanov S.E. Inverse problem for non-stationary system of magnetohydrodynamics//Boundary Value Problems. — 2015. — Vol. 1. — P. 1–17.
24. Jenaliyev M.T., Bektemesov M.A., Yergaliyev M.G. On an inverse problem for a linearized system of Navier-Stokes equations with a final overdetermination condition //Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2023.
25. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.T., Yergaliyev M.G. On the numerical solution of one inverse problem for a linearized two-dimensional system of Navier-Stokes equations//Opuscula Mathematica. — 2022. — Vol. 42, no.5. — P.709–725.
26. Fursikov A.V., Imanuvilov O.Yu. Exact controllability of the Navier–Stokes and Boussinesq equations//Uspekhi Mat. Nauk. — 1999. — Vol. 54:3. — P. 93–146.
27. Chebotarev A.Y. Inverse problems for stationary Navier-Stokes systems//Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2014. — Vol. 54, no. 3. — P. 537–545.
28. Fan J., Nakamura G. Well-posedness of an inverse problem of Navier–Stokes equations with the final overdetermination//Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2009. — Vol. 17, no. 6. — P. 565–584.
29. Imanuvilov O.Yu., Yamamoto M. Remark on boundary data for inverse boundary value problems for the Navier–Stokes equations//Inverse Problems. — 2015. — Vol. 10.
30. Joseph D.D. Fluid dynamics of viscoelastic liquids. — New York: Springer-Verlag, 1990.
31. Wilkinson W.L. Non-Newtonian liquids — Moscow: Mir, 1964. — P. 216.
32. Litvinov V.G. Nonlinear viscous fluid motion — Moscow: Nauka, 1982. — P. 376.
33. Chhabra R.P., Richardson J.F. Non-Newtonian Flow and Applied Rheology: Engineering Applications. — Oxford: Butterworth- Heinemann, 2008. — P. 536.
34. Zhikov V.V., Pastuk S.E. On the solvability of the Navier-Stokes system for a nonhomogeneous non-Newtonian fluid//Translated from the Russian in Dokl. Math. — 2009. — Vol. 79. — P. 403–407.
35. Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids//Commun. Math. Sci. — 2019. — Vol. 17, no. 7. — P. 1915–1948.
36. Antontsev S.N., Khompysh Kh. Generalized Kelvin-Voigt equations with p-Laplacian and source/absorption terms//J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 456, no. 1. — P. 99–116.
37. Antontsev S.N., Khompysh Kh. Kelvin-Voight equation with p-Laplacian and damping term: Existence, uniqueness and blow-up //J. Math. Anal. Appl. — 2017. — Vol. 446, no. 2. — P. 1255–1273.
38. Karazeeva N.A. Solvability of initial boundary value problems

for equations describing motions of linear viscoelastic fluids// Journal of Applied Mathematics. — 2005. — Vol. 25, no. 8. — P. 59–80.

1. Осколков, А.П. О единственности и разрешимости в целом краевых задач для уравнений движения водных растворов полимеров// Зап. научн. сем. ЛОМИ. —1973. —Т. 38. — С.98–136.
2. Oskolkov A.P. Initial boundary-value problems with a free surface condition for the modified Navier-Stokes equations//J. Math. Sci. — 1997. — Vol. 84, no. 1. — P. 873–887.
3. Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. Kelvin-Voigt equations perturbed by anisotropic relaxation, diffusion and damping//J. Math. Anal. Appl. — 2019. — Vol. 473. — P. 1122–1154.
4. Yushkov E.V. On the blow-up of a solution of a non-local system of equations of hydrodynamic type//Izv. Math. — 2012. — Vol. 76, no.1. — P.190–213.
5. Levant B., Ramosa F., Titi E.S. On the statistical properties of the 3D incompressible Navier- Stokes-Voigt model//Commun. Math. Sci. — 2010. — no. 1. — P. 277–293.
6. Bul´ıˇcek M., Rajagopal K.R. On Kelvin-Voigt model and its generalizations// Evolution Equations and Control Theory. — 2012. — no. 1. — P. 17–42.
7. Kalantarov V. K., Levant B., Titi E.S. Gevrey regularity for the attractor of the 3D Navier- Stoke-Voight equations//J. Nonlinear Sci. — 2009. — no. 19. — P.133–152.
8. Ramos F., Titi E.S. Invariant measures for the 3D Navier-Stokes-Voigt equations and their Navier-Stokes limit//Discrete Contin. Dyn. Syst. —2010. — no.1. — P.375–403.
9. Abylkairov U.U., Khompysh Kh. An inverse problem of identifying the coefficient in Kelvin- Voight equations//Applied Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 9. — P. 5079–5088.
10. Kumar P., Kinra K., Mohan M.T. A local in time existence and uniqueness result of an inverse problem for the Kelvin-Voigt fluids// arXiv:2103.14448v1. —2021.
11. Fedorov V.E., Urasaeva A.V. An inverse problem for linear Sobolev type equation//Journal of Inverse and Ill-posed Problems. — 2004. — Vol.12. — P. 387–395.
12. Fedorov V.E., Ivanova N.D. Inverse problem for Oskolkov’s system of equations//Mathematical Methods in the Applied Sciences.— 2017. —Vol. 40, no. 17. — P. 6123–6126.
13. Antontsev S.N., Khompysh Kh. An inverse problem for generalized Kelvin-Voigt equation with p-Laplacian and damping term//Inverse Problems. — 2021. — Vol. 37.
14. Khompysh Kh. Identification of right hand side nonlinear Kelvin-Voigt equations //Vestnik KazNPU after Abay. — 2016. — Vol. 4. — P. 123–131.
15. Khompysh Kh., Kenzhebai Kh. An inverse problem for Kelvin–Voigt equations perturbed by isotropic diffusion and damping//Math. Meth. in the App. Sci. —2022. —Vol. 7. — P.3817–3842.
16. Khompysh, Kh. Solvability of the initial-boundary value problem of thermal convection with the slip condition for the equations of the Kelvin-Voigt fluid// Vestnik KazNTU im. K.I. Satpayev, scientific journal.— 2010. —Vol. 2. — P.178–182.
17. Barnes H.A. A Handbook Of Elementary Rheology..A. Barnes. — Aberystwyth: Cambrian Printers, 2000.
18. Khompysh Kh., Nugymanova N.K. Inverse Problem For Integro-Differential Kelvin-Voigt Equation//Journal of Inverse and Ill- Posed Problems. — 2022.
19. Khompysh, Kh. Inverse problem with integral overdetermination for system of equations of Kelvin-Voight fluids//Advanced Materials Research. — 2013. — Vol.705. — P. 15–20.
20. Chebotarev A.Y. Determination of the right-hand side of the Navier-Stokes system of equations and inverse problems for the thermal convection equations//Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 51, no. 12. — P.2146–2154.
21. Fan J., Di Cristo M., Jiang Y., Nakamura G. Inverse viscosity problem for the Navier–Stokes equation//Journal of Mathematical Analysis and Applications. —2010. — Vol.365, no. 2. — P. 750–757.
22. Jiang Y., Fan J., Nagayasu S., Nakamura G. Local solvability of an inverse problem to the Navier-Stokes equation with memory term// Inverse Problems.— 2020.
23. Antontsev S.N., de Oliveira H.B., Khompysh Kh. The classical Kelvin-Voigt problem for nonhomogeneous and incompressible fluids: existence, uniqueness and regularity//Nonlinearity. —2021. —Vol. 34. — P. 3083– 3111.
24. Ladyzhenskaya O.A. On the global unique solvability of some two-dimensional problems for the water solutions of polymers//J. Math. Sci. —2000.— Vol. 99. — P. 888–897.
25. Ladyzhenskaya O.A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow II. — Moscow: Nauka, 1970.
26. Khompysh Kh., Shakir A.G. Inverse problems for Kelvin-Voigt system with memory: global existence and uniqueness//Lobachevskii journal of mathematics. —2023. —Vol. 44, no. 10. — P.4341–4352.
27. Khompysh Kh., Shakir A.G. Time dependent inverse source problems for integro- differential Kelvin-Voigt system//Trends in Mathematics Series: Research Perspectives Ghent Analysis and PDE Center. — 2023.
28. Asanov A., Atamanov E.R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations. — Berlin: De Gruyter, 1997.
29. Al’shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. — Berlin: De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 15. Walter de Gruyter Co., 2011.
30. Ting T.W. Certain nonsteady flows of second-order fluids//Archive for Rational Mechanics and Analysis. — 1963. —Vol.14. — P.1–26.
31. Barenblatt G., Zheltov I., Kochina I. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks//Journal of Applied Mathematics and Mechanics. —1960. —Vol.24. — P.1286–1303.
32. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — Москва: Недра, 1972.
33. Huilgol R. A second order fluid of the differential type//International Journal of Non-Linear Mechanics. —1968. — Vol.3. — P.471–482.
34. Favini A., Lorenzi A. Differential Equations, Inverse and Direct Problems. — New York: Taylor and Francis Group, 2006.
35. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — New-York-Berlin-Heidelberg: Springer, 1998.
36. Аблабеков Б.С. Обратные заадчи для псевдопараболического уравне- ния. — Бишкек: Илим, 2001.
37. Kozhanov A.I. On the solvability of inverse coefficient problems for some Sobolev-type equations//Belgorod State University Scientific Bulletin. — 2010. —Vol. 18, no. 5. —P. 88–97.
38. Khompysh Kh. Inverse problem with integral overdetermination for system of equations of Kelvin-Voight fluids//Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. —2017. —Vol.216. — P.382–387.
39. Lorenzi A., Paparoni E. Identification problems for pseudoparabolic integrodifferential operator equations//Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. —1997. —Vol. 5. — P.235–253.
40. Lyubanova A.Sh., Tani A. An inverse problem for pseudoparabolic equation of filtration. The existence, uniqueness and regularity//Applicable Analysis. —2011. —Vol. 90. — P.1557–1568.
41. Lyubanova A.Sh., Velisevich A.V. Inverse problems for the stationary and pseudoparabolic equations of diffusion//Applicable Analysis.— 2019. — Vol.98. — P.1997–2011.
42. Antontsev S.N., Aitzhanova S.E., Ashurova G.R. An inverse problem for the pseudo-parabolic equation with p-Laplacian//Evolution equation and control theory. —2022. —Vol. 11, no. 2. —P.399–414.
43. Yaman M. Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation//Journal of Inequalities and Applications. — 2012. —Vol. 2012. —P. 1–8.
44. Barret J.W., Liu W.B. Finite element approximation of the parabolic p-Laplacian//SIAM Journal on Numerical Analysis. —1994. —Vol. 31, no. 2. — P. 413–428.
45. Galdi G.P. An introduction to the Mathematical Theory of the Navier- Stokes Equations.Steady-State Problems. — New York: Springer, 2011.
46. Maz’ya V. Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations.— Heidelberg: Springer, 2011.
47. Brezis H. Analyse fonctionnelle. — Paris: Masson, 1983.
48. Lu B., Shi X., Zhong X. Global existence and large time asymptotic behavior of strong solutions to the Cauchy problem of 2D density-dependent Navier-Stokes equations with vacuum//Comm. Part. Diff. Equations. —1984.

— Vol. 28, no. 5-6. — P. 1183–1201.

1. Constantin P., Foias C. Navier-Stokes equations. — Chicago: The University of Chicago Press, 1988.
2. Antontsev S.N., de Oliveira H.B. Cauchy problem for the Navier-Stokes-Voigt model governing nonhomogeneous flows//Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Mat. RACSAM. — 2022. — Vol. 116, no. 4.
3. Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A. Unique solvability of an initial-and boundary-value problem for viscous incompressible nonhomogeneous fluids//J. Soviet Math. —1978. —Vol. 9. — P. 697–749.
4. Di Perna R.J., Lions P.L. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces//Invent. Math. —1989. —Vol. 98, no.3. —P. 511–547.
5. Lions P.-L. Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Volume 1: Incompressible Models. — Oxford: Clarendon Press, 1996.
6. Desjardins B. Global existence results for the incompressible density- dependent Navier-Stokes equations in the whole space//Differential Integral Equations. —1997. —Vol. 10, no.3. —P.587–598.
7. Shakir A., Kabidoldanova A., Khompysh Kh. Solvability of a nonlinear inverse problem for a pseudoparabolic equation with p-Laplacian//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. —2021. —Vol. 110, no.2. — P. 35–46.
8. Khompysh Kh., Shakir A. An inverse source problem for a nonlinear pseudoparabolic equation with p-Laplacian diffusion and damping term//Quaestiones Mathematicae. —2022. —Vol. 46, no. 9. — P. 1889– 1914.
9. Shakir A. Blow-up of solutions the integro-differential Kelvin-Voigt equation//Bulletin of Physics and Mathematical Sciences. — 2022.—Vol. 79, no.3. — P.46–52.
10. Shakir A. Global solvability of inverse problem for linear Kelvin-Voigt equations with memory//Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. —2023. —Vol. 118, no. 2. —P.30–41.
11. De Oliveira H.B., Khompysh Kh., Shakir A. Strong solutions for the Navier-Stokes-Voigt equations with non-negative density. Submitted. — 2023.
12. Khompysh Kh., Kabidoldanova A., Shakir A. Inverse problems for nonlinear Navier-Stokes-Voigt system with memory//Chaos, solitons and fractals. — 2023. —Vol.177, no.12.
13. Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for Kelvin-Voigt equations with memory//Materials of the conference:Inverse and ill-posed problems in natural sciences. — Almaty: 2023.— P. 23.
14. Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for pseudoparabolic equations with p- Laplacian//Materials of the conference: Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. — Almaty: 2021.— P. 91.
15. Khompysh Kh., Shakir A. An inverse problem for pseudoparabolic equations with p- Laplacian//Materials of the conference: Problems of modern mathematics and its applications. — Bishkek — Issyk-Kul: 2021.— P. 84.
16. Khompysh Kh., Shakir A. Inverse problem for Kelvin-Voigt equations with memory//Materials of the conference:Traditional international April scientific conference in honor of the Day of Science Workers of the Republic of Kazakhstan. — Almaty: 2023.— P. 138.