Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова

УДК 510.67 На правах рукописи

ПОПОВА НАДЕЖДА ВИКТОРОВНА

Совершенные фрагменты с условием выпуклости и их классы моделей

8D05401-Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,

профессор

А.Р. Ешкеев

Зарубежный научный консультант

доктор физико-математических наук,

профессор

А.С. Морозов

(Новосибирский государственный университет, Россия)

Республика Казахстан

Караганды, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

[ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ 3](#_Toc156897583)

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc156897584)

[1 НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИКО МОДЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ 12](#_Toc156897585)

[1.1 Необходимые сведения из классической теории моделей 12](#_Toc156897586)

[1.2 Введение в теорию моделей для йонсоновских теорий 31](#_Toc156897587)

[1.3 Экзистенциально замкнутые структуры. 43](#_Toc156897588)

[2. ВВЕДЕНИЕ В ГОЛОГРАФИЧНЫЕ ЙОНСОНОВСКИЕ ТЕОРИИ 46](#_Toc156897589)

[2.1. Понятие голографичности структуры 46](#_Toc156897590)

[2.2 Теорема существования голографичной модели 48](#_Toc156897591)

[3 Основные результаты 57](#_Toc156897592)

[3.1 Ядерные йонсоновские теории 57](#_Toc156897593)

[3.2 Малые модели выпуклых фрагментов определимых подмножеств 62](#_Toc156897594)

[3.3 Замыкание специальных атомных подмножеств семантической
модели 64](#_Toc156897595)

[3.4 Фрагмент теоретического множества и его строго минимальный центральный тип 67](#_Toc156897596)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 72](#_Toc156897597)

[Список использованных источников 75](#_Toc156897598)

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

|  |  |
| --- | --- |
|  | Сигнатура |
|  | язык данной сигнатуры |
|  | Теория |
| , , … | Модели |
| , , ...  | элементы моделей |
|  | Кортежи |
| ,  | Формулы |
|  | Кванторы |
|  | Отображение |
|  | элементарная теория модели  |
|  | Модели и элементарно эквивалентны |
|  | модель является подмоделью модели  |
|  | модель является элементарной подмоделью модели  |
|  | Модели и изоморфны |
| JEP | свойство совместного вложения (Joint Embeding Property) |
| AP | свойство амальгамы (Amalgam property) |
|  | семантическая модель йонсоновской теории  |
|  | центр йонсоновской теории  |
|  | оболочка Кайзера |
| Mod() | класс всех моделей теории  |
|  | класс (конечных) генерических моделей |
|  | класс всех экзистенционально замкнутых моделей теории  |
|  | решётка экзистенциальных формул языка L с n свободными переменными |
|  | компаньон – операция |
|  | отношение косемантичности |
| JSp() | йонсоновский спектр модели  |
| RSp() | робинсоновский спектр модели  |
|  | йонсоновский фрагмент йонсоновского множества Х |
|  | сигнатура абелевых групп |
|  | Теория абелевых групп |
| AAP | Атомная алгебраически простая |
| EAP | Экзистенциально-алгебраически простая |

# ВВЕДЕНИЕ

**Общая характеристика работы.**

В настоящей диссертационной работе исследованы теоретико-модельные вопросы специальных классов теорий, которые вообще говоря, неполны, но удовлетворяют дополнительным условиям. Эти условия были определены Б. Йонсоном и теории, которые удовлетворяют этим условиям, были названы йонсоновскими. В рамках изучения йонсоновских теорий естественным образом определяется понятие фрагмента – некоторой теории с фиксированными условиями. Данная диссертация посвящена изучению совершенных фрагментов с условием выпуклости и их классов моделей.

Исследование йонсоновских теорий по своей сути представляет класс задач относящихся к одному из разделов математической дисцилины, с названием теория моделей. Теория моделей исследует отношения между синтаксисом (формальные языки) и семантикой (структурами или интерпретациями) [1]. Эта дисциплина является разделом математической логики, который занимается изучением связи между формальными языками и их интерпретациями или моделями. Она возникла в начале прошлого века на стыке математической логики, универсальной алгебры, абстрактной алгебры, топологии и алгебраической геометрии. Джером Кислер, известный специалист в этой области, упоминает два исторически сложившихся направления развития теории моделей: запад и восток. Западная теория моделей изучает полные теории, а восточная теория изучает йонсоновские теории. Условные названия «Восток» и «Запад» сложились благодаря основоположникам теории моделей в Америке А. Робинсону, который жил в восточной части и А. Тарскому, жившему на западном побережье США [2].

При изучении йонсоновских теорий было замечено, что наиболее успешное описание таких теорий, было получено в случае существования модельного компаньона у этих теорий. Йонсоновская теория, имеющая модельный компаньон, который является ее центром, называется совершенной йонсоновской теорией. В этом случае из класса всех йонсоновских теорий выделяется подкласс, который содержит все совершенные йонсоновские теории, причем описание обоих классов для фиксированной сигнатуры является не тривиальной задачей. Яркие примеры иллюстрирующий этот факт – теория групп и теория абелевых групп. Первая теория (теория групп) является примером несовершенной йонсоновской теории, но теория абелевых групп, которая является подклассом класса всех групп, уже является примером совершенной йонсоновской теории. Помимо этого, если рассматривать классы моделей даже совершенной йонсоновской теории, то можно легко построить примеры, когда йонсоновская теория этих классов будет несовершенной [3].

Выпуклые теории были определены А. Робинсоном [1], это подкласс индуктивных теорий, удовлетворяющих условию, что пересечение любых двух ее моделей является снова моделью этой теории, при условии, что это пересечение не пусто. В случае, когда это пересечение никогда не пусто, такая теория называется сильно выпуклой [4]. Совершенные фрагменты с условием выпуклости – это подмножества выпуклых теорий, которые также обладают свойством совершенности в йонсоновском смысле [5].

Одним из синтаксических инвариантов произвольной йонсоновской теории является ее центр – элементарная теория особой модели данной йонсоновской теории и модель носит название семантической. Эта модель является универсально-однородной в смысле «восточной» теории моделей, при этом хорошо известно, что «западный» аналог универсально-однородной модели является насыщенной моделью. В случае йонсоновской теории это не так. В случае если это так, то ее семантическая модель является насыщенной, что позволило назвать такие йонсоновские теории совершенными.

Изучение совершенных йонсоновских теорий повлекло за собой создание нового технического аппарата для получения соответствующих результатов, вообще говоря, неполных теорий, что связано с теми трудностями, которые появляются при «бедности» таких теорий и отсутствия аналогов известных понятий и связанных с ними результатов из арсенала полных теорий, то есть «западной» теории моделей.

Совмещение требований совершенности, выпуклости для фиксированных фрагментов заданной йонсоновской теории создает новые возможности для изучения, как «восточной», так даже и «западной» теории моделей. В связи с тем фактом, что любую полную не йонсоновскую теорию можно преобразовать в некотором обогащении языка в йонсоновскую теорию с помощью процесса преобразования, который носит название морлезации.

Взаимодействие между совершенными и выпуклыми моделями в области теории моделей является свидетельством богатства этой области. Исследованием свойств, систематизации отдельных результатов и вопросами специальных классов теорий, которые, вообще говоря, неполны, но удовлетворяют дополнительным условиям, в том числе пересечению понятий совершенности теории и выпуклости моделей занимались А. Тарский, А. Робинсон, Т.Г. Мустафин, А.Р. Ешкеев и др.

Учитывая выше сказанные сложности изучения йонсоновских теорий можно заметить, что данное диссертационное исследование относится к достаточно известной и актуальной тематике как для «западной» так и «восточной» теории моделей. В первую очередь, данная работа связана с вопросами классификации йонсоновских теорий относительно различных важных теоретико-модельных понятий. Выделим основные понятия, которые имеют отношение к этой тематике. Существенным моментом является использование понятия выпуклости, как синтаксическими так и семантическими свойствами различных типов моделей. Основной акцент сделан на изучение счетных моделей, а именно моделей полученных с помощью некоторого оператора замыкания фиксированной предгеометрии. Синтаксические свойства используются при задании специальных видов счетных моделей за счет формул реализуемых йонсоновскими подмножествами семантической модели и различных комбинаций выпуклости, некоторой полноты, экзистенциальной простоты и совершенности фрагментов этих множеств. Также исследуется классическое понятие счетной категоричности и несчетной категоричности в рамках изучения фиксированных вышеуказанных фрагментов. Счетный случай категоричности изучался в аспекте исследования понятия голографичной модели. Несчетный случай категоричности изучался в связи с понятием сильной минимальности центрального типа центра фиксированной йонсоновской теории.

**Современное состояние темы и актуальность.** При изучении йонсоновских теорий, как было уже отмечено выше, в случае совершенности рассматриваемой теории были получены результаты позволившие перенести многие соответствующие теоремы «западной» теории моделей в «йонсоновскую» постановку этих проблем. При этом под фиксированностью данной постановки помимо предположения о частичной полноте теории рассматривались различные комбинации требований связанных с устройством йонсоновских подмножеств семантической модели данных йонсоновских теорий. В рамках этих исследованиях было замечено, что в силу ограниченности полноты и неэлементарности используемых подклассов классов всех моделей этих теорий, средств самой теории недостаточно для получения необходимых результатов. В связи с этим были рассмотрены специальные обогащения языка рассматриваемых теорий, и в этом обогащении первоначальные задачи с помощью понятия наследственности допустимых обогащений и нового понятия центрального типа был получен ряд результатов, позволяющий заметить прогресс в рамках изучения йонсоновских теорий, как совершенных, так и несовершенных. Несовершенность йонсоновской теории однозначно связана с неэлементарностью класса экзистенциально замкнутых моделей этой теории [6]. Заметим, что в результате процесса морлезации всегда получается совершенная йонсоновская теория, при этом основным моментом этого процесса является обогащение языка счетным числом одноместных предикатов. Но самая главная проблема, связанная с понятием наследственности допустимого обогащения – это тот факт, что на сегодняшний момент не известно описание этого понятия. И этот открытый вопрос является одним из трудных нерешенных вопросов связанных с понятием центрального типа. С другой стороны, зная свойства контрпримера для ненаследственных йонсоновских теорий, мы можем сделать вывод, что привлечение аппарата предгеометрии для изучения йонсоновских теорий неслучайно. И те дополнительные условия относительно оператора замыкания в утверждениях, связанных с центральным типом и сильной минимальностью центра рассматриваемой йонсоновской теории, обусловлены теоретико-модельными свойствами контрпримера ненаследственных йонсоновских теорий.

Изучение малых моделей, а это имеет отношение сугубо к счетным моделям, связано также с нерешенной проблемой в рамках изучения йонсоновских теорий. Хорошо известно, что простая и атомная модели равны друг другу, если они счётны в «западном» варианте теории моделей. В «восточном» варианте понятия атомности и простоты счетной модели обобщают и уточняют соответствующие «западные» аналоги. В связи с этим, эти понятия не эквивалентны, так как существуют соответствующие контрпримеры. Поэтому, так как на текущий момент, состояние этих двух открытых вопросов является нерешенной проблемой, естественным было бы считать содержание проблематики данной диссертации достаточно актуальным.

**Основная цель работы и научная новизна.** Как следует из предыдущего пункта, изучение теоретико-модельных свойств семантической модели теории, удовлетворяющей основополагающим задачам тематики диссертации, является актуальной задачей. В связи с изучением данной проблематики в рамках фиксированных фрагментов рассматриваемой йонсоновской теории получить в работе результаты, которые частично отвечают на вопросы, вытекающие из вышеуказанных двух больших проблем. Так как все понятия, представленные в данной диссертации, являются новыми и из этого можно сделать вывод, что полученные результаты относительно этих новых понятий в рамках изучения фрагментов фиксированных подмножеств семантической модели заданной йонсоновской теории являются новыми и ранее не рассматривались.

**Задачи исследования:**

1. Получить теорему существования голографичной модели для совершенной йонсоновской теории с фиксированным центром.
2. В рамках изучения совершенной ядерной теории получить описание ее ядерной модели и связь этой модели с оболочкой Кайзера такой теории.
3. В рамках изучения экзистенциально алгебраически простой теории получить описание алгебраически простых моделей данной теории относительно ядерности модели, при условии существования такой модели.
4. В рамках изучения совершенной, выпуклой, экзистенциально полной и экзистенциально простой йонсоновской теории получить описание ядерных моделей ее центра.
5. Изучить теоретико-модельные свойства фрагмента алгебраически простого множества, при условии совершенности и экзистенциальной простоты с ограниченной полнотой.
6. В рамках изучения фиксированных фрагментов получить описание алгебраически простых множеств, которые задают эти фрагменты.
7. В рамках изучения выпуклых, совершенных, экзистенциально простых фрагментов с ограниченной полнотой получить описание существования ядерной модели центра этого фрагмента.
8. Изучить фиксированные робинсоновски наследственные многообразия относительно алгебраической замкнутости.
9. Описать сильно минимальные центральные типы из класса косемантичности из фиксированного робинсоновски наследственного спектра многообразия.

**Объект исследования –** фрагменты фиксированных подмножеств семантической модели заданной йонсоновской теории. В частности совершенные фрагменты с условием выпуклости.

**Предмет исследования:** Йонсоновские теории, а также фиксированные фрагменты с условием выпуклости и их классы моделей.

**Методика исследования.** В работе используются методы классической теории моделей и универсальной алгебры, а также метод переноса свойств первого порядка центра фиксированных фрагментов на сам фрагмент.

**Теоретическая и практическая ценность работы.**

Полученные в работе результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при изучении замыканий определимых подмножеств семантической модели для фиксированных йонсоновских теорий. Современные вопросы теории моделей, при которых выделяется особый класс задач в рамках изучения индуктивных теорий, которые, вообще говоря, не полны. В связи с этим данная проблема определяет без сомнения востребованные вопросы современной теории моделей, чем и обоснована ее актуальность.

Так как вопросы, определяющие данную тематику, относятся к классическим проблемам теории моделей, можно заключить, что научное и прикладное значение связано со всеми возможными применениями теории моделей в различных областях теоретической и прикладной математики, а также результаты исследования могут использоваться при чтении спецкурсов на математических факультетах университетов.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся:

1. *Теорема 2.2.3* [7, c. 216]. Если совершенная йонсоновская теория центр которой является универсально-аксиоматизируемой теорией, и , то , т.е. такая теория имеет голографичную модель.
2. *Теорема 3.1.1* [8]. Для любой ядерной совершенной йонсоновской теории следующие условия эквивалентны:
3. – ядерная модель теории .
4. жестко вкладывается в любую экзистенциально замкнутую модель .
5. – модель центра теории и существуют экзистенциальные формулы и для такие, что

и

1. *Следствие 3.1.1* [8, c. 107].является ядерной моделью некоторой совершенной ядерной йонсоновской теории тогда и только тогда, когда является ядерной моделью оболочки Кайзера теории .
2. *Теорема 3.1.2* [6, c. 227]. Пусть – ядерная модель для некоторой экзистенциально алгебраически простой теории . Тогда следующие условия эквивалентны:
3. вкладывается в каждую экзистенциально замкнутую модель центра этой теории.
4. – алгебраически простая модель теории .
5. *Теорема 3.2.1* [9].является *-ядерной* моделью для некоторой совершенной, выпуклой, полной для экзистенциальных предложений экзистенциально простой йонсоновской теории тогда и только тогда, когда это *-ядрная модель ,* где *–* центр *.*
6. *Теорема 3.3.1* [10]. Пусть – некоторый фрагмент алгебраически простого множества и пусть фрагмента – совершенной экзистенциально простой теории, полной для -предложений. Тогда есть алгебраически простое множество тогда и только тогда, когда есть атомное множество.
7. *Теорема 3.3.2* [11, с. 101]. Пусть – выпуклый совершенный экзистенциально простой полный фрагмент для предложений некоторых множеств . Тогда следующие условия эквивалентны:
8. имеет ядерную модель;
9. если экзистенциальная и , то существует некоторая экзистенциальная формула и целое число такие, что

,

и , если , где – экзистенциальные предложения, то или .

1. *Теорема 3.4.2* [12].Пусть *–* робинсоновски наследственное многообразие *,* тогда для всякой алгебраически замкнутой моделиследует, что *.*
2. *Теорема* *3.4.5* [12, с.160]. Пусть – робинсоновски наследственное многообразие, есть наследственный класс, – теоретическое множество, определяемое некоторой сильно минимальной -формулой , – некоторая -полная конечно аксиоматизируемая йонсоновская теория, определённая предложением , тогда следующие условия эквивалентны:
3. ;
4. центральный тип класса сильно минимален.

**Достоверность и обоснованность проведенных исследований** обеспечиваются строгими математическими доказательствами и анализом постановок задач относительно известных примеров понятий, рассмотренных в диссертации.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях и научных семинарах по профилю диссертации:

* традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования (Алматы, 2020);
* международная конференция «Мальцевские чтения – 2020» (Новосибирск, 2020);
* традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. (Алматы, 2021);
* международная научная конференция, посвященная 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. «Актуальные задачи математики, механики и информатики» (Караганда, 2022);
* международная научно-практическая конференция, посвященная 105-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова «Таймановские чтения – 2022» (Уральск, 2022);
* VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира «TWMS Congress-2023» (Turkestan, 2023);
* Совместное заседание Семинар «Теория моделей» имени Е.А. Палютина ИМ СО РАН (Palyutin Seminar on Model Theory) (Руководители: академик Ю.Л. Ершов, д.ф.-м.н., доцент С.В. Судоплатов) Семинар «Теория моделей» ИМММ МОН РК (Seminar on Model Theory) (Руководитель: член-корреспондент НАН РК Б.С. Байжанов);
* научный семинар под руководством профессора А.Р. Ешкеева (КарУ им. акад. Е.А. Букетова).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах. Из них 1 статья – в журнале, входящем в базу Scopus [12], 3 статьи опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан [8], [9], [11] и 8 работ – в материалах международных научных конференций [6], [7], [10], [13]-[17].

В работах, выполненных с соавторами, вклад каждого из соавторов является равным.

**Структура диссертации.** Диссертационная работа объемом 79 страниц, состоит из следующих структурных элементов: обозначения и сокращения, введение, три раздела, заключение, список использованных источников.

В первом разделе представлены основные понятия и результаты из курса теории моделей, которые необходимы для понимания содержания диссертации. Раздел состоит из трех параграфов, каждый из которых содержит информацию из классической теориии моделей, определения и утверждения относительно класса йонсоновских теорий и экзистенциально замкнутых теорий.

Второй раздел связан с изучением понятия голографичности структуры в рамках изучения теоретико-модельных свойств фиксированных йонсоновских теорий относительно понятия голографичности йонсоновской теории и ее моделей.

В третьем разделе представлены основные определения, утверждения и их доказательства, полученные в рамках диссертационного исследования.

Нумерация формул, теорем, лемм и замечаний в разделах трехзначная; первое число означает номер раздела, второе число означает номер подраздела (параграфа), третье – собственный номер формулы, теоремы, леммы и замечания соответственно внутри подраздела. Например, Определение 1.2.3 означает, что определение принадлежит первому разделу, второму параграфу и по счету оно третье в этом параграфе. Относительно ссылок на определения и утверждения следующее: авторство определений и утверждений не всегда совпадает с ссылкой, но в источнике, который приведен в ссылке можно найти и уточнить авторство. Если нет доказательства в утверждении, это означает, что оно хорошо известно и по номеру ссылки его можно извлечь из списка использованной литературы.

В работе используются стандартные общепринятые обозначения соответствующие тем ссылкам, которые задействованы в них.

**Благодарность**. Автор выражает искреннюю благодарность и признательность научному руководителю доктору физико-математических наук Ешкееву Айбату Рафхатовичу за постановку задачи, ценные советы при обсуждении научных результатов и всестороннюю поддержку при выполнении диссертационной работы, а также выражает глубокую признательность зарубежному научному консультанту доктору физико-математических наук Морозову Андрею Сергеевичу за внимание к работе, поддержку и ценные рекомендации.

# 1 НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе представлены основные понятия и результаты из курса теории моделей, которые необходимы для понимания содержания диссертации. Эти понятия и результаты являются хорошо известными и их авторство будет указываться в соответствующей ссылке, если оно известно нам. Раздел состоит из трех параграфов. В первом параграфе приведены необходимые сведения о полных теориях. Во втором параграфе приведены необходимые сведения о йонсоновских теориях. В третьем параграфе излагаются известные результаты о специальном классе моделей йонсоновских теорий, который состоит из класса экзистенциально замкнутых моделей фиксированных йонсоновских теорий. В качестве основных источников материалов по теории моделей были использованы «Справочная книга по математической логике» под редакцией Дж.Барвайса [2], курс по теории моделей К. Тент и М. Циглер [18] и учебное пособие по введению в теорию моделей А.Р. Ешкеева [19] и другие работы указанные в списке источников. Также мы опираемся на определения и утверждения, относительно йонсоновских теорий, из [20], [21] и некоторые результаты связанные с источниками, ссылки на которые указываются непосредственно.

**1.1 Необходимые сведения из классической теории моделей**

Приведем основные утверждения и необходимые понятия относительно нашего исследования. Все понятия, изложенные в данном параграфе диссертации, читатели могут найти в книгах [1], [2], [18], [19], [22]–[40], и других источниках по теории моделей.

Теория моделей изучает классы структур и их абстрактные свойства, в частности связь между свойствами теорий и свойствами классов их моделей. Теория – это набор предложений на языке, и предполагается, что все языки относятся к первому порядку.

Язык (также известный как алфавит или сигнатура) представляет собой набор констант, символов отношений и функций. Каждое отношение и символ функции имеют фиксированную местность в [18, с. 60].

Пусть *, ,*  – некоторые произвольные множества. Под сигнатурой , rдe *, , ,*  мы понимаем произвольный набор предикатных, функциональных и константных символов. В каждом конкретном случае сигнатура фиксируется. В частности, это множество может быть пустым.

Языком сигнатуры , или , называется множество всех формул, построенных с помощью символов данной сигнатуры. Например, язык – язык строгого линейного порядка, и – теория строгого линейного порядка [18, c. 60].

Если – бинарный предикатный символ, также можно писать для .

Моделью или алгебраической системой называется непустое множество , где каждому -местному предикатному символу из сопоставлено некоторое -местное отношение в , всякому -местному функциональному символу из сопоставлена некоторая -местная функция из , а каждой предметной константе из сопоставлен некоторый элемент множества [22]. Данное соответствие называется интерпретацией символов данной сигнатуры, другими словами, множество – это область интерпретации. так же называется универсумом или носителем модели . Мощностью модели называется мощность её носителя: .

Если есть модель сигнатуры , то говорят, что язык лежит в основе системы . Поэтому в тексте диссертации мы иногда не будем различать язык и сигнатуру . Также, далее по тексту, если это понятно из контекста, мы будем отождествлять модель с её носителем и обозначать модель также как и её носитель прописными буквами латинского алфавита.

Пусть – некоторое множество предложений языка . Множество называется непротиворечивым или совместным, если у него имеется хотя бы одна модель. Под теорией понимается всякое непротиворечивое множество предложений языка данной сигнатуры замкнутое относительно выводимости [23].

Если – теория и – формула, мы говорим, что синтаксически влечет , если существует формальный вывод из вместе с аксиомами равенства в одном из стандартных исчислений доказательств [24]. Более того, мы говорим, что влечет , если каждая модель теории с присвоением свободных переменных является моделью .

Теория *Т* называется полной в языке , если для любого предложения либо , либо . Множеством аксиом теории называется всякое множество предложений, обладающее теми же самыми следствиями, что и [23]. Теорию можно задать с помощью выписывания конечного или бесконечного множества её аксиом. Теория называется конечно аксиоматизируемой, если она обладает конечным множеством аксиом. Так, например, конечно аксиоматизируемыми теориями являются теория групп, колец, полей, линейных порядков, булевых алгебр и другие [24, с. 108]. Если – некоторая модель сигнатуры , то множество всех предложений, истинных в , обозначаемое, как также является теорией, причём полной.

Рассмотрим – класс моделей сигнатуры . Теорией класса называется множество всех предложений , истинных в любой модели и обозначается . Например, если – класс конечных групп, то теория конечных групп – множество всех предложений, истинных во всех конечных группах [2, с.58].

Класс называется элементарным классом или -классом, если – класс всех моделей некоторой теории . Так, например, класс всех групп будет элементарным классом [2, с. 58].

Модели и сигнатуры называются элементарно эквивалентными, , если всякое предложение, истинное в , истинно и в , т.е. [2, с. 58].

Модель называется подмоделью модели и обозначается , если носители и , соответственно, этих моделей находятся в отношении , а интерпретация всех предикатных, функциональных и константных символов в модели является ограничением соответствующей интерпретации в модели [2, с. 58].

Для подмоделей верен следующий результат.

*Теорема 1.1.1* [2, с. 60]. Пусть и – модели сигнатуры , . Тогда для любой атомной формулы языка , для всякого кортежа выполняется

.

*Определение 1.1.1* [2, с. 60]. Формула вида , где – бескванторная формула, называется универсальной формулой или -формулой.

Теория называется универсальной, если она эквивалентна некоторому множеству универсальных предложений. Так, например, в сигнатуре теория групп является универсальной.

Формула вида , где – бескванторная формула, называется экзистенциальной формулой или -формулой.

*Определение 1.1.2* [18, с. 2]. Пусть – язык, и – модели сигнатуры и :

1. является гомоморфизмом, если для всех и всех :
2. для всех константных символов ;
3. Если , то для всех -местных символов отношения ;
4. для всех -местных функциональных символов .
5. является вложением, если он является инъективным гомоморфизмом и тогда и только тогда, когда для всех -местных символов отношения
6. является изоморфизмом, если это сюръективное вложение;
7. является автоморфизмом, если он является изоморфизмом и .

Если существует изоморфизм между моделями и , мы говорим, что и изоморфны.().

*Определение 1.1.3* [18, с. 5]. Предположим, что и являются моделями сигнатуры :

1. является подмоделью если и является вложением из в ;
2. является расширением , если является подмоделью .

*Определение 1.1.4* [18, с. 6]. Предположим, что и – модели сигнатуры и :

1. является элементарным вложением, если для всех и всех формул , имеем тогда и только тогда, когда ;
2. – элементарная подмодель , а – элементарное расширение ( ), если и – элементарное вложение из в ;
3. и элементарно эквивалентны (), если для всех предложений имеем , если и только если .

Например является подмоделью , но не элементарной подмоделью, одноко является элементарной подмоделью .

*Теорема 1.1.2.* (О полноте) [18, c. 15]. Предположим, что – язык, – теория и . Тогда тогда и только тогда, когда .

Из теоремы о полноте получаем следующий результат.

Множество формул называется совместным, если у него есть модель.

*Теорема 1.1.3* (О компактности) [18, с. 19]. Множество формул совместно тогда и только тогда, когда любая конечная часть этого множества является совместным множеством формул.

Ниже приводится одно из основных применений компактности.

*Лемма 1.1.1* [18, с. 20]. Если теория имеет сколь угодно большие конечные модели, то имеет бесконечную модель.

Если – бесконечный кардинал, теория называется -категоричной, если она имеет ровно одну модель мощности с точностью до изоморфизма [18, c. 60].

Например, теория векторных пространств над фиксированным конечным полем -категорична для всех бесконечных кардиналов , а теория плотных линейных порядков без концевых элементов является -категоричной, но не -категоричной для любого несчетного кардинала [18, с. 60].

*Теорема 1.1.4* (Морли) [18, с. 60]. Если теория счетного языка -категорична для некоторого несчетного кардинала, то она -категорична для любого несчетного кардинала.

*Теорема 1.1.5* (Лёвенгейм-Скулем) [18; 24]. Пусть – модель, и – бесконечный кардинал:

1. Если , то имеет элементарную подструктуру мощности , содержащую ;
2. Если бесконечно и , то имеет элементарное расширение мощности .

Если – теория, пусть обозначает класс моделей, которые являются моделями теории . Класс моделей будем называть аксиоматизируемым или элементарным, если для некоторой теории . Более того, называется конечно аксиоматизируемым, если для некоторой конечной теории .

*Лемма 1.1.2* [18, c. 24]. Класс моделей является конечно аксиоматизируем тогда и только тогда, когда и , и его дополнение аксиоматизируемы.

Следующий критерий показывает, что все категоричные и несчетно категоричные теории уже полны.

*Лемма 1.1.3* (Критерий Вота) [16; 25]. Предположим, что – бесконечный кардинал, – язык с и – непротиворечивая теория без конечных моделей. Если -категорична, то она полна.

Например, язык , где – символ бинарного отношения, а – теория отношения эквивалентности ровно с двумя классами, оба из которых бесконечны; аксиомы являются аксиомами отношений эквивалентности вместе с аксиомами *,*  и , …, для всех . Легко заметить, что любые две счетные модели являются изоморфными. Однако не является -категоричной ни для какого несчетного кардинала . Чтобы убедиться в этом, пусть будет моделью теории мощности , где оба класса эквивалентности имеют мощность , и пусть будет моделью мощности , где один класс эквивалентности имеет мощность , а другой – .

Теория плотных линейных порядков без концевых элементов определяется как теория (строгих) линейных порядков без концевых элементов языка с дополнительными аксиомами *, и* . Например и являются моделями .

*Теорема 1.1.6* [25, с. 48]. -категорична.

*Теорема 1.1.7* [18, с. 25]. не является -категоричным ни для какого несчетного кардинала .

Если – поле, алгебраическим замыканием является поле , которое одновременно алгебраически замкнуто и алгебраично над .

*Лемма 1.1.4* [18, c. 25]. Любые два алгебраически замкнутых поля одинаковой характеристики и степени трансцендентности изоморфны.

Обозначим через теорию алгебраически замкнутых полей характеристики , где или – простое число. не -категорична, а -категорична для всех несчетных кардиналов . Это следует из того, что два алгебраически замкнутых поля с характеристикой изоморфны тогда и только тогда, когда их степени трансцендентности равны [18, c. 25]. В силу критерия Вота (лемма 1.1.3) полна.

Модель мощности называется -категоричной, если ее теория -категорична. Следующий метод амальгамирования (конструкция Фрайссе) приводит к построению -категоричных структур.

*Определение 1.1.5* [18, с. 56]. Предположим, что – язык и – модель:

1. Если является подмножеством , пусть обозначает наименьшую подмодель модели , область определения которой содержит ;
2. Подмодель модели называется конечно порожденной, если она равна для некоторого конечного подмножества в ;
3. Возраст – это класс всех конечно порожденных -структур, изоморфных подструктуре ;
4. является (ультра-) однородной, если любой изоморфизм между конечно порожденными подструктурами может быть расширен до автоморфизма.

Предположим, что – модель и для любого изоморфизма между конечно порожденными подмоделями и любым существует изоморфизм , расширяющий , где  *–* подмодель модели порожденная и , является подмоделью модели . Можно расширить до автоморфизма , индуктивно применив это условие к изоморфизму и его инверсии. Следовательно, это условие эквивалентно однородности. Более того, это утверждение первого порядка, если – конечный предикатный язык.

*Лемма 1.1.4* [18, c. 56]. Любые две счетные однородные модели с одинаковым возростом изоморфны.

*Определение 1.1.6* [18, c. 56]. Класс конечно порожденных -структур называется классом амальгамирования (или класс Fraisse), если он удовлетворяет следующим свойствам:

1. (Наследственности) Если , то любая структура, изоморфная конечно порожденной подструктуре является элементом ;
2. (Совместного вложения) Если , то существует некоторая и вложения и ;
3. (Аммальгаммирования) Если и *,*  – вложения, то существует некоторая и вложения *,*  такие, что *.*

Следует обратить внимание, что свойство аммальгаммирования не подразумевает свойство совместного вложения; первое справедливо, но второе неверно для класса конечных полей.

*Теорема 1.1.8* (Фрайсе) [18, c. 58]. Счетный класс -структур является классом амальгамирования тогда и только тогда, когда он является возрастом счетной однородной -структуры.

В ситуации теоремы 1.1.8 счетная однородная структура единственна по лемме 1.1.4 и называется пределом Фрайссе для . Следующий результат показывает, что однородность эквивалентна амальгамированию.

*Теорема 1.1.9* [18, c. 58]. Если – конечный предикатный язык и – класс Фрайссе конечных -структур, то его предел Фрайссе -категоричен.

Примерами класса амальгамирования являются следующие классы структур:

- Класс конечномерных векторных пространств над фиксированным счетным полем.

- Класс конечных (неориентированных) графов.

Предел Фрайссе класса конечных (неориентированных) графов называется случайным графом. Чтобы понять структуру этого графа, зафиксируем символ бинарного отношения и пусть – язык (неориентированных) графов. Тогда случайный граф является единственной моделью теории , изложенной выше, с точностью до изоморфизма.

Модели, определяемые бескванторными формулами, обычно легче изучать: для поля они представляют собой булевы комбинации наборов нулей многочленов; для линейного порядка они представляют собой булевы комбинации интервалов (возможно, неограниченных). Однако в некоторых структурах каждое определимое множество имеет следующий вид: теория допускает элиминацию кванторов, если каждая формула эквивалентна некоторой фиксированной формуле без кванторов во всех моделях теории. Отсюда следует, что каждое определимое множество на самом деле определяется бескванторной формулой. Например:

* В реализована возможность элиминации кванторов [18, c. 37], [25, c. 72].
* имеет возможность элиминации кванторов для любой характеристики [18, c. 40], [25, c. 85].

Дадим определение элиминации кванторов, и опишем критерий для его доказательства.

*Определение 1.1.7* [18, c. 31]. Теория в языке допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда любая формула языка эквивалентна по модулю бескванторной формуле , т.е.

Атомная диаграмма -структуры определяется как набор основных -формул, истинных в . Далее будем писать , .

Приведем достаточно полезный критерий для элиминации кванторов. Приведенная ниже лемма 1.1.6 показывает, что условие (b) достаточно проверить только для примитивных экзистенциальных формул (определенных ниже).

*Лемма 1.1.5* [18, c. 32]. Если – модель, – теория и – формула языка , то следующие утверждения эквивалентны:

1. Существует бескванторная формула такая, что

*.*

1. Если и являются моделями теории и является подмоделью как , так и , то для всех .

Покажем, что достаточно доказать абсолютность очень ограниченного класса экзистенциальных формул.

*Определение 1.1.8* [18, c. 32]. Формула называется простой экзистенциальной, если она вида для некоторой бескванторной формулы . Если , кроме того, является конъюнкцией основных формул (т. е. формул вида или , где атомна), то называется примитивно экзистенциальной.

Следующая лемма показывает, что примитивных экзистенциальных формул достаточно.

*Лемма 1.1.6* [18, c. 32]. Теория языка допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждая примитивно экзистенциальная формула эквивалентна по модулю бескванторной формуле.

В сочетании с леммой 1.1.5 это полезный критерий для элиминации кванторов. Множество теорий обладают дополнительным свойством наличия алгебраически простых моделей [25, с. 78]: для любой подмодели модели теории существует модель теории , расширяющая , такая, что каждое вложение в модель теории расширяется до вложения . Например, подкольцо A модели теории , для теории, содержащей аксиомы поля, ее поле частных имеет данное свойство. Легко видеть, что для таких теорий достаточно проверить условие (b) при (и только для примитивных экзистенциальных формул по лемме 1.1.6).

Элиминация кванторов часто используется как инструмент доказательства полноты. Например, полнота следует сразу, если теория имеет простую структуру, которая определяется следующим образом.

*Определение 1.1.9* [18, c. 59]. Предположим, что – теория языка , а – модель теории T:

1. является простой структурой для , если ее можно вложить в любую модель ;
2. является простой моделью , если ее можно элементарно вложить в любую модель .

Если теория допускает элиминацию кванторов и простую структуру , то это также простая модель по абсолютности бескванторных формул. Итак, очевидно, что полно.

*Лемма 1.1.7* [18, c. 38]. Теория бесконечномерных векторных пространств над фиксированным полем допускает элиминацию кванторов.

С небольшой поправкой это можно показать и для произвольных векторных пространств над фиксированным бесконечным полем.

Как для конечных, так и для бесконечных полей легко видеть, что теория бесконечных -векторных пространств имеет простую модель. Поэтому оно конечно.

*Теорема 1.1.10* [18, c. 40]. Теория любой характеристики допускает элиминацию кванторов.

Приведем несколько примеров использования элиминации кванторов для для получения доказательств некоторых результатов теории полей.

*Теорема 1.1.11* [18, c. 41] (Гильберта о нулях (Nullstellensatz)). Предположим, что – алгебраически замкнутое поле и такие, что – собственный идеал в (т. е. ). Тогда есть такие, что для всех .

Если – алгебраически замкнутое поле, то подмножество поля называется конструируемым, если оно является конечной булевой комбинацией нулевых множеств многочленов из и их дополнения. Путем элиминации кванторов каждое определимое подмножество является конструируемым (и наоборот).

*Лемма 1.1.8* [25, c. 88] (Шевалле). Если – алгебраически замкнутое поле, – конструируемое подмножество в и – полиномиальная функция, то конструируемо.

Покажем, что элиминация кванторов для и означает, что для этих теорий алгебраическое замыкание равно его теоретико-модельной версии, определение которой будет дано ниже.

*Определение 1.1.10* [25, c. 31]. Пусть – модель теории , – формула языка и .

1. Пусть .
2. называется алгебраической над , если конечна.
3. Элемент называется алгебраическим над , если для некоторой алгебраической формулы языка на множестве .
4. Алгебраическое замыкание множества в – это множество всех алгебраических элементов над .
5. алгебраически замкнуто в , если .

Если – подмножество алгебраически замкнутого поля характеристики , то равно стандартному алгебраическому замыканию (из алгебры) путем элиминации кванторов для . Чтобы убедиться в этом, предположим, что и – бескванторная формула с параметрами из и есть только конечное число решений, включая . В силу элиминации кванторов, мы можем считать, что она бескванторная, и заменить ее логически эквивалентной формулой с базовыми формулами . Тогда удовлетворяет формуле для некоторого – то же самое верно и при удалении основных неравенств . Это объединение полиномиальных уравнений можно переписать как одно полиномиальное уравнение, показывая, что находится в алгебраическом замыкании в обычном смысле (как это определено в теории поля).

Тип – это максимально непротиворечивое (относительно теории) множество формул с фиксированным конечным числом (фиксированных) свободных переменных. Таким образом, это обобщает понятие теории, допуская свободные переменные. Это понятие важно для многих результатов в теории моделей. Далее приведем теорему об опускании типов и описание пространства -типов относительно фиксированной теории. Далее мы будем использовать теоретико-модельные свойства типов для характеристики следующих свойств теорий.

* -категоричность (теорема ((1.1.13)).
* Существование счетных насыщенных моделей (теорема 1.1.15).
* Существование простых моделей (лемма 1.1.15).

Также это понятие применяяется для доказательства теоремы Вота (теорема 1.1.16), которая утверждает, что счетная полная теория не может иметь ровно две счетные модели с точностью до изоморфизма. Также мы будем использовать типы для изучения алгебраического замыкания в насыщенных структурах, связи между однородностью и элиминацией кванторов, а также фактов о насыщенных структурах.

Покажем, что каждый тип может быть реализован, но только некоторые типы можно опустить. Сначала зафиксируем следующие обозначения: если -структура и , то через обозначим -структуру, индуктивную к .

*Определение 1.1.11* [18, c. 48]*.* Предположим, что – теория языка , – модель теории , – подмножество и .

1. -типом (относительно ) называется максимальное множество формул , совместное с , для некоторых фиксированных различных переменных .
2. обозначает множество -типов; если полна, то .
3. Тип из над определяется как множество . Будем также писать *tp() = () = ()*.
4. -тип в реализуется в , если он равен для некоторого кортежа , в противном случае он опускается в .
5. Пусть обозначает множество -типов над .

Непротиворечивый набор формул co свободными переменными часто называют частичным типом. Заметим, что типы в (e.) зависят не от модели , а только от ее теории и, более того, они не обязательно реализуются в .

Покажем, что все типы могут быть одновременно реализованы в достаточно большой модели.

*Лемма 1.1.9* [18, c. 23]. Каждая модель имеет элементарное расширение , в котором реализуются все типы из языка над (относительно

Следующее условие подразумевает, что тип реализуется в каждой модели. Сформулируем это в более общем смысле для непротиворечивых наборов формул с фиксированными свободными переменными, которые называются частичными типами.

*Определение 1.1.12* [18, c. 47]. Пусть – теория языка и – множество формул языка с не более чем свободными переменными. Формула изолирует , если:

1. совместна с и,
2. для всех из .

Тогда называется изолированным относительно .

Заметим, что для любого типа , изолированного формулой относительно полной теории , предложение совместно с и, следовательно, выполняется в любой модели Следующее обращение к этому утверждению показывает, что неизолированные типы относительно счетных теорий всегда можно опустить.

*Теорема 1.1.12* [18, c. 47]. (Теорема об опускании типов) Предположим, что – счетная непротиворечивая теория в счетном языке и, представляет собой последовательность наборов формул, совместных с . Если ни одна не изолирована в , то имеет модель, которая опускает все .

В нижеследующем факте указано, что каждый тип относительно полной теории конечно выполним в любой модели данной теории .

*Факт 1.1.1*. [18, c. 143]. Если – модель полной теории языка , то множество набор формул языка в свободных переменных совместна с (т.е. выполняется в модели с назначением переменных из тогда и только тогда, когда оно конечно выполнимо в .

Более того, очевидно, что типы сохраняются посредством элементарных вложений.

*Факт 1.1.2* [18, c.144]. Предположим, что и – модели и – элементарное вложение. Тогда для всех , имеем .

Если теория категорична по некоторому бесконечному кардиналу, то легко увидеть, что все типы реализуются в каждой модели.

*Факт 1.1.3* [25, c.139]. Если – бесконечный кардинал, – язык мощности не более и -категоричная теория языка , то любая модель мощности реализует все типы.

Чтобы изучить типы произвольной полной теории языка , введем топологию на при фиксированном ; с этой топологией называется пространством -типов. Основные открытые множества в определяются как для любой формулы и . Эта коллекция образует основу топологии, поскольку оно замкнуто относительно конечных пересечений по следующей лемме.

*Лемма 1.1.10* [18, c. 49]. Зафиксируем некоторое :

1. *;*
2. *;*
3. ;
4. *;*
5. *;*
6. *;*
7. *.*

Если язык счетный, то существует только счетное число формул и, следовательно, имеет счетную основу. В этом случае можно вложить в канторово пространство бесконечных двоичных последовательностей. Оно снабжено метрикой , определяемой формулой для всех , где является наименьшим при .

Нам понадобится понятие вложения между подмножествами структур, элементарное по отношению к целым структурам.

*Определение 1.1.13* [18, c. 17]. Предположим, что и – подмножества моделей и . Функция называется элементарной, если для всех формул и имеем .

Мы также будем использовать тот факт, что элементарные вложения вызывают непрерывные отображения между пространствами типов над подмножествами структур.

*Лемма 1.1.11* [18, c. 17]. Предположим, что и – подмножества моделей и , – элементарное вложение и . Тогда функция , определяется формулой

для является хорошо-определенной, непрерывной и сюръективной.

Следует заметить, что отображение тождественно на , если и пусты.

Свойства полных теорий будем характеризовать числом типов и свойствами изолированных типов. Заметим, что изолированные типы – это в точности изолированные точки в пространстве типов: если тип изолирован формулой , то он является единственным элементом базового открытого множества . Если, с другой стороны, – изолированная точка в и, следовательно, открыта, пусть – формула причем . Если не изолирует , то существует формула такая, что непротиворечива, противоречит предположению.

*Лемма 1.1.12* [23, c. 342]. Следующие условия эквивалентны для полной теории :

1. конечно для всех .
2. Каждый -тип изолирован.
3. Существует лишь конечное число формул вида с точностью до эквивалентности в , где и эквивалентны в , если

Предположим, что – бесконечный кардинал и – теория языка . Модель теории называется -насыщенной, если для любого подмножества мощности строго меньше каждый 1-тип из реализуется в . При этом называется насыщенным, если оно -насыщено.

*Лемма 1.1.13* [18, c. 51]. Предположим, что – полная теория и – бесконечный кардинал. Тогда есть не более одной -насыщенной модели мощности с точностью до изоморфизма.

*Теорема 1.1.13* [23, с. 341]. (Энгелер, Рыль-Нардзевский, Свенониус). Следующие условия эквивалентны для полной теории с бесконечными моделями:

1. конечно для всех .
2. Любая счетная модель -насыщена.
3. -категорична.

*Определение 1.1.15.*

1. Если  *– модель теории языка* , то пусть обозначает группу автоморфизмов .
2. Если – любое множество, подгруппа группы перестановок называется олигоморфной для любого , существует только конечное число орбит действия на *.*

*Теорема 1.1.14* [23, c. 341]. Следующие условия эквивалентны для любой счетной полной теории с бесконечными моделями:

1. -категорична.
2. Если – любая счетная модель , то олигоморфна.
3. имеет счетную модель такую, что олигоморфна.
4. Некоторая счетная модель языка реализует только конечное число -типов для каждого *.*

*Определение 1.1.16* [18, c. 53]*.* Теория мала, если счетна для всех .

Например, счетно бесконечно для всех и всех простых чисел или . Из следующей эквивалентности следует, что имеет счетную -насыщенную модель. Это алгебраически замкнутое поле со степенью трансцендентности .

*Теорема 1.1.15* [18, c. 53]*.* Счетная полная теория с бесконечными моделями мала тогда и только тогда, когда она имеет счетную -насыщенную модель.

Дадим эквивалентные формулировки утверждений о насыщенности каждой счетной модели данной теории и о существовании счетной насыщенной модели. Следующий результат показывает, что невозможно иметь ровно две счетные модели с точностью до изоморфизма.

*Теорема 1.1.16* (Вота)[18, c. 54]. Счетная полная теория не может иметь ровно две счетные модели с точностью до изоморфизма.

Однако не так уж сложно найти примеры счетных полных теорий с ровно счетными моделями с точностью до изоморфизма, для этого можно привести следующую ссылку [18, упражнение 4.3.5].

Простая модель по определению – это наименьшая возможная модель теории. Например, алгебраические замыкания и являются простыми моделями путем элиминации кванторов, а и являются простыми структурами.

Ниже приведем свойства простых моделей, рассмотрим критерии существования простой модели. Пример счетной полной теории с элиминацией кванторов, но простой модели можно найти в [18, с. 60].

*Определение 1.1.17* [25, c. 129]*.* Модель теории называется атомной, если каждый тип , реализуемый в , изолирован (в ).

*Теорема 1.1.17* [25, c. 130]*.* Предположим, что – теория счетного языка с бесконечными моделями. Тогда модель теории является простой тогда и только тогда, когда она счетна и атомна.

Если простые модели существуют, то они единственны.

*Лемма 1.1.14* [18, c. 59]*.* Все простые модели теории в счетном языке с бесконечными моделями изоморфны.

Приведем критерий существования простых моделей через свойство пространств типов. Чтобы сформулировать этот критерий, напомним, что подмножество X топологического пространства плотно тогда и только тогда, когда для любого непустого открытого подмножества в .

*Лемма 1.1.15* [18, c. 60]*.* Теория на счетном языке с бесконечными моделями имеет простую модель тогда и только тогда, когда для любого изолированные -типы плотны в .

Приведем еще одно достаточное условие существования простых моделей.

*Лемма 1.1.16* [18, c. 60]*.* Если – полная теория и счетна, то изолированные -типы плотны. В частности, любая малая теория в счетном языке с бесконечными моделями имеет простую модель.

Следующее модифицированное понятие однородности полезно, поскольку оно имеет смысл и для неоднородных структур. Например, линейный порядок -однороден, но не однороден.

*Определение 1.1.18* [18, c. 90]. Структура называется -однородной, если для любого элементарного отображения , определенного на подмножестве в , таком, что и для любого существует такой , что элементарно.

Заметим, что элементарно тогда и только тогда, когда – просто проверим, что равенство типов означает сохранение истинности формул. (можно было бы сказать, что реализует тип над – это имеет смысл, поскольку это тип в языке ). Данное свойство справедливо для всех -насыщенных структур.

*Лемма 1.1.17* [25, c. 138]*.* Любая -насыщенная структура является -однородной.

В следующем определении приведена версия алгебраического замыкания в модели , которая определена только из действия .

*Определение 1.1.19* [18, c. 93]*.* Предположим, что – подмножество модели теории .

1. Сопряженным элементом над является элемент , где – автоморфизм из , фиксирующий поточечно.
2. - алгебраическое замыкание определяется как множество элементов , имеющих лишь конечное число сопряженных над .

Это нестандартное обозначение – алгебраическое замыкание обычно рассматривается только в насыщенных структурах и там эти два понятия равнозначны.

Поскольку автоморфизмы , поточечно фиксирующие , сохраняют истинность формул с параметрами из , имеем . Мы покажем, что эти два понятия одинаковы в насыщенных структурах. Для этого будет использоваться следующая лемма.

*Лемма 1.1.18* [18, c. 67]. Если – бесконечный кардинал, а – насыщенная модель мощности , то два -элементных кортежа находятся на одной и той же -орбите тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же тип.

Прежде всего отметим следствие для определимых подмножеств -категоричных структур.

*Лемма 1.1.19* [18, c. 55]. Для любой -категоричной структуры , определимые подмножества являются в точности -инвариантными подмножествами , т. е. объединениями -орбит на .

*Теорема 1.1.18* [25, c. 147]*.* Если – насыщенная структура мощности и – подмножество такое, что , следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. ;
3. имеет лишь конечное число реализаций в .

*Теорема 1.1.18.* выполняется и для множеств мощности . Так как в любой -категоричной теории существует только конечное число -типов над любым конечным множеством для каждого . Это непосредственно следует из теоремы Энгелера, Рылля-Нардзевского и Свенониуса (теорема 1.1.13, поскольку -насыщенность эквивалентна для структуры как -структуры или -структуры, если – конечное подмножество .

Таким образом, мы имеем следующий полезный результат об алгебраических замыканиях.

*Следствие 1.1.1.* В -категоричных структурах алгебраические замыкания конечных множеств конечны.

Это верно, поскольку над конечным множеством существует лишь конечное число 1-типов, и каждый 1-тип имеет конечное число реализаций в . В частности, любая -категоричная структура локально конечна, т.е. любая конечно порожденная подструктура конечна. Это справедливо, поскольку элементы подструктуры такой структуры , порожденной конечным подмножеством из , являются в точности элементами для некоторого . Но , так как определимо из .

Далее рассмотрим усиление свойства амальгамы, которое гласит, что структуры и с общей подструктурой могут быть объединены таким образом, что их пересечение будет равно .

*Определение 1.1.20* [25, c. 106]*.* Класс -структур обладает свойством сильной амальгамы, если для всех вложений и между структурами в существуют вложения и в некоторый такой, что и .

Говорят, что алгебраическое замыкание в структуре тривиально, если для каждого подмножества – поскольку каждый элемент находится в для конечного подмножества , то достаточно показать это только для конечных множеств. Чтобы показать, что сильное свойство амальгамы эквивалентно тривиальному алгебраическому замыканию в пределе Фрайссе, нам понадобится следующая лемма.

*Лемма 1.1.20* (Нейман) [23, c. 140]. Предположим, что группа , действующая на множестве , имеет только бесконечные орбиты, и пусть и – конечные подмножества . Существует некоторое такое, что .

*Утверждение 1.1.1.* Для любого подмножества такого, что , только конечное число перестановок содержит .

Ниже дадим определение для любой структуры и любого подмножества как группу всех , которая фиксирует поточечно, т. е. как поточечный стабилизатор .

*Лемма 1.1.21.* Предположим, что – счетный язык и – однородная -категоричная -структура. Тогда алгебраическое замыкание в тривиально тогда и только тогда, когда возраст обладает свойством сильной амальгамы.

Свяжем чисто синтаксическое условие элиминации кванторов с однородностью – свойством структур. Для следующих утверждений напомним, что предикатный язык – это язык без константных и функциональных символов.

* + Если язык конечный и предикатный, то элиминация кванторов эквивалентна однородности счетных моделей (теорема (1.1.20)). Более того, отсюда следует -категоричность (лемма (1.1.22)).
	+ Если теория -категорична, то та же эквивалентность имеет место без предположений о языке (лемма 1.1.23).

*Лемма 1.1.22* [18, c. 57]. Если – полная теория в конечном предикатном языке с бесконечными моделями и элиминацией кванторов, то -категорична.

*Теорема 1.1.20* [18, c. 58]. Если – полная теория в конечном предикатном языке, а – бесконечная модель , то следующие условия эквивалентны.

1. допускает элиминацию квантора.
2. Область любого изоморфизма между конечными подструктурами может быть расширена еще на один элемент (если счетно, это означает, что существует расширение до автоморфизма и, следовательно, оно эквивалентно однородности).
3. Любой изоморфизм между конечными подструктурами элементарен.

Например, это можно применить к пределу Фрайсе любого класса амальгамирования в конечном предикатном языке. Напомним, что эта модель однородна, поэтому условие (b) выполняется и, следовательно, ее теория допускает элиминацию кванторов:

*Следствие 1.1.2* [23, c. 349]. Если – предел Фрайсе класса амальгамирования конечных -структур в конечном предикатном языке , то допускает элиминацию кванторов.

Мы получаем следующую характеристику элиминации кванторов для -категоричных структур.

*Лемма 1.1.23* [23, c. 349]. Теория -категоричной -структуры допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда – однородна.

Насыщенные модели не обязательно существуют для всех полных теорий. Но с дополнительными теоретико-множественными предположениями они существуют: для любого бесконечного кардинала такого, что , можно легко построить насыщенную модель как объединение цепочки моделей длины , где каждая модель строго меньше и все типы над подмножествами реализуются при построении. Более того, приняв версию , такую как теория классов Гёделя-Бернейса , можно таким же образом построить полностью насыщенную модель надлежащей мощности класса – она называется моделью-монстром [16, теорема 6.1]. Однако для многих теорий насыщенные модели всегда существуют, например для .

*Лемма 1.1.24*. Алгебраически замкнутое поле является насыщенным тогда и только тогда, когда его степень трансцендентности бесконечна.

Выше было показано, что для подмножеств , строго меньших любой насыщенной структуры мощности . Заметим, что насыщенность не является необходимым условием, т.е., что для произвольных подмножеств любого алгебраически замкнутого поля .

Хотя простая модель является наименьшей моделью теории с точки зрения элементарной вложимости, любая насыщенная модель является максимальной для моделей не более своей мощности. Если – бесконечный кардинал, модель теории называется -универсальной, если каждая модель теории мощности строго меньше элементарно вкладывается в .

*Лемма 1.1.25* [24, c. 125]. Если – полная теория и – бесконечный кардинал, то каждая -насыщенная модель теории является -универсальной.

Следующий результат доказывает обратную импликацию.

*Лемма 1.1.26*. Если – полная теория мощности не более , где – бесконечный кардинал, то каждая -однородная -универсальная модель теории является -насыщенной.

Напомним еще одно понятие, которое связано с моделями теории – это выпуклость теории. Эта концепция была впервые предложена А. Робинсоном, который является, как уже говорилось во введении, одним из основоположников в области теории моделей.

*Определение 1.1.21* [1, с. 80]. Теория называется выпуклой, если для любой ее модели и любого семейства подструктур , являющихся моделями теории , пересечение является моделью теории , если оно непусто. При этом, если такое пересечение никогда не бывает пустым, то называется сильно выпуклой.

Теория, определяющая отношение эквивалентности – пример выпуклой, но не сильно выпуклой теории. Легко понять, что любая подструктура модели рассматриваемой теории также удовлетворяет аксиомам данной теории, но пересечение двух подструктур вполне может оказаться пустым [9, c. 162]. Теория групп – пример сильно выпуклой теории. Теория плотно упорядоченных множеств с различными концевыми элементами является примером невыпуклой теории. Но если теория выпукла и в сигнатуре языка такой теории содержится хотя бы одна константа , то также является сильно выпуклой, поскольку любая модель из класса всех моделей теории содержит элемент, реализующий эту константу.

*Определение 1.1.22* [26 с. 157]. Модель теории называется ядерной, если она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории и этот изоморфизм ровно один.

Напомним определение жестко вложимой модели из [26].

*Определение 1.1.23* [26, с. 160]. Модель теории жестко вложима в модель теории , если существует ровно один изоморфизм в .

Далее приведем необходимые факты и понятия о предгеометрии, существовании базисов и, следовательно, четко определенной размерности, законах модулярности и т. д. дадим определение предгеометрии.

*Определение 1.1.24* [18, c. 80]. Предгеометрия – это множество с оператором замыкания : таким, что для всех и :

1. (Рефлексивность) .
2. (Конечный характер) является объединением всех , где – диапазон над всеми конечными подмножествами .
3. (Транзитивность) .
4. (Обмен) .

*Замечание 1.1.1.* Следующие структуры являются предгеометриями:

1. Векторное пространство с линейным оператором замыкания.
2. Для поля с простым полем относительное алгебраическое замыкание .
3. -замыкание в поле характеристики , т.е. .

Предгеометрия, в которой точки и пустое множество замкнуты, т. е. в которой и для всех , называется геометрией. Для любой предгеометрии (X, cl) существует ассоциированная геометрия , полученная заданием и где ∼ – отношение эквивалентности на , определяемое формулой *cl(x) = cl(y)*.

Начиная с векторного пространства , полученная таким образом геометрия представляет собой ассоциированное проективное пространство . Важные свойства предгеометрии на самом деле в основном являются свойствами связанной геометрии.

*Определение 1.1.25* [18, с. 206]. Пусть – предгеометрия. Подмножество из называется:

1. независимым, если для всех ;
2. порождающим множеством, если ;
3. базисом, если – независимое порождающее множество.

*Лемма 1.1.27* [18, с. 206]. Пусть – предгеометрия с порождающим множеством Любое независимое подмножество можно расширить до базиса, содержащегося в . В частности, каждая предгеометрия имеет базис.

*Определение 1.1.26* [18, с. 206]. Пусть – предгеометрия. Любое подмножество порождает две новые предгеометрии: ограничение и релятивизацию , где , .

*Замечание 1.1.2* [18, с. 206]. Пусть A – базис , а B – базис . Тогда (дизъюнктное) объединение является базисом.

Будем говорить, что A является базисом S, а B – базисом над или относительно S.

*Лемма 1.1.28* [18, с. 206]. Все базисы предгеометрии имеют одинаковую мощность.

*Определение 1.1.27* [18, с. 206]. Размерность предгеометрии [50] – это мощность базиса. Для S подмножества множества X пусть – размерность , а – размерность .

По замечанию 1.1.2 имеем

*Лемма 1.1.29* [18, с. 207]. .

Реализацию понятия размерности покажем в трех стандартных примерах:

* Размерность векторного пространства.
* Степень трансцендентности поля.
* Степень несовершенства поля конечной характеристики.

Пусть – предгеометрия. Для произвольных подмножеств A и B легко увидеть, что выполняется субмодулярный закон:

Равенство возможно в случае, если A и B замкнуты. Дадим определение модулярной предгеометрии.

*Определение 1.1.28* [18, с. 208]. Предгеометрию назовем модулярной, если для всех cl-замкнутых A и B

Назовем два множества и (геометрически) независимыми над , если все подмножества и , независимые над , не пересекаются и их объединение снова независимо над . Тогда легко увидеть следующее.

*Лемма 1.1.30* [18, с. 208]. Для предгеометрии следующие условия эквивалентны:

1. модулярно.
2. Любые два замкнутых и независимы над своим пересечением.
3. Для любых двух замкнутых множеств и имеем .

*Лемма 1.1.31* [18, с. 208]. Предгеометрия является модулярной тогда и только тогда, когда для всех с , существует такой, что .

*Определение 1.1.29* [18, с. 208]. Предгеометрия является локально модулярной, если выполняется условие определения 1.1.26 для всех замкнутых множеств , с .

*Замечание 1.1.3* [18, с. 208]. локально модулярно тогда и только тогда, когда для всех релятивизированная предгеометрия модулярна.

## 1.2 Введение в теорию моделей для йонсоновских теорий

Тематика, изучаемая в данном разделе, связана с изучением йонсоновских теорий и их классов моделей. Основные методы, используемые для изучения йонсоновских теорий были рассмотрены в работах [5]-[17], [20], [21], [41]-[70]. Одним из методов изучения полных теорий является обогащение сигнатуры такими символами, которые позволяют на языке этих символов получать новую информацию о моделях старой сигнатуры и их теорий. В работах [41]-[43], связанных с обогащением йонсоновских теорий было введено понятие центрального типа на основе понятия наследственности йонсоновской теории. Понятие наследственности тесно связано с понятием стабильности центра йонсоновской теории и йонсоновской стабильности самой йонсоновской теории. Как хорошо известно, среди йонсоновских теорий лучше поддаются к изучению совершенные йонсоновские теории за счёт существования модельного компаньона таких теорий. Понятие стабильности тесно связано с понятием категоричности, которое играет важную роль в теории классификации полных теорий и соответственно неполных теорий. В связи с тем, что понятие наследственности йонсоновской теории до сих пор не имеет полного описания, данная тематика является актуальной и современной в рамках изучения обогащения йонсоновских теорий.

Йонсоновские теории, по своей сути, являются, вообще говоря, неполными. То есть, технический аппарат исследования йонсоновских теорий, по сравнению с полными теориями, является менее приспособленным для переноса и адаптации понятий и достижений полных теорий.

Ценным понятием для оперирования свойств элементов и подмножеств семантической модели является йонсоновское множество, то есть определимое множество с помощью некоторой экзистенциальной формулы, определимое замыкание которого задает некоторую экзистенциально замкнутую подмодель рассматриваемой семантической модели. Интересным и важным частным случаем йонсоновского множества является понятие теоретического множества. Фактически, в рамках изучения йонсоновского множества, мы получаем «новую и особую» йонсоновскую теорию, аксиомы которой напрямую связаны с заданным йонсоновским множеством.

После определения й онсоновского множества [44] было замечена полезность этого понятия в том смысле, что оно позволило определить принцип реостата, описание которого можно найти в работе [45]. Среди работ посвященных изучению йонсоновских теорий можно выделить работы, связанные с определимыми подмножествами семантической модели фиксированной йоносоновской теории [45]. Одна из новых технических концепций представляет собой фрагмент определяемого подмножества семантической модели. В рамках исследования данной концепции были рассмотрены следующие работы [46]-[49].

Понятия центрального типа и йонсоновского спектра впервые были введены Ешкеевым А.Р., соответственно, в [50], [51]. С помощью этих понятий были получены полные описания йонсоновских абелевых групп в работе [50] и йонсоновских модулей в [52] относительно понятия косемантичности, тем самым начато новое исследование в рамках теоретико-модельной алгебры. В дальнейшем, было продолжено изучение теоретико-модельных свойств этих понятий в работах [41]-[43], [48]-[54].

До сих пор нерешенной проблемой является проблема характеризации понятия наследственности йонсоновской теории. Актуальность данной проблемы подтверждается следующим важным контрпримером: элементарная теория алгебраически замкнутого поля после обогащения одноместным предикатом перестает быть йонсоновской. В связи с этим, изучение теоретико-модельных свойств центральных типов в обогащении предикатом представляет важную теоретико-модельную задачу для описания наследственных йонсоновских теорий.

Заметим, что еще одним методом исследования йонсоновских теорий является изучение этих теорий с помощью понятий синтаксического и семантического подобий. В работах [54]-[56] с помощью этих понятий были получены некоторые результаты в рамках изучения йонсоновских теорий и их центров, а также определимых подмножеств семантической модели.

Дадим основные определения понятий теоретико-модельных концептов, которые необходимо знать для понимания и умения работать в рамках изучения йонсоновских теорий и их классов моделей. Следующие определения и их теоретико-модельные свойства являются образующими для той части теории моделей, которая изучает основные свойства определимых подмножеств семантической модели различных фиксированных йонсонвских теорий.

*Определение 1.2.1* [2, c. 80]. Теория называется йонсоновской, если:

1. имеет бесконечную модель;
2. индуктивна, т.е. эквивалентна множеству -предложений;
3. обладает свойством совместного вложения (), т.е. любые две модели теории изоморфно вкладываются в некоторую модель теории ;
4. обладает свойством амальгамы (), т.е. для любых таких, что *,*  – изоморфные вложения, существуют модель и изоморфные вложения *,* , такие, что .

Существует известное утверждение относительно свойств и .

*Утверждение 1.1.1* [21, с. 99]. Свойства и независимы между собой. Это означает, что существуют теории первого порядка, которые допускают свойства и независимо друг от друга.

Примерами йонсоновских теорий являются теории известных классических алгебр, таких как группы, абелевы группы, булевы алгебры, линейные порядки, поля фиксированной характеристики и полигоны [2, c. 80].

Заметим, что, как было уже сказано в введении, йонссоновские теории, вообще говоря, неполны. Как следует из достаточно широкого приведенного списка теорий, который представляет многие разделы классической алгебры, изучение теоретико-модельных свойств йонсоновских теорий играет важную роль, как в алгебре, так и в самой теории моделей [50]. При том, что развитие современной теории моделей, ее понятий и методов исследования на сегодняшний день в основном связано с изучением полных теорий.

Определение универсальности и однородности данное ниже, определяет ее семантическую модель – семантический инвариант любой йонсоновской теории. Более того, оказалось, что на структурные свойства как йонсоновской теории, так и ее класса моделей существенно влияет насыщенность или ненасыщенность модели рассматриваемой теории.

*Определение 1.2.2* [57, c. 529]. Пусть . Модель теории называется:

* – универсальной для если любая модель теории мощности строго меньшей изоморфно вкладывается в ;
* – однородной для если для любых двух моделей и теории , которые являются подмоделями мощности строго меньше и для изоморфизма для каждого расширения модели , которое является подмоделью и является моделью теории мощности строго меньшей, чем , существует расширение модели , которая является подмоделью и изоморфизмом , расширяющим [3].

Однородно-универсальной моделью теории называется модель теории мощности , которая является -однородной и -универсальной одновременно, где [5].

Следующее понятие семантической модели йонсоновской теории имеет особое значение при работе с йонсоновскими теориями в рамках определения 1.2.2.

*Определение 1.2.3* [57, c. 529]. Пусть йонсоновская теория. Модель йонсоновской теории называется семантической моделью, если она –однородна и –универсальна одновременно.

Следующий важный факт показывает, что любая йонсоновская теория определяется ее семантической моделью. О «хорошей» исключительности семантической модели также можно судить по следующим фактам.

*Факт 1.2.1* [57, c. 529]. Каждая йонсоновская теория имеет -однородно-универсальную модель мощности . И наоборот, если индуктивна, имеет бесконечную модель и -однородно-универсальную модель, то – йонсоновская теория.

*Факт 1.2.2* [57, c. 529]. Пусть – йонсоновская теория. Две -однородно-универсальные модели и теории элементарно эквивалентны.

В силу определения 1.2.1 ясно, что йонсоновская теория не является полной. Семантическая модель выполняет важную роль семантического инварианта йонсоновской теории. Данная модель всегда существует для любой йонсоновской теории. Учитывая семантический инвариант (семантическую модель), мы всегда можем определить центр йонсоновской теории, которая является полной теорией. Следующее определение задает понятие центра йонсоновской теории.

*Определение 1.2.4* [21, c. 161]. Пусть семантичесая модель йонсоновской теории . Тогда элементарная теория модели называется центром теории и обозначается .

Следующий результат дает возможность описать специальный подкласс йонсоновских теорий, которые имеют модельный компаньон.

*Определение 1.2.5* [21, с. 165]. Пусть – йонсоновская теория. Тогда компаньоном йонсоновской теории называется такая теория той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1. = ;
2. для любой йонсоновской теории , если = , тогда = ;
3. .

Естественными интерпретациями компаньона являются , , , , , где – есть оболочка Кайзера, – есть центр теории , – это модельный компаньон, – конечный форсинг-компаньон в робинсоновском смысле, – элементарная теория класса всех экзистенциально замкнутых моделей класса .

*Факт 1.2.3* [57, с. 529]. Пусть йонсоновская теория. Если модельно полна и , тогда -однородные универсальные модели теории являются -насыщенными; если не является модельно полной, никакая семантическая модель теории не является -насыщенной.

Из факта 1.2.3 и взаимной модельной совместности йонсоновской теории и её центра следует, что – модельный компаньон теории .

Далее в нашей работе язык будет счетным, а это значит, что и или . Из факта 1.2.3 следует, что для совершености йонсоновской теории должно быть больше .

*Определение 1.2.6* [20]. Пусть . Йонсоновская теория совершенна если ее семантическая модель -насыщенна.

Таким образом, из факта 1.2.3 и определения 1.2.6 можно заключить, что совершенная йонсоновская теория – это такая йонсоновская теория, которая имеет модельный компаньон и он равен её центру. То есть верен следующий результат, описывающий совершенную йонсоновскую теорию. Данный результат, получен А.Р. Ешкеевым в [4] и [58].

*Факт 1.2.4* [4]. Пусть – йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. совершенна;
2. –модельный компаньон .

Понятие совершенности йонсоновской теории тесно связано с понятием класса экзистенциально замкнутых моделей этой теории. Поскольку совершенных теорий гораздо меньше, чем несовершенных, и только совершенство йонсоновской теории гарантирует элементарный класс экзистенциально замкнутых моделей этой теории [6], изучение свойств класса экзистенциально замкнутых моделей представляет собой весьма важную задачу. Напомним, что модель теории называется экзистенциально замкнутой, если экзистенциальное предложение языка , истинное в некоторой -модели, расширяющей , истинно и в [2, с. 97].

*Определение 1.2.7* [2, с. 97]. Модель теории называется экзистенциально замкнутой, если для любой модели и любой экзистенциальной формулы с константами из имеем при условии, что есть подмодель и .

Обозначим через класс всех экзистенциально замкнутых моделей йонсоновской теории . В общем случае этот класс моделей для произвольной теории может быть пустым. Учитывая известный результат работы [2], можно сказать, что любая индуктивная теория имеет непустой класс экзистенциально замкнутых моделей.

*Теорема 1.2.1* [2, c. 97]. Любая счетная модель индуктивной теории изоморфно вкладывается в некоторую счетную экзистенциально замкнутую модель этой теории.

Заметим, что класс йонсоновских теорий фиксированной сигнатуры является подклассом индуктивных теорий этой сигнатуры, на основании этого можно сказать, что класс – непуст [5]. В силу данного замечания, теоремы 1.2.1 и критерия совершенности йонсоновских теориий класс экзистенциально замкнутых моделей рассматриваемых йонсоновских теорий совпадает с классом модели центра этой теории. В случае совершенной йонсоновской теории класс моделей центра этой теории совпадает с , что следует из теоремы 1.2.3.

*Лемма 1.2.1* [20, с. 25]. Семантическая модель йонсоновской теории является -экзистенциально замкнутой..

*Предложение 1.2.1* [2, 97]. Если – индуктивная теория, то любую модель теории можно расширить до экзистенциально замкнутой модели.

Заметим что , – естественный подкласс всех моделей йонсоновской теории.

Классический результат, связывающий понятие экзистенциальной замкнутости и модельной полноты выглядит следующим образом.

*Теорема 1.2.2* (Эклоф П., Сабах Г.) [32]. Теория имеет модельный компаньон, если и только если будет элементарным классом.

Вообще говоря, класс экзистенциально замкнутых моделей индуктивных теорий не всегда аксиоматизируем, и это существенно важно, когда мы изучаем класс моделей теории , где – йонсоновская теория . Из теоремы 1.2.2 и факта 1.2.3 следует следующий результат:

*Теорема 1.2.3* [21, с. 166]. Если йонсоновская теория совершенна, то , где .

Следующее утверждение показывает, что у произвольной йонсоновской теории есть –универсальные, –однородные экзистенциально замкнутые модели.

*Факт 1.2.5* [21, с.166]. Для любой йонсоновской теории ее семантическая модель является экзистенциально замкнутой моделью данной теории.

Известно, что любые две экзистенциально замкнутые модели йонсоновской теории не отличаются между собой универсально-экзистенциальными предложениями.

*Факт 1.2.6* [23, с. 363]. Пусть – язык первого порядка и теория в . Предположим, что обладает , и пусть , экзистенциально замкнутые модели теории . Тогда каждое предложение языка истинное в также истинно и в .

Аналогом простой модели (в смысле полной теории) для индуктивной модели, вообще говоря, неполной теории, является понятие алгебраически простой модели, которое ввел А. Робинсон.

*Определение 1.2.8*[8, c. 105]. Модель теории называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в каждую модель рассматриваемой теории.

В связи с интересом к проблеме атомной алгебраически простой модели в рамках изучения йонсоновских теории, на основании результатов работы [29] был определен новый класс йонсоновских теорий, в которыхсуществует алгебраически простая модель, которая является экзистенциально замкнутой.Следующее определение имеет смысл в случае несовершенных йонсоновских теорий. В случае совершенной йонсоновской теории понятие алгебраической простоты рассматривается преимущественно в классе всех моделей рассматриваемой теории. Так как в этом случае .

*Определение 1.2.9* [8, 106]. Теория называется экзинциально-алгебраически простой (), если она имеет модель такую, что для любого модель изоморфно вкладывается в .

*Определение 1.2.10* [8, c. 106]. Индуктивная теория называется экзистенциально простой, если:

1. она имеет алгебраически простую модель, класс ее (алгебраически простых моделей) обозначается ;
2. класс нетривиально пересекается с классом , т.е. .

*Определение 1.2.11* [29, c. 309]. Модель называется атомной если каждый кортеж его элементов удовлетворяет некоторой полной формуле.

*Определение 1.2.12* [59]. Формула является -формулой, если существуют экзистенциальные формулы (из ) и такие, что

*Определение 1.2.13* [11, c. 99].

1. означает что для каждой формулы из , если , то .
2. означает, что и .

В качестве классов рассмотрим или .

Рассмотрим полную теорию языка . Формула называется полной (в ) тогда и только тогда, когда для каждой формулы выполняется ровно одно из

.

Формула называется пополнимой (в ) тогда и только тогда, когда существует полная формула с . Если не является полной, то её называют непополнимым.

Теория называется атомной тогда и только тогда, когда любая формула языка синатуры , совместная с теорией , пополнима в данной теории. есть атомная модель тогда и только тогда, когда каждый -элементный кортеж, состоящий из элементов данной модели удовлетворяет полной формуле в элементароной теории модели . В связи с концепцией атомности из [59], приходим к выводу, что следующее понятие будет аналогично определению полной формулы [11, c. 99].

*Определение 1.2.14* [59, c. 293]. Формула является полной для -формул, если совместна с и каждая формула в , имеет не больше свободных переменных, чем , или

Эквивалентно, непротиворечивая формула является полной для -формул, если является -формулой и совместна с , тогда . И понятие атомной модели из работы [36] преобразуется в понятия из следующих определений.

*Определение 1.2.15.* [59, c 295], [45, c.87]. Пусть есть – атомная модель теории , если является моделью теории и для любого каждый -элементный кортеж удовлетворяет некоторой формуле из в , полной для -формул.

Обобщением приведенного выше определения является определение слабо атомной модели.

*Определение 1.2.16* [45, c. 87]. является слабой – атомной моделью , если является моделью теории и для любого каждый -элементный кортеж элементов из удовлетворяет в некоторой формуле из такой, что , как только из и .

Далее рассмотрим специальные типы множеств, которые нам понадобятся для доказательства результатов параграфов 3.2 и 3.3.

В современной теории моделей важную роль играют определимые подмножества рассматриваемых моделей. Множество называется определимым, если существует формула языка, решением которой является данное множество. Такие специальные подмножества семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории мы выделяем с помощью следующего определения. Пусть – некоторый оператор замыкания, определяющий предгеометрию над (например, или ). Несомненно, такой оператор является частным случаем оператора замыкания, и его примером является оператор замыкания, определенный в любом линейном пространстве как линейная оболочка [11, c.99], [45, c.87].

*Определение 1.2.17* [9, c. 163]. Пусть . Будем говорить, что множество является -йонсоновским подмножеством множества , если удовлетворяет следующим условиям:

1. -определимое множество (это означает, что существует формула из , решением которой в является множество , где , то есть – это вид формулы, например и так далее.);
2. , .

Чтобы воспользоваться преимуществами принципа реостата, который будет применен к конкретной модели, мы должны определить ряд определяемых подмножеств, в которых основы реостата заложены в виде подмножества формул с дополнительными условиями, касающимися, прежде всего, атомности, ядерности, и экзистенциальной замкнутости, когда это необходимо.

Для дальнейших рассуждений фиксируем некоторую йонсоновскую теорию и ее семантическую модель в счетном языке и [45, c. 87]. Множества состоят из -формул, совместных с теорией , то есть любое конечное подмножество формул из совместно с . Пусть .

*Определение 1.2.18* [45, c. 87]. Множество называется атомным в теории , если:

1. , существует такой, что для любой формулы следует, что является полной формулой для и ;
2. , и полученная модель называется атомной моделью теории .

*Определение 1.2.19* [45, c. 87]. Множество называется слабо атомным в теории , если:

1. , существует такой, что в для любой формулы следует что всякий раз, когда из и ;
2. , и полученная модель называется слабо -атомной моделью теории .

Легко понять, что определения 1.2.20 и 1.2.21 естественным образом обобщают понятия атомности и слабой атомности как -атомная и слабо -атомная для любого кортежа конечной длины из множества .

Пусть , , где представляет собой атомное множество , .

*Определение 1.2.20* [45, c. 87].

1. означает, что для любой формулы из , если , то .
2. означает, что и .

*Определение 1.2.21* [11, c. 100]. Множество называется -алгебраически простым в теории , если:

1. является -атомным множеством в ;
2. , ,

и полученная модель называется -алгебраически простой моделью теории .

Из определения алгебраически простого множества в теории следует, что йонсоновская теория , имеющая алгебраически простое множество, автоматически является экзистенциально простой. Легко понять, что примером такой теории является теория линейных пространств.

Для постановки следующих определений следует напомнить определение ядерной модели (определение 1.1.22)

*Определение 1.2.22* [11, c. 100]. Множество называется -ядерной в теории , если:

1. является – атомным множеством в теории ;
2. , где – ядерная модель теории ,

и полученная модель называется ядерной моделью теории .

*Теорема 1.2.4* [26; c. 157]. Для любого следующие условия эквивалентны:

1. – ядерная структура теории
2. – модель любого универсального предложения, совместная с , и существуют экзистенциальные формулы и , для , такие, что

и

Следующие определения 1.2.23 и 1.2.25 будут иметь значение для формулировки результатов параграфа 3.2.

*Определение 1.2.23* [9, c. 163]*.* Пусть и – произвольные йонсоновские теории. Будем говорить, что и -синтаксически подобны, где – это отображение такое, что:

1. ограничение на является гомоморфизмом решеток и , ;
2. , , ;
3. .

*Определение 1.2.24* [11, c. 100].

1. A--атомное множество в теории называется A---nice-множество в теории , --атомное множество теории , если
2. , и полученная модель называется --nice моделью теории
3. для всех , если то , такой, что где .
4. -nice множество в теории , если условие в (a) выполнено с заменой “” в двух местах на “” полученная модель называется --nice моделью теории ;
5. -nice множество в теории , если условие[3] в (a) выполнено с заменой “” в обоих местах на “”, где , и полученная модель называется -nice моделью теории .

*Теорема 1.2.5* [11, c. 100]. Пусть является полной для -предложений сильно выпуклой совершенной йонсоновской теорией и пусть является -атомной моделью в .

* 1. Тогда и , где:

(1) -атомная модель в теории ,

 является --nice-моделью в теории ,

(2)\* является экзистенциально замкнутой и --nice моделью в теории ,

(3) – слабо -атомная модель теории .

* 1. Если теория является полной для предложений, то и эквивалентны.

Приведем описание принципа "реостата" из [45, c. 88]: Пусть даны две счетные модели некоторой йонсоновской теории . Более того, является атомной моделью в смысле [30], а есть -алгебраически простое множество теории и . Поскольку , то .

По определению – алгебраической простоты множества модель является одновременно экзистенциально замкнутой и алгебраически простой. Таким образом, модель изоморфно вкладывается в модель [5, c. 71]. Поскольку, по условию, модель счетно атомная, то согласно теореме Вота, является простой моделью, т.е. элементарно вкладывается в модель . Таким образом, модели отличаются друг от друга только содержанием множества . Это следует из того, что поскольку , то любой элемент реализует некоторый главный тип. То есть все счетные атомные модели в смысле работы [29] изоморфны друг другу. Соответственно при увеличии мощности множества , находится больше элементов, которые не реализуют главный тип и, из этого следует, что не является атомной моделью в смысле [29]. Таким образом, идея принцип реостата заключается в том, что, увеличивая , мы уходим от понятия атомности в смысле [29] и наоборот, уменьшая мощность множества , мы отходим от понятия атомности в смысле [59].

Пусть {атомное, алгебраически простое, ядерное}. Таким образом, задав множество как , (где – семантическое свойство), мы также можем указать атомность в смысле [59] по отношению к атомности в смысле [29]. И соответственно, по принципу «реостата» после определения свойства мы получаем соответствующие понятия атомных моделей, роль которых играет из принципа «реостата».

Следующее определение принадлежит А.Р. Ешкееву и является мерой изменения принципа реостата для йонсоновских теорий.

*Определение 1.2.25* [60]*.* Пусть – некоторая йонсоновская теория, – семантическая модель теории , , – теоретическое множество. , . Если универсальное замыкание является йонсоновской теорией и оболочка Кайзера , где , то будем говорить, что – реостат, если существует -синтаксическое подобие между теориями и .

Понятие экзистенциально замкнутой модели является обобщением понятия алгебраически замкнутого поля.

*Определение 1.2.26* [30]. Пусть , где – универсальный класс счётного языка . Тогда алгебраически замкнута, если не имеет собственных алгебраических расширений. Расширение модели является алгебраическим замыканием , если – алгебраически замкнутое алгебраическое расширение .

Умение сравнивать между собой полные теории является важным инструментом при классификации этих теорий. Мустафиным Т.Г. был предложен способ синтаксического и семантического подобия для классификации полных теорий и их монстр-моделей [61]. Дадим основные определения, связанные с этими понятиями, которые понадобятся нам для доказательства результатов параграфа 3.4.

Пусть – полная теория, тогда , где – булева алгебра формул с свободными переменными.

*Определение 1.3.24* [61, c. 259]. Пусть и – полные теории. Будем говорить, что и синтаксически подобны (), если существует биекция такая, что:

* 1. ограничение на является изоморфизмом булевых алгебр и , ;
	2. , , ;
	3. .

*Определение 1.3.25* [61, с. 260].

 называется чистой тройкой, где не пуста, – группа перестановок и – семейство подмножеств такое, что из следует, что для любого .

Если и – чистые тройки и – биекция, то – изоморфизм, если:

1. ;
2. .

*Определение 1.2.26* [61, с. 260]. Чистая тройка называется семантической тройкой полной теории , где – носитель монстр модели теории , – группа автоморфизмов , – класс всех подмножеств , каждое из которых является носителем соответствующей элементарной подмодели .

*Определение 1.2.27* [61, с. 260]. Полные теории и семантически подобны тогда и только тогда, когда их семантические тройки изоморфны.

*Предложение 1.2.28* [61, с. 261]. Если и синтаксически подобны, то и семантически подобны. Обратный вывод неверен.

В дальнейшем мы будем обозначать синтаксическое и семантическое подобие полных теорий и как и соответственно.

Напомним определение семантического свойства.

*Определение 1.2.29* [61, с. 261]. Свойство (или понятие) теорий (или моделей, или элементов моделей) называется семантическим тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно семантического сходства.

Например из [61] известно, что, умение сравнивать полные теории с помощью синтаксического и семантического подобия явилось полезным при описании важнейших свойств теории стабильности при изучении полных теорий. Следующий результат подтверждает важность синтаксического и, соответственно, семантического подобия полных теорий.

*Предложение 1.2.30* [61, с 261]. Семантическими являются следующие свойства и понятия:

* + - 1. тип;
			2. разветвление;
			3. -стабильность;
			4. ранг Ласкара;
			5. сильный тип;
			6. последовательность Морли;
			7. ортогональность, регулярность типов;
			8. – спектральная функция.

Следующее определение было введено Ешкеевым А.Р. в рамках изучения йонсоновских теорий [20, с.49].

Пусть – произвольная йонсоновская теория, – семантическая модель йонсоновской теории в смысле [57], является центром йонсоновской теории , т.е. , – решётка -формул с свободными переменными. Тогда .

*Определение 1.2.31* [20, с. 49]. Пусть и – произвольные йонсоновские теории. Мы говорим, что и йонсоновски синтаксически подобные (), если существует биекция такая, что:

1. ограничение на является изоморфизмом решеток и , ;
2. , , ;
3. .

В частности, был получен критерий, который связывает фиксированные йонсоновские теории и их центры, которые являются полными теориями. Тем самым, найдена связь между понятиями синтаксического и семантического подобия полных теорий и соответствующих подобий фиксированных йонсоновских теорий.

*Теорема 1.2.6* [20, с 27]. Пусть и являются -полными совершенными йонсоновскими теориями, тогда следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. .

Одним из важных и полезных понятий теории моделей является формульная определимость фиксированных подмножеств рассматриваемых моделей. В частности, при изучении полных теорий существуют аксиоматические подходы к таким подмножествам. В работе [31] при переходе к фиксированным подмножествам семантической модели фиксированной йонсоновской теории используется понятие специальных определимых формульных подмножеств семантической модели. Данные понятия были определены Ешкеевым А.Р. [60, с. 38], где им были определены понятие йонсоновского множества и его частного случая – теоретического множества. Данный подход является обобщением известного понятия базиса в линейной алгебре.

*Определение 1.2.32* [60, с. 38]. Пусть – некоторая йонсоновская теория фиксированного языка, а – её семантическая модель. Подмножество называется йонсоновским множеством теории , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

* 1. множество является -определимым подмножеством (это означает, что существует -формула, решением которой в является множество ) ;
	2. , , где – некоторый оператор замыкания, определяющий предгеометрию [25, с. 289] над (например или ).

Резюмируя вышесказанное, мы можем рассмотреть более общую ситуацию, определяющую следующий класс теорий.

*Определение 1.2.33* [21, с. 292]. Обозначим через и назовем его фрагментом йонсоновского подмножества , где – семантическая модель этой теории, , , .

Рассмотрим счетный язык , полную для экзистенциальных предложений совершенную йонсоновскую теорию в языке и её семантическую модель . Пусть X – йонсоновское множество в , а – экзистенциально замкнутая подмодель семантической модели , где . Тогда пусть , где – йонсоновский фрагмент йонсоновского множества X.

*Определение 1.3.34* [12, с. 157]. Множество называется теоретическим множеством, если – йонсоновское множество, и универсальное замыкание формулы определяет некоторую конечно аксиоматизируемую йонсоновскую теорию.

Понятие сильной минимальности, как для множеств, так и для теорий, сыграло важную роль в описании бесчисленных категоричных полных теорий в работе [59]. Приведем определение сильно минимального типа.

Пусть – структура языка . Подмножество из называется минимальным, если оно определимо (с параметрами из ), бесконечно и если для любого определимого (с параметрами из ) подмножества из либо или конечны. Формула (в ) является сильно минимальной, если она определяет минимальное множество во всех элементарных расширениях . Неалгебраический тип является сильно минимальным, если он содержит сильно минимальную формулу.

**1.3** **Экзистенциально замкнутые структуры.**

Теория экзистенциально замкнутых структур является важной частью классической теории моделей.

*Определение 1.3.1* [27]. Модель экзистенциально замкнута над теорией , если и для каждой модели теории ,

Модель экзистенциально замкнута, если она экзистенциально замкнута над некоторой теорией (и, следовательно, над ).

При рассмотрении фиксированной теории будем считать классом структур, экзистенциально замкнутых над .

Приведем некоторые примеры экзистенциально замкнутых структур.

* – теория полей, – класс алгебраически замкнутых полей.
* – теория линейных порядков без конечных элементов, – класс плотных линейных порядков без конечных элементов. Аналогично и для теорий линейного порядка с другими заданными условиями конечной точки.
* – теория абелевых групп, – класс делимых абелевых групп с бесконечным числом элементов каждого простого порядка [32, теорема 2.4].
* – теория групп, – класс алгебраически замкнутых групп [33], [34], [37].

Приведем другую характеристику экзистенциально замкнутых структур, которая демонстрирует, что некоторые теории действительно имеют экзистенциально замкнутые модели.

*Теорема 1.3.3* [27, с. 297]. Для любой модели теории следующие условия эквивалентны:

1. экзистенциально замкнуто над .
2. Если для некоторой формулы и точки , то , где – диаграмма .
3. Если для некоторой формулы и точки , то , для некоторой формулы такой, что

Используя условие c) теоремы 1.3.3, можно показать существование экзистенциально замкнутых структур над некоторыми теориями.

*Теорема 1.3.4* [27, с. 297]. Пусть – любая теория. Для каждой модели теории есть модель теории такая, что , и если для некоторой формулы и точки , то для некоторой формулы такой, что

*.*

*Теорема 1.3.5* [27, с. 298]. Пусть – любая -аксиоматизируемая теория. Для каждой модели теории имеется модель теории такая, что и экзистенциально замкнуто над .

В [37] оприсана конструкция экзистенциально (= алгебраически) замкнутой группы, там же указано, что конструкция работает и для других классов структуры. Теоремы 1.3.4, 1.3.5 представляют собой теоретико-модельный вариант этой конструкции.

Следующий результат объединяет некоторые элементарные факты, касающиеся экзистенциально замкнутых структур.

*Теорема 1.3.6* [27, с. 298]. Пусть – любая теория и – дедуктивное замыкание. Для любой модели теории эквивалентны следующие условия:

1. экзистенциально замкнуто над .
2. экзистенциально замкнуто над .

*Теорема 1.3.7* [27, с. 298]. Если , обе экзистенциально замкнуты над теорией , то .

Доказательство следующей теоремы можно найти в [32, c. 285 (следствие 7.7)].

*Теорема 1.3.8* [32, c. 284]. Если , где и экзистенциально замкнуто над , то экзистенциально замкнуто над .

*Теорема 1.3.9* [27, c. 299]. Любая экзистенциально замкнутая структура симметрична.

До сих пор мы применяли то, что можно назвать локальным подходом к экзистенциальным структурам. Следующие результаты – пример глобального подхода к экзистенциальным структурам.

*Теорема 1.3.10* [27, 299]. Для каждой теории существует не более одного класса моделей теории , таких что:

1. Для каждой существует некоторая модель такая что .
2. Для каждой модели , из , если , то .
3. Для каждой и , если , то .

*Теорема 1.3.11* [27, c. 299]. Пусть имеет класс моделей , удовлетворяющих условиям , , теоремы 1.3.10. Для любой модели теории Т эквивалентны следующие условия:

1. ;
2. экзистенциально замкнуто над .

*Теорема 1.3.12* [27, c. 299]. Если есть -аксиоматизируемая теория, то имеет класс моделей , удовлетворяющих условиям , , теоремы 1.3.10.

Следующая теорема может быть полезна при посроении класса , для теориий которые не -аксиоматизируемы.

*Теорема 1.3.13* [27, c. 299]. Предположим, имеет класс моделей , удовлетворяющих условиям , теоремы 1.3.10. Тогда имеет класс моделей , удовлетворяющих условиям , , той же теоремы.

Основное препятствие к изучению экзистенциально замкнутых структур состоит в том, что класс структур, экзистенциально замкнутых в рамках данной теории, может не быть элементарным. Например, в [32, §7] показано, что почти все ультрастепени алгебраически замкнутых групп не являются алгебраически замкнутыми.

**2. ВВЕДЕНИЕ В ГОЛОГРАФИЧНЫЕ ЙОНСОНОВСКИЕ ТЕОРИИ**

Данный раздел диссертации связан с изучением понятия голографичности структуры в рамках изучения теоретико-модельных свойств фиксированных йонсоновских теорий относительно понятия голографичности йонсоновской теории и ее моделей.

**2.1. Понятие голографичности структуры**

Впервые, понятие голографичности структуры и соответствующие теоретико-модельные свойства этого понятия было определено и рассмотрено в работе [62]. Авторами указанной работы были доказаны результаты из которых следует, что новое теоретико-модельное понятие голографичности структуры представляет собой понятие, которое тесно связано с классическими понятиями теории моделей и играет важную роль при изучении многих классических объектов из алгебры с позиции обобщения такого важного понятия как счетная категоричность рассматриваемой структуры и ее связь с группой автоморфизмов данной структуры.

В частности в работе [62, с. 402] доказано, что любая счетно-категоричная структура предикатной сигнатуры конечной высоты является голографичной, при этом в обратную сторону это утверждение неверно. То есть в работе [62, с. 403] был построен пример голографичной структуры, которая не счетно-категорична. К вышеуказанным классическим объектам из алгебры рассмотренных и описанных в работе [62, с. 406] относительно понятия голографичности структуры отметим следующие алгебраические примеры: абелевы группы, булевы алгебры, линейные порядки, поля и отношения эквивалентности.

Одним из вопросов, поставленных в работе [62, с. 409] является следующий вопрос (\*) – найти другие примеры голографичных структур, отличающиеся от примеров, приведенных в данной работе.

В работе [62] исследование проводились в рамках семантического подхода к понятию голографичности, т.е. авторы не привлекали понятие теории в явном виде, но в контексте работы видно, что в неявном виде теории присутствуют, и надо заметить, что под теорией понимается элементарная теория рассматриваемой голографичной структуры, как например в случае счетно–категоричной структуры. Более того, привлекается группа автоморфизмов рассматриваемой структуры и доказывается критерий голографичности структуры в связи с конечным числом фиксированных орбит после действия этой группы на рассматриваемую структуру. При этом вводится понятие высоты рассматриваемой сигнатуры – это максимальное число аргументов, от которых зависит произвольный предикат рассматриваемой сигнатуры.

Так же в работе [62, с 402] показано, что в случае голографичности структуры в чисто предикатной сигнатуре число предикатов не превышает некоторого конечного числа. Если учитывать, что можно отождествить орбиту любого элемента рассматриваемой структуры с полным типом этого элемента, то становится понятным, что понятие голографичности структуры тесно связано с конечностью стоуновского пространства ее элементарной теории для фиксированных чисел , означающих число свободных переменных в рассматриваемых формулах, которые связаны с высотой сигнатуры. Таким образом, понятно, что конечность орбит, в рассматриваемом случае, совпадает с конечным числом типов, соответственно конечным числом классов формул, и это есть привлечение теории в неявном виде.

Можно пойти другим путем, и рассматривать не полную теорию, как в случае элементарной теории голографичной структуры, а некоторую теорию, которая лежит в классе, вообще говоря, неполных, но, тем не менее, достаточно хорошо изученных и имеющих много классических алгебраических примеров теорий. Таким классом мог бы быть класс индуктивных теорий, т.е. класс, аксиоматизируемый универсально–экзистенциальными предложениями. Это следует хотя бы из того, что все примеры, приведенные в рассматриваемой статье, являются таковыми, за исключением теории конечных полей. Однако если рассматривать элементарные теории полей, то можно рассмотреть индуктивную теорию полей положительной характеристики, у которой нет конечных моделей.

В классе индуктивных теорий есть естественный подкласс йонсоновских теорий, и он полностью удовлетворяет вышеуказанным примерам, в силу того, что произвольная йонсоновская теория, вообще говоря, неполна и может допускать конечные модели. То есть в случае йонсоновской теории полей положительной характеристики возможны и конечные модели в силу, вообще говоря, неполноты йонсоновских теорий.

Понятие голографичности структуры несомненно представляет интересный синтаксический и семантический объект для изучения в силу его новизны, хотя бы из-за того, что это понятие существенным образом связано со всеми конечными подмножествами рассматриваемой структуры. Кроме того, конечность всегда можно формализовать в виде одной формулы, более того эта финитарная определимость таких конечных подмножеств связана с некоторым универсальным конечным множеством (подмножеством данной структуры), которую авторы работы [62, с. 401] назвали множеством прототипов. Т.е. на множестве прототипов существует некоторая определяющая это множество формула, что все решения остальных определяющих формул всех других конечных подмножеств рассматриваемой структуры, находятся в множестве решений формулы определяющей множество прототипов. Более того, из полученных результатов [62, с.401 (cледствие 1.1)] следует что, любая счетно категоричная структура конечной предикатной сигнатуры голографична.

В работе [62] рассматриваются только предикатные сигнатуры. В связи с тем, что данная часть исследования достаточно согласована с контекстом работы [62], все наши определения и связанные с ними результаты так же предполагают некоторую фиксированную чисто предикатную сигнатуру конечной высоты.

*Определение 2.1.1* [62, с. 401]. Структура предикатной сигнатуры конечной высоты называется голографичной, если существует конечное множество такое, что для любого множества мощности не более существует со свойством . Множество будем называть множеством прототипов для структуры . Где через обозначается высота сигнатуры – максимальное число аргументов символов сигнатуры .

Авторами работы [62] замечено, что любая структура конечной сигнатуры высоты 1, а также любая конечная структура конечной сигнатуры голографичны. В работе [62, с. 402] приведен контрпример на основании которого не имеет смысла рассматривать голографичные структуры бесконечных сигнатур конечной высоты.

*Предложение 2.1.1* [62, с. 402]. Пусть – произвольная голографичная структура. Тогда в ее сигнатуре найдется конечное подмножество предикатов такое, что каждый из остальных сигнатурных предикатов совпадает с одним из предикатов из этого подмножества.

Одним из центральных свойств голографичных структур является их похожесть со счетно–категоричными структурами. Так как из описания счетной категоричности следует конечность числа типов элементарной теории рассматриваемой структуры, то для изучения голографичности в [62, с. 402] привлекается понятие группы автоморфизмов, действующей на основном множестве рассматриваемой голографичной структуры.

*Определение 2.1.2* [62, с. 402]. Группа действует почти –кратно транзитивно на множестве , если при ее действии число орбит -ок, составленных из попарно различных элементов множества конечно.

Следующая теорема связывает понятие голографичности структуры с числом типов (количеством орбит) элементарной теории рассматриваемой структуры.

*Теорема 2.1.1* [62, с. 402]. Произвольная структура конечной предикатной сигнатуры голографична тогда и только тогда, когда группа всех ее автоморфизмов действует на ней почти -кратно транзитивно.

*Следствие 2.1.1* [62, с. 402]. Любая счетно категоричная структура конечной предикатной сигнатуры голографична.

В работе [62] был построен пример, который позволяет сформулировать следующее утверждение.

*Теорема 2.1.2* [62, с. 403]. Существует счетная голографичная структура, не являющаяся счетно категоричной.

## 2.2 Теорема существования голографичной модели

В данном параграфе все полученные результаты предполагают конечную предикатную сигнатуру. Это требование относительно сигнатуры следует из результатов работы [62]. Следующие три леммы относятся к описанию экзистенциально замкнутых моделей индуктивных и йонсоновских теорий и их связи с понятием голографичности.

*Лемма 2.2.1*. Любая экзистенциально замкнутая модель произвольной индуктивной теории бесконечна.

*Доказательство.* Предположим противное, что существует конечная экзистенциально замкнутая модель произвольной индуктивной теории. Так как конечность модели записывается в виде -предложения, то в силу факта 1.2.6 все экзистенциально замкнутые модели этой теории стали бы конечными, т.е. у рассматриваемой индуктивной теории была бы всего одна конечная модель с точностью до изоморфизма.

Понятно, что в случае йонсоновской теории (йонсоновская теория является индуктивной) обязательно есть семантическая модель в силу факта 1.2.1, и она является экзистенциально замкнутой в силу факта 1.2.5, при этом ее мощность равна континууму, если язык счетный. Таким образом, теория у которой одна единственная конечная модель, с точностью до изоморфизма, нами не рассматривается.

Класс любой йонсоновской теории можно условно разбить на три класса. Это классы следующих моделей: конечные (), бесконечные () и экзистенциально замкнутые (). То есть и .

Если у теории найдутся голографичные модели, то через мы обозначим множество голографичных моделей теории .

Следующий результат показывает, что счетная категоричность рассматриваемой йонсоновской теории связанна с понятием голографичности и экзистенциальной замкнутости своих моделей, при этом, .

*Лемма 2.2.2* [7, с.216]. Если совершеннная, не -категоричная йонсоновская теория, то

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. найдется модель , такая что и . Из условия что и , следует, что любая модель тоже будет принадлежать , т.е. . Для доказательства этого факта достаточно доказать, что семантическая модель теории принадлежит .

По определению 2.1.1, означает, что найдется конечное множество , такое что – прототип. Из теоремы 2.1.1, следует, что , где , и , тогда согласно теоереме Рыль-Нардзевского (о счетной категоричности) следует, что и максимум она может быть , из этого следует, что формул конечное число, которые истины в с точностью до эквивалентности в . Обозначим через конъюнкцию всех возможных формул, где . Фактически является описанием прототипа . – модельно-полна, и так как – совершенна следует, что любая формула в эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле, в частности, пусть формула эквивалентна формуле [63], где – некоторая экзистенциальная формула от тех же свободных переменных, которые содержаться в формуле .

В силу факта 1.2.5, имеем, что семантическая модель , при этом в силу универсальности в мощности , найдется такое вложение модели в модель и по условию, тогда в истинна формула , в силу экзистенциальности формулы , которая сохраняется при вложении модели в модель . Но формула эквивалентна формуле в теории , при этом описывает прототип в модели , так, как . Тогда в модели есть прототип, который описывается формулой , и значит модель . Тогда для любой модели верно, что , в силу того, что экзистенциальная формула истинная в и утверждения упражнения 4(б), раздел 8.2 из работы [23]. То есть мы доказали, что при нашем предположении о непустом пересечении множеств и эти множества совпадают.

Так как совершенна, то в силу теоремы 1.2.3 мы можем рассмотреть две модели и из , и при этом . Нам достаточно рассмотреть случай, когда и .

В силу вышесказанного и нашего предположения, нам достаточно показать, что если модели и , , следует, что , и тогда будет -категорична, что приведет к противоречию с условием теоремы. Заметим, что у моделей и найдутся хотя бы по одному прототипу и соответственно. Так как модели и – экзистенциально замкнутые, следует что . Пусть биекция между конечными множествами прототипов и . Также , потому что – полная теория и в силу совершенности теории . Тогда в языке . Так как – прототипы, и и экзистенциально замкнутые модели, то они реализуют одинаковые типы, так как тип конечного множества равняется типу конечного множества .

Берем любую формулу с константами из , такую, что эта формула не встречалась в типе множества , то есть формула не принадлежит типу множества . Формула в силу совершенности теории реализуется в , так как – насыщенная модель в мощности , но так как модель – экзистенциально замкнута в и – экзистенциальная формула, следовательно существует такой элемент , что в модели выполняется формула . Те же действия повторяем с моделью . Т.е. берем такую формулу , что не принадлежит типу множества и эта формула реализуется в модели в силу совершенности теории . Соответственно в силу экзистенциальной замкнутости модели найдется элемент такой что в модели истинна формула . Так как и – прототипы одинаковой мощности, и тип равен типу , то мы можем поставить в соответствие элементу элемент , где реализует формулу , а элемент реализует формулу . Далее повторяем эту процедуру для формул над множеством и и т.д., мы получим, что счетные модели и изоморфны между собой. Тем самым получили противоречие с условием теоремы, где предпологается, что рассматриваемая теория не является счетно-категоричной.

Для существования голографичной модели в рамках изучения вышеуказанных йонсоновских теорий существенную роль играет класс конечных моделей этой теории, то есть . Наличие конечных моделей для фиксированных совершенных йонсоновских теорий, которые не -категоричны вытекает из следующей леммы. Фиксированность заключается в аксиоматизации центра рассматриваемой йонсоновской теории.

*Лемма 2.2.3* [7, с. 216]. Если – совершенная йонсоновская теория, центр которой является универсально-аксиоматизируемой теорией, при том, что сама теория не -категорична с условием , то в этом случае теория совпадает со своим центром.

*Доказательство.* Предположим противное, то есть теория . Тогда теория не полна, так как – полная теория (, где – семантическая модель теории ). В силу неполноты теории найдутся модели такие, что . В силу теоремы 1.2.1, найдутся такие модели такие, что изоморфно вкладывается в , а изоморфно вкладывается в . Причем, в силу теоремы 1.2.3 и также являются моделями , где – центр йонсоновской теории . Так как , то найдется предложение языка теории , которое их различает. В силу универсальной аксиоматизируемости в найдутся подмодели модели и модели соответственно, которые будут изоморфны соответсвенно и . Но так как – модельно-полна, то и будут элементарными подмоделями и соответственно. Так как полная теория, то . Таким образом, пусть истинна в и истинна в и истинно в и в . В силу того, что , следует, что в , . Получили противоречие с элементарной эквивалентностью и .

Таким образом получается, что если теория -полна, то в этом случае теория будет равна своему центру . Тогда в силу вышесказанного и в силу совершенности теории . Значит . А по лемме 2.2.2 следует, что . Значит, для того чтобы для вышеуказанных условий леммы 2.2.3 класс был не пуст, необходимым условием является условие, что класс .

Пусть – подмножество языка. В случае, когда мы рассматриваем – класс моделей теории , то -полнота теории означает, что любые две модели и из элементарно эквивалентны относительно предложений из ().

Относительно произвольной йонсоновской теории мы можем заметить, что требование -полноты сводится к трем случаям:

1. ,

2. ,

3. .

Случай 3 означает, что полнота рассматриваемой теории, верна только для булевых комбинаций атомных (бескванторных) предложений. Так как в этой части нашего исследования используются только чисто предикатные сигнатуры, мы этот случай не рассматриваем.

Случай 2 не допускает конечных моделей, так как конечность моделей записывается -предложениями, то есть в этом случае . Частный случай когда конечная модель всего одна, с точностью до изоморфизма, в нашем случае не представляет интереса.

В случае 1 легко заметить, что -полнота рассматриваемой теории эквивалентна -полноте этой теории.

Примеров, со всеми видами полноты, не йонсоновских (иногда и йонсоновских), но индуктивных теорий достаточно много приведено в работе [3].

Существование модельного компаньона для фиксированной теории представляет собой одно из направлений развития теории моделей для индуктивных теорий. Каждый раз в конкретно рассматриваемом случае для класса структур необходимо непосредственно доказывать существование модельного компаньона.

Помимо теоремы 1.2.1 в этом направлении ярким примером является результат Сарацино, где дается достаточное условие существования модельного компаньона для -категоричной полной теории. И данный модельный компаньон также является счетно категоричным. Этот результат нам понадобиться для доказательства теоремы 2.2.5.

*Теорема 2.2.1* (Сарацино [38]). Если – полная теория, и она –категорична, тогда существует – модельный компаньон данной теории, и этот компаньон –категоричный.

Наша цель в данной части работы, как мы уже отмечали, состоит в том, чтобы найти новые примеры голографичных структур, которые не обсуждались в [62]. Кратко опишем наш подход, к реализации данного вопроса. Поскольку по [62] счетно-категоричная структура является голографичной, то если мы найдем условие, не эквивалентное счетной категоричности, но вытекающее из счетной категоричности, то это теоретико-модельное свойство дало бы решение вопроса (\*).

Мы заметили, что все примеры голографичных структур в работе [62] изучались в рамках их элементарных теорий, которые, в свою очередь, являются примерами йонсоновских теорий. Единственный пример теории которая не является йонсоновской в данной работе – теория всех конечных полей. Однако, следует отметить, что теория всех полей фиксированной характеристики – это пример йонсоновской теории.

Таким образом, становится очевидным наш интерес к изучению свойств различных классов йонсоновских теорий относительно голографичных моделей этих теорий, если таковые имеются. Мы спроецировали проблематику вопроса (\*) в рамках изучения совершенных йонсоновских теорий и их классов моделей.

Наша основная идея для решения этой задачи заключается в том, что таким свойством могло бы быть понятие совершености рассматриваемой йонсоновской теории. Для реализации нашей гипотезы докажем следующий результат.

*Теорема 2.2.2* [7, c. 216]. Пусть – -категоричная, йонсоновская теория, где , тогда – совершенна.

*Доказательство.* Мы имеем два случая категоричности ; . В случае несчетной категоричности, когда , в силу теоремы 1.1.4 (М. Морли) [2, с. 87] о несчетной категоричности, во всех несчетных мощностях существует только одна модель, с точностью до изоморфизма. Следовательно, семантическая модель насыщена, и, соответственно, теория является совершенной йонсоновской теорией.

Рассмотрим случай, когда . Если является -категоричной, йонсоновской теорией, тогда является -категоричной теорией. Это следует из следующих рассуждений:

Пусть теория -категорична. Предположим, что теория не -категорична, тогда существуют неизоморфные счетные модели и теории . Но, так как , то . Следовательно, и принадлежат . Получили противоречие с -категоричностью .

Но в силу полноты и теоремы 2.2.1 имеет -категоричный модельный компаньон` .

Чтобы доказать совершеность теории в силу факта 1.2.3 будет достаточно доказать следующее равенство .

 и – взаимно модельно-совместны так как модельный компаньон теории . Заметим, что и также взаимно модельно-совместны, но тогда в силу транзитивности имеем, что и взаимно модельно-совместны. Но так как – модельный компаньон теории , то – модельно-полная теория и, следовательно, – модельный компаньон теории [42, c. 146].

Но для того, чтобы показать равенство, этого недостаточно, потому что есть примеры -теорий (индуктивных теорий), которые модельно полны, но не полны.

Покажем, что теория не имеет конечных моделей, для того чтобы воспользоваться критерием Лося–Вота [2, с. 78]: если не имеет конечных моделей и -категорична, то -полна.

Предположим противное. Пусть найдется модель теории и . Так как – модельно полная, и следовательното -теория, т. е. – индуктивная теория, тогда любая модель данной теории изоморфно вкладывается в некоторую экзистенциально замкнутую модель этой теории. Следовательно, существует такая экзистенциально замкнутая модель теории и изоморфизм такие, что и . Но поскольку – модельно-полная теория, то – элементарный мономорфизм, т. е. элементарно вкладывается в .

Пусть – предложение, говорящее, что модель , тогда и , получим противоречие с тем, что .

Таким образом, теория не имеет конечных моделей. Тогда по критерию Лосся–Воота [2, с.78] теория полна. Теперь мы можем перейти к непосредственному доказательству теоремы 2.2.2.

Мы имеем, что теории и обе полные теории. Нам нужно показать, что , для этого воспользуемся тем, что они обе -категоричны. Так как и модельно-совместны, то , но модельно-полна, так как – модельный компаньон. В силу модельной полноты теории , все формулы этой теории эквивалентны множеству формул, которые одновременно являются универсальными и экзистенциальными. Значит нам достаточно проверить все для -формул.

Докажем от противного. Предположим, что . Отсюда следует, что эти две теории отличаются по крайней мере одним предложением. Например, если , то в силу полноты теории предложение . В силу счетной категоричности и модельной совместности этих теорий найдутся две экзистенциально замкнутые модели и соответственно теорий и , где и взаимно вложены друг в друга. При этом, и экзистенциально замкнуты, но их различает экзистенциальное предложение . Получаем противоречие с тем фактом, что – модельно полна. Таким образом, а значит, что теория – совершенна.

Перепишем определение 2.1.1 голографичной структуры в следующем символическом виде. Пусть и – подмножества носителя модели . Модель голографична, если

 (1)

Соответственно если не голографична, то верна следующая символическая запись.

 (2)

Следующий результат – теорема существования голографичных моделей для достаточно широкого подкласса индуктивных теорий, а именно класса совершенных йонсоновских теорий.

*Теорема 2.2.3* [7, c. 216]. Если совершенная йонсоновская теория центр которой является универсально-аксиоматизируемой теорией, и , то , т.е. такая теория имеет голографичную модель.

Чтобы доказать этот факт, предположим противное то есть (2), допустим множество – пусто. Это означает, что для любой модели , . Далее по определению 2.1.1, голографичной структуры, для любой модели , мы можем записать, что для любого кандидата в прототипы , , такого что найдется такое , что и где через обозначается высота сигнатуры . При этом для любого автоморфизма , верно что .

Пусть , {. Соответственно множество всех потенциальных прототипов обозначим через , где {, , ..., .

В силу нашего предположения мы имеем, что в качестве , не опуская общности, можно рассмотреть семантическую модель теории мощности , которая -насыщенна в силу совершенности теории . И также, в силу предположения, для любого автоморфизма для любого следует, что не принадлежит ни одному потенциальному прототипу , когда , причем мощность , в силу вышесказанного, равна . Мы можем переписать это условие в виде формул от одной свободной переменной, суть которых будет отражать вышесказанное предположение, и обозначим суть этого условия через (3).

Запишем (3) в виде матрицы порядка , состоящей из множества формул, в каждой -той cтроке и -ом столбце которой записана информация для соответствующего множества , потенциального прототипа относительно автоморфизма .

 (3)

Таким образом количество столбцов этой матрицы определяется мощностью множества всех прототипов, а количество строк этой матрицы определяется мощностью множества всех автоморфизмов участвующих в этой матрице. Размер нашей матрицы может быть максимальным и совпадать с мощностью семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. То есть количество столбцов и количество строк ограничены мощностью этой модели. Заметим, что каждая -тая строка образует некоторое множество формул, т.е. некоторый тип, обозначим его через .

Из берем первую формулу, , из берем вторую формулу и т.д. То есть мы собираем формулы стоящие на главной диагонали описанной выше матрицы , и обозначим это полученное множество через .

Так как теория совершенна по условию, ее семантическая модель мощностью является -насыщенной.Тогда в силу теоремы компактности множество является совместным множеством, то есть, что тип реализуется в ее семантической модели .

С другой стороны, если рассмотреть любой счетный подтип типа , то он также реализуется в семантической модели данной теории в силу ее совершенности. Но при этом тип не является главным по построению (так как он содержит формулы ). Тогда он опускается в некоторой счетной модели теории .

Так как теория индуктивна, в силу теоремы 1.2.1, следует, что найдется модель из , такая что изоморфно вкладывается в . В силу совершенности теории , модель является моделью теории – центра йонсоновской теории . Это следует из теоремы 1.2.3.

Пусть . Рассмотрим бескванторную формулу ее отрицание . Понятно, что бесквантоные формулы и их отрицание являются экзистенциальными формулами. Заметим, что и реализуется в семантической модели теории , но при этом опускается в модели . Таким образом в , а в . Но при этом модель принадлежит в силу факта 1.2.5. В силу -универсальности модели модель изоморфно вкладывается в . В силу того, что модель и модель являются экзистенциально замкнутыми моделями, то в силу изоморфного вложения модели в модель , это изоморфное вложение сохраняет все экзистенциальные формулы.

Доказательство этого факта следует из лемы 8.1.1 из [20, с. 362]. Таким образом, мы получили противоречие, следовательно , тем самым мы получили искомый результат данной теоремы.

**3 Основные результаты**

## 3.1 Ядерные йонсоновские теории

Содержание данного параграфа относится к вопросам теории моделей, которые связаны с изучением выпуклости теории, и имеет отношение к тематике определенной А. Робинсоном. С одной стороны, понятие выпуклости имеет полное описание в рамках работы [26, с. 155] в которой изучается тесная связь между понятиями выпуклости теории и ядерности модели рассматриваемой теории.

В работе [26, с. 155] описаны понятия, которые рассматриваются в контексте произвольных теорий, которые, вообще говоря, не являются полными. Также, стоит отметить, что в доказательствах основных результатов этого параграфа рассматриваемые формулы имеют длину пренекса, не превышающую двух [8, с. 104].

В данном параграфе мы будем с одной стороны сужать изучаемый класс, вообще говоря, неполных теорий до класса йонсоновских теорий. С другой стороны, мы будем рассматривать понятие ядерности моделей в более общем контексте, а именно в классе экзистенциально замкнутых моделей рассматриваемой йонсоновской теории. В силу индуктивности йонсоновской теории ее класс экзистенциально замкнутых моделей теории всегда не пуст. В работе [26, с. 155] на самом деле рассматривается ядерные структуры (модель сигнатуры данной теории) а не модели теории, и как ее частный случай было рассмотрено понятие жестко вложимой модели. В нашем случае, мы будем рассматривать ядерную модель, и по определению это понятие будет совпадать с понятием жестко вложимой модели, как в работе [26, с. 160]. Соответственно все свойства вышеуказанных моделей теории будут транслироваться на понятие ядерности модели в смысле йонсоновской теории. Цель данного параграфа связать результаты по изучению йонсоновских теорий с изучением теоретико-модельных свойств ядерности. Йонсоновские теории, которые допускают ядерную модель в классе экзистенциально замкнутых моделей этой теории, будут называться ядерными. Понятно, что любая ядерная модель является алгебраически простой моделью [6]. В работах [45], [64] были рассмотрены новые виды атомных и простых счетных моделей соответствующих типов йонсоновских теорий.

Так как в определении йонсоновской теории мы видим только изоморфные вложения, у нас появляется естественный интерес к поведению алгебраически простой модели. В случае простой модельи имеется хороший критерий в виде теоремы Р. Вота [29]: модель проста тогда и только тогда, когда она счетна и атомна. В силу того, что в случае алгебраической простоты такого критерия нет, изучение алгебраически простых моделей является важной задачей в рамках изучения йонсоновской теории [9]. Частным случаем алгебраически простой модели является понятие ядерной модели (определение 1.1.22). В рамках изучения индуктивных теорий было дано определение 3.1.1 ядерной теории.

В силу определений 1.1.22 и 1.1.23 ясно, что модель жестко вложима в любую модель теории тогда и только тогда, когда является ядерной моделью и не имеет собственных автоморфизмов, кроме тождественных. Таким образом, любая ядерная модель ядерной йонсоновской теории жестко вложима в любую экзистенциально замкнутую модель этой теории [6, с. 227].

Все приведенные ниже новые определения теорий выделяют в классе индуктивных теорий довольно широкий естественный подкласс теорий. Актуальность изучения этого класса теорий выражается в том, что каждый из перечисленных классов теорий определяется естественным понятием, обобщающим известные понятия ядерности, алгебраической простоты и их комбинаций. В то же время новые классы теорий становятся интересными для изучения их теоретико-модельных свойств неполных теорий в рамках изучения йонсоновских теорий, связанных с указанными выше понятиями [8, с. 106].

Поскольку в связи с изучением ядерных моделей мы будем иметь дело, с вообще говоря, неполными йонсоновскими теориями и их классами моделей [8, с. 106] удовлетворяющих свойству экзистенциальной замкнутости, мы можем выделить естественный подкласс связанный с понятием ядерной модели из класса всех йонсоновских теорий. Ниже дадим определение ядерной теории в рамках изучения индуктивных теорий.

*Определение 3.1.1* [8, с. 106]. Индуктивная теория называется ядерной теорией, если существует модель такая, что для любой модели существует единственный изоморфизм из в .

В силу того факта, что по определению любая ядерная модель является алгебраически простой моделью, мы выделяем естественный подкласс класса всех йонсоновских теорий, а именно класс таких йонсоновских теорий, которые обязательно имеют алгебраически простую модель [8, с. 106].

Поскольку, в работе [26, с. 157] понятие ядерной модели изучалось в рамках изучения выпуклой или сильно выпуклой теории, далее рассмотрим свойство выпуклости и сильной выпуклости рассматриваемой теории как дополнительное понятие к ядерной йонсоновской теории [8, с. 106].

Приведем известный факт о реализации экзистенциальных формул относительно расширений.

*Лемма 3.1.1* [26, с. 156]. Предположим, что – модели , где – экзистенциальная формула. Тогда

Доказательство следует из того факта, что экзистенциальные формулы замкнуты относительно расширений [8, с. 106].

Определим необходимые для доказательства основного результата данного параграфа свойства и приведем некоторые относящиеся к ним элементарные факты. Дополнительную информацию можно извлечь из [1] и [39].

Через обозначим, что в модели выполняется каждое истинное предложение из экзистенциальных предложений модели . – полная теория, представляет собой множество всех предложений, истинных в .

Выпуклые теории обладают важным алгебраическим свойством: пусть – выпуклая теория, тогда для любой модели теории любое непустое множество порождает единственную подструктуру, которая является моделью теории . В частности, пересечение всех моделей теории , содержащихся в этой модели и содержащих это множество . Если теория сильно выпуклая, то пересечение всех моделей теории , содержащихся в этой модели теории , также является моделью . Это пересечение называется ядерной моделью теории . В работе [26, c. 156] отмечено, что если удовлетворяет свойству совместного вложения и является сильно выпуклой, то ядерная модель этой теории единственна с точностью до изоморфизма [8, c. 106].

На основании теоретико-модельных свойств вышеупомянутых комбинаций йонсоновских теорий перенесем некоторые результаты из [26, с. 155] на йонсоновские теории, удовлетворяющие определению 3.1.1 или определению 1.2.9, или их комбинациям. Из определения ядерности и экзистенциально алгебраической простоты йонсоновской теории можно отметить, что ядерная модель из [26, c. 157] в рамках исследования любой йонсоновской теории будет единственной и жестко вложимой моделью рассматриваемой теории. Таким образом, подобная постановка задачи относительно ядерных моделей рассматривается впервые.

*Теорема 3.1.1* [8, с. 156]. Для любой ядерной совершенной йонсоновской теории следующие условия эквивалентны:

1. – ядерная модель теории .
2. жестко вкладывается в любую экзистенциально замкнутую модель .
3. – модель центра теории и существуют экзистенциальные формулы и для такие, что

И

*Доказательство.* Эквивалентность пунктов (a) и (b) следует из того, что теория является ядерной и совершенной. Докажем из (с) в (b) Пусть – некоторая модель теории тогда существует такая, что – экзистенциально замкнутая мод ель теории где – элементарно вкладывается в относительно экзистенциальных формул. Такая модель существует благодаря индуктивности теории . При этом мощность может быть любой мощностью, меньшей или равной мощности семантической модели этой теории. Ясно, что элементарно вкладывается в относительно экзистенциальных формул, тогда в существует экзистенциально замкнутая подмодель такая, что изоморфна .

где – экзистенциальные формулы такие, что , и – модели [8, c. 107]. Поэтому по лемме 3.1.1

Следовательно, и, следовательно, является ядерной моделью .

В силу совершенности теории следует, что является моделью центра и в силу своей ядерности вкладывается ровно один раз в любую модель этого центра. Далее, в силу того, что центр является модельным компаньоном теории (поскольку теория совершенна), модельный компаньон является модельно полной теорией. Соответственно, в модельно полной теории любая формула эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле [63, с. 50]. Отсюда следует условие (c).

*Следствие 3.1.1* [8, c. 107]. является ядерной моделью некоторой совершенной ядерной йонсоновской теории тогда и только тогда, когда является ядерной моделью оболочки Кайзера теории .

*Доказательство.* Докажем необходимость утверждения.

Пусть будет ядерной моделью описанной выше совершенноой ядерной йонсоновской теории . Пусть – семантическая модель теории . Пусть – оболочка Кайзера теории , т.е.

где – множество всех предложений языка сигнатуры теории Т.

Так как совершенна, то является модельным компаньоном теории и, следовательно, модельно полной теорией. Как следствие этого, любая формула из эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле [65]. В силу того факта, что модель – семантическая модель теории и модель теории то оболочка Кайзера будет равна центру , т.е. , где

где – множество всех предложений языка сигнатуры теории .

В силу того, что условие (с) теоремы 3.1.1 выполняется для модели и моделей теории , из этого следует, что является ядерной моделью теории . Пусть – произвольная модель теории , тогда изоморфно вкладывается в единственным образом, то есть существует такая, что , где изоморфна . Более того, изоморфно вкладывается в каждую модель [8, c. 107]:

.

Таким образом, оказывается, что сильно выпукла и что является ядерной моделью теории . Обозначим ().

Докажем достаточность условия. Предположим, что – сильно выпуклая теория и что – ядерная модель теории . Пусть – модель теории и – семантическая модель теории . Тогда и для некоторого . Поскольку , являющаяся моделью теории , не имеет собственной подмодели, можно сказать, что существует модель [8, c. 107]:

.

В частности, . Если изоморфна некоторой другой модели , то аналогичным образом легко показать, что , и, следовательно, является ядерной моделью теории .

*Следствие 3.1.2* [8, c. 107]. Пусть – ядерная модель сильно выпуклой совершенной ядерной йонсоновской теории . Тогда существуют экзистенциальные формулы для такие, что:

и

*Следствие 3.1.3* [8, c. 108]. Ядерная модель жестко вкладывается в каждую модель теории тогда и только тогда, когда выполнено условие (с) теоремы 3.1.1 с для всех .

*Теорема 3.1.2* [8, c. 108]. Пусть – ядерная модель для некоторой экзистенциально алгебраически простой теории . Тогда следующие условия эквивалентны:

1. вкладывается в каждую экзистенциально замкнутую модель центра этой теории.
2. – алгебраически простая модель теории .

*Доказательство.* Докажем из (a) в (b). Пусть модель вкладывается в каждую экзистенциальную замкнутую модель центра этой теории. Предположим, что модель не принадлежит и предположим, что модель не вкладывается в модель [8, c. 108]. Поскольку – йонсоновская теория, то в силу индуктивности теории существует модель такая, что изоморфно вкладывается в , но модель изоморфно вкладывается в семантическую модель теории Модель также принадлежит множеству экзистенциально замкнутых моделей теории .

Пусть – изоморфный образ модели в модели . Модель является изоморфным образом модели в модели , если вкладывается в , то получаем противоречие с предположением, что не вкладывается в . Поэтому предположим, что не вкладывается в и они не изоморфны. Из этого следует, что найдется формула, которая их различает. Пусть эта формула . И не опуская общности, допустим, что в , где , то есть в но по предположению в модели , которая изоморфна модели , будет верно, что где . Но и , и лежат в модели , которая является экзистенциально замкнутой в соответствии с вышесказанным. Тогда получаем противоречие [8, c. 108]. Значит модель является алгебраически простой моделью теории .

Докажем из (b) в (a). Пусть – алгебраически простая модель теории . Таким образом, изоморфно вкладывается в любую модель , но поскольку имеем . Отсюда следует, что модель алгебраически проста для теории , и отсюда заключаем, что изоморфно вкладывается в любую модель из , поскольку .

**3.2 Малые модели выпуклых фрагментов определимых подмножеств**

В данном параграфе показано, что любая полная теория в некотором формальном смысле аналогична теории полигонов. Как видно из приведенного в параграфе 1.2 списка примеров теорий, которые являются йонсоновскими теориями, области йонсоновских теории весьма обширны и относятся почти ко всем областям алгебры. Также следует отметить, что йонсоновские теории не являются полными, и поэтому многие классические задачи теории моделей и универсальной алгебры, рассматриваемые для элементарных теорий классов алгебр, которые не являются полными, имеют непосредственное отношение к изучению йонсоновских теорий. При исследовании йонсоновских теорий в рамках этой проблемы Ешкеевым А.Р. были определены понятия йонсоновского спектра и понятия косемантичности соответственно [50]. В связи с этими новыми понятиями, которые соответственно обобщают изучение проблемы элементарной эквивалентности фиксированных классов алгебр в рамках изучения йонсоновских теорий, были получены результаты, связанные с абелевыми группами и модулями в работах [50] и [42]. В связи с этим появляются новые понятия, которые соответственно обобщают изучение проблемы элементарной эквивалентности фиксированных классов. С другой стороны, если рассматривать класс моделей произвольной йонсоновской теории, то этот класс можно условно разделить на два подкласса [9, c. 160].

Класс экзистенциально замкнутых моделей и класс моделей, которые таковыми не являются. Хорошо известно, что элементарность подкласса экзистенциально замкнутых моделей напрямую связана с совершенностью рассматриваемой йонсоновской теории [65, с. 127].

Таким образом, задачи, связанные с исследованием поведения класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной или фиксированной йонсоновской теории, представляют собой актуальный класс задач, относящихся как к классической теории моделей, так и к универсальной алгебре [45, c. 160].

Под малыми моделями обычно понимают счетные модели рассматриваемой теории. Поскольку мы будем работать с фрагментными моделями некоторой фиксированной йонсоновской теории, вообще говоря, не обязательно, чтобы модели малых фрагментов совпадали с малыми моделями этой теории. Понятие выпуклости теории (определение 1.1.21) было введено А. Робинсоном [58, c. 41]. А. Робинсон и Д. Кикер изучали свойства ядерных моделей выпуклых теорий.

Следующий результат связывает выпуклость теории и ее центр в связи с существованием указанной выше формы ядерной модели (Определение 1.2.22).

Символы , , описаны в определениях 1.2.17 – 1.2.22.

Далее, по требованиям к содержанию теоремы 3.2.1: пусть , , , , существует реостат такой, что , , , существует йонсоновская теория, и , удовлетворяющие определению 1.2.23.

*Теорема 3.2.1* [9, с. 164]. является -ядерной моделью для некоторой совершенной, выпуклой, полной для экзистенциальных предложений экзистенциально простой йонсоновской теории тогда и только тогда, когда это -ядрная модель , где – центр *.*

*Доказательство*. Докажем достаточность. Предположим, что сильно выпукла и является ядерная модель теории . Пусть – семантическая модель теории . Пусть – любая модель и – достаточно насыщенное экзистенциально замкнутое расширение .

Тогда , что означает, что для любого -предложения, истинного в , следует истинность в . Это верно, в силу того, что любая модель теории изоморфно вкладывается в , в частности и модели , также вкладываются в , и в силу совершенности теории модель . И в силу сильной выпуклости теории модель изоморфно вкладывается в модель . Следовательно, для некоторого . Так как никакя собственная подмодель не является моделью , мы должны иметь

.

В частности . Если изоморфна некоторому другому , тогда то же рассуждение показывает, что . Следовательно, является ядерной моделью теории .

Докажем необходимость. Пусть ядерная модель для , и пусть – центр теории , тогда очевидно, что множество всех экзистенциальных и универсальных предложений истинно в , поскольку . Условие (2) теоремы 2.1 из работы [26; 157] справедливо для и , так что является ядерной моделью теории . Пусть любая модель . изоморфна ровно одной и также может быть вложена в любую другую модель теории , поэтому

.

Отсюда следует, что сильно выпукла и что является ядерной моделью , как заявлено.

## 3.3 Замыкание специальных атомных подмножеств семантической модели

В работе [29] было доказано, что атомная модель является счетно-простой. В теории моделей малыми моделями называются счетные модели c дополнительными условиями, в частности, которые являются простыми или атомными. Более того, если теория имеет счетную атомную модель, то она единственна с точностью до изоморфизма. Критерий атомности моделей, полученный Р.Вотом, был доказан в рамках изучения полных теорий. Таким образом, в случае полных теорий, любая теория, у которой есть простая модель, имеет хорошую синтаксическую характеристику: любой элемент простой модели полной теории реализует некоторый главный тип. В нашем случае будем рассматривать более общую картину, то есть опустим условие полноты. В данном случае вместо простой модели обычно рассматривают понятие алгебраически простой модели. В этом направлении многое было сделано в работе [59]. Но, можно заметить, что в указанной работе не был получен критерий, связанный с понятиями атомности или алгебраической простоты, при исследовании малых моделей. Более того, на все виды атомных моделей, которые были рассмотрены в этой работе, были построены примеры теории, которые даже не имели алгебраически простой модели [11, с. 97].

В силу различий между атомностью и алгебраической простотой, мы продолжаем искать дополнительные условия, при которых можно будет найти аналог основного результата работы [29, c. 311] для соответствующих понятий простоты и атомности для моделей рассматриваемой теории [11, с. 97].

В данном параграфе акцентируем внимание в рамках вышеуказанной тематики, на исследовании специальных моделей некоторых видов йонсоновских теорий описанных в работах [42], [58], [66]. Чтобы иметь представление относительно поведения малых моделей в йонсоновских теориях, можно использовать следующие источники: [45], [64]. Одна из центральных идей, которая позволяет сравнивать понятия атомности в смысле работы [29, c. 309] и в смысле работы [59, c. 293] является идея понятия "реостата" [45, c. 88], [64, c. 92]. Понятно, что чем больше йонсоновское множество, тем ближе рассматриваемая модель к атомности в смысле работы [59, c. 293] и, наоборот, чем оно меньше, тем ближе к понятию атомности в смысле работы [29, c. 309] [10, c. 97].

Зафиксируем некоторую йонсоновскую теорию и ее семантическую модель . Все рассматриваемые в данном параграфе множества будут являться подмножествами данной семантической модели. Фрагменты, которые будут рассматриваться, необязательно должны сохранять теоретико-модельные свойства вышеуказанной фиксированной йонсоновской теории. Поэтому, мы в каждом конкретном случае будем оговаривать те или иные теоретико-модельные условия в рамках, в которых будет рассматриваться текущая задача [11, c. 97].

Рассмотрим некоторые свойства описанных выше типов моделей и их связь с некоторыми свойствами, касающимися синтаксических характеристик определенной атомности экзистенциальных формул. Представим некоторые свойства из [59, c. 291], обозначим их как и , суть этих свойств заключается в следующем:

: Любая экзистенциальная формула, полная для -формул, является полной для экзистенциальных формул.

): Любая экзистенциальная формула , совместная с подразумевается некоторой -формулой , совместной с .

Будем говорить, что йонсоновская теория допускает и , если эти условия выполняются для всех совместных с теорией формул соответствующего вида [11, c. 100].

Следующие результаты характеризуют свойства и . Дадим формулировку вспомогательных лемм которые нам понадобятся для доказательства теоремы 3.3.2.

Пусть некоторое подмножество семантической модели вышеуказанной фиксированной йонсоновской теории . Тогда фрагмент множества является множеством всех универсально экзистенциальных предложений, истинных в определимом замыкании этого множества . То есть = , где , , , а также удовлетворяет тем условиям, которые будут определять свойства множества .

*Лемма 3.3.1* [11, c. 101]. Пусть некоторый фрагмент -nice алгебраически простого множества . – совершенная экзистенциально простая теория полная для -предложений. Тогда фрагмент допускает свойство

В силу совершенности все формулы относительно -центра теории , в силу модельной полноты и экзистенциальной простоты теории , можно предположить, что достаточно рассмотреть случай, когда и равно [11, c. 101].

*Доказательство.* Пусть есть -nice алгебраически простая модель теории и пусть – экзистенциальная формула, совместная с . Тогда для некоторого из . Пусть – множество всех , которым удовлетворяет из . В силу алгебраической простоты, если – модель теории и для всех , то ( и, следовательно, может быть вложена в с помощью отображения каждого в . Следовательно, поскольку экзистенциальная формула. Следовательно, следует из в моделях теории . В силу компактности мы получаем единственную -формулу , которой удовлетворяет и такую, что , и поэтому этот фрагмент допускает свойство [11, c. 101].

*Лемма 3.3.2* [11, c. 101]. Пусть – некоторый фрагмент алгебраически простого множества . – совершенная экзистенциально простая теория полная для -предложений. Тогда влечет .

*Доказательство.* В силу леммы 3.3.1 допускает свойство . В силу совершенности теории и полноты модели без ограничения общности можно считать, что существует -формула совместная с так, что , где совместна с . Тогда , поскольку является полной для -формул и совместна с . Отсюда следует, что . Поэтому является полным для экзистенциальных формул. Таким образом, выполняется.

Перейдем непосредственно к доказательству следующей теоремы.

*Теорема 3.3.1* [11, c. 101]. Пусть – некоторый фрагмент алгебраически простого множества и пусть фрагмента – совершенной экзистенциально простой теории, полной для -предложений. Тогда является алгебраически простым множеством тогда и только тогда, когда является атомным множеством.

Пусть теория, полная для экзистенциальных предложений, и пусть – счётная модель теории . Тогда есть -nice тогда и только тогда, когда -атомная.

*Доказательство.* Предположим, что является атомной моделью. Тогда из доказательства изоморфизма соответствующих счетных моделей по теореме 3 из работы [45, c. 89] и из теоремы 3.1.1 следует, что есть . Остальное следует из совершенности фрагмента и модельной полноты .

Докажем в обратную сторону. Предположим, есть . Тогда выполняется в силу леммы 3.3.1, а также по лемме 3.3.2. Поскольку есть в частности алгебраически простая и экзистенциально замкнутая модель теории , мы знаем, что имеет атомную модель.

Следовательно, по теореме 3 [45, c. 89] каждая экзистенциальная формула , совместная с теорией , подразумевается экзистенциальной формулой , полной для -формул. По свойству фактически является полной для экзистенциальных формул. В силу свойства существует -формула , совместная с теорией , такая, что . Тогда также является полной для экзистенциальных формул и . Итак, по теореме 3 из [45, c. 89] имеет атомную модель. По теореме 2 [64, с. 89] может иметь только одну алгебраически простую модель, поэтому заданная алгебраически простая модель должна быть атомной моделью [11, с. 101].

*Теорема 3.3.2* [11, с. 101]. Пусть есть выпуклый, совершенный, экзистенциально простой, полный для предложений фрагмент некоторого множества Тогда следующие условия эквивалентны:

1. имеет ядерную модель;
2. если экзистенциальная формула и , то существуют некоторая экзистенциальная формула и целое число такие, что

,

и , если , где – экзистенциальные предложения, то или .

*Доказательство.* Поскольку совершенна и выпукла, она имеет единственную ядерную модель, которая будет ядерной моделью и ее центра. Поэтому доказательство из (a) в (b) следует из теоремы 3.1.1.

Доказательство в обратном направлении следует из следующего факта. Пусть – центр , тогда оболочка Кайзера фрагмента совпадает с в силу совершенства, а оболочка Кайзера есть , где – семантическая модель фрагмента . имеет модель , каждый элемент которой удовлетворяет одной из формул данных по условию (b). Благодаря выпуклости модель является ядерной моделью фрагмента . Далее, поскольку – совершенная и экзистенциально простая теория, модель – экзистенциально замкнутая модель центра и в силу выпуклости она единственна.

## 3.4 Фрагмент теоретического множества и его строго минимальный центральный тип

Данный параграф относится к достаточно известной тематике в области теории моделей. А именно, эта тема связана с вопросами классификации теорий относительно такого важного понятия, как категоричность. Как хорошо известно, относительно понятия категоричности возможны всего 4 комбинации: тотальная категоричность; -категоричность и не -категоричность; -категоричность и не -категоричность; нигде не категоричность. Понятие сильной минимальности тесно связано с понятием -категоричности, т.е. во всех четырёх комбинациях вышеуказанного понятия категоричности, понятие сильной минимальности либо присутствует, либо отсутствует. Таким образом, изучение свойства сильной минимальности имеет важное значение при классификации полных теорий.

Приведем необходимые для дальнейшего исследования определения. Далее в работе предполагается, что .

*Определение 3.4.1.* Пусть – йонсоновская теория. будет называтся робинсоновской теорией, А если она универсально аксиоматизируема.

*Определение 3.4.2* [46, c. 93]. Обогащение называется допустимым, если -тип (это означает, что и любая формула этого типа принадлежит ) в этом обогащении определим в пределах рамки -стабильности, где – обогащение сигнатуры .

*Определение 3.4.3* [46, c. 93]. Робинсоновская теория называется наследственной, если в любом из ее допустимых обогащений любое расширение является робинсоновской теорией.

Пусть – робинсоновская теория, – произвольная модель сигнатуры . Робинсоновским спектром модели является множество:

 – робинсоновская теория в языке сигнатуры и .

*Определение 3.4.4* (T.G. Mustafin) [21, c. 160]. Будем говорить, что йонсоновская теория косемантична йонсоновской теории (), если , где – семантическая модель теории , .

Легко увидеть, что косемантичное отношение на множестве йонсоновских теорий является отношением эквивалентности. Поскольку робинсоновская теория является частным случаем йонсоновской теории, то мы можем рассмотреть фактормножество робинсоновского спектра модели относительно .

И робинсоновский спектр структур класса для произвольной сигнатуры можно определить аналогично робинсоновскому спектру :

Заметим, что если , то .

Пусть , тогда – класс всех экзистенциально замкнутых моделей класса .

Будем называть класс совершенным, если каждая теория является совершенной.

Будем называть класс наследственным, если каждая теория является наследственной.

Далее будем работать со специальным классом структур, называемым многообразием.

Напомним, что под тождествами понимаются формулы вида , где – атомная формула сигнатуры .

*Определение 3.4.5* [28, с. 269]. Класс систем сигнатуры называется многообразием, если существует такая совокупность тождеств сигнатуры , что состоит из тех и только тех систем сигнатуры , в которых истинны все формулы из . При этом совокупность называется определяющей совокупностью многообразия.

Заметим, что каждое многообразие является аксиоматизируемым классом алгебр. Примерами многообразий являются классы всех полугрупп, всех групп, абелевых групп, булевых колец, нильпотентных групп шагов .

Сформулируем следующий известный классический результат:

*Теорема 3.4.1* (Birkhoff) [28, с. 337]. Для того чтобы непустой класс алгебраических систем был многообразием, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1. декартово произведение произвольной последовательности -систем является -системой;
2. любая подсистема произвольной -системы является -системой;
3. любой гомоморфный образ произвольной -системы является -системой, т.е. необходимо и достаточно, чтобы класс был наследственным, мультипликативно и гомоморфно замкнутым.

*Определение 3.4.6* [12, c. 158]. Класс структур сигнатуры будем называть робинсоновским классом, если – робинсоновская теория.

*Определение 3.4.7* [12, c. 158]. Будем называть многообразие робинсоновски наследственным, если всякий робинсоновский класс является подмногообразием класса .

В работе [30] был сформулирован вопрос о совпадении понятий алгебраической замкнутости и экзистенциальной замкнутости в классах моделей фиксированного многообразия. Этот вопрос в таком контексте имеет отношение к универсальной алгебре. Понятия алгебраической замкнутости и экзистенциальной замкнутости в теории моделей имеет самостоятельное значение, так как теория, вообще говоря, может быть не связана с понятием многообразия. В данной работе следующий результат даёт положительный ответ на вышеуказанный вопрос Форреста в рамках изучения классов косемантичности фиксированного робинсоновского спектра робинсоновски наследственного многообразия.

*Теорема 3.4.2* [12, c. 159]. Пусть – робинсоновски наследственное многообразие, , тогда для всякой алгебраически замкнутой модели следует, что .

*Доказательство.* Предположим обратное. Пусть существует модель такая, что алгебраически замкнута, но . Тогда существует предложение такое что из любой модели такой, что и , следует . Тогда , то есть . Поскольку любая теория , является робинсоновской теорией, то согласно предложению 1.1.1 существует такая, что , , где – семантическая модель класса . Так как класс совершенен, то . С другой стороны, если , то и предложение в частном случае является -предложением. Если , то существует такой, что и . Мы получили противоречие с истинностью предложения в модели и ложностью в модели . Значит, наше предположение было неверным, следовательно, .

Идея центрального типа позволяет изучать классы моделей центра наследственной йонсоновской теории в обогащённом языке. В данном контексте в рассмотренном обогащении мы используем одноместный предикатный и некоторые константные символы, причём один константный символ является фиксированным с позиции расположения интерпретации этой константы относительно экзистенциально замкнутой подмодели фиксированной семантической модели, которая является интерпретацией одноместного предикатного символа. Учитывая тот факт, что в той предгеометрии, которая задаёт замкнутость рассматриваемого множества типов, определимое замыкание и алгебраическое замыкание которых равны между собой, позволяет избежать коллизий несохранения понятия йонсоновости в этом обогащении.

Рассмотрим общую схему получения центрального типа для наследственного класса косемантичности робинсоновских теорий [65].

Пусть – произвольная модель сигнатуры , – наследственный класс, – семантическая модель класса . Для каждой теории рассмотрим ее обогащение на языке сигнатуры , где , полученный следующим образом:

где ”” – бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа является экзистенциально замкнутой подмоделью на языке сигнатуры . То есть интерпретация символа является решением уравнения в языке . В силу наследственности теории теория является робинсоновской теорией [46, c. 94]. Собрав все такие теории , мы получаем класс робинсоновской теорий. Центр класса является одним из пополнений для каждой теории *.* Ограничив сигнатуру до , в силу законов логики первого порядка, поскольку константа уже не принадлежит этой сигнатуре, мы можем заменить это константу переменной . Тогда теория будет полным 1-типом для переменной . Мы будем называть этот тип центральным типом класса в приведенном выше обогащении и обозначать его [46, c. 94].

В работе [67] получен критерий несчетной категоричности наследственной йонсоновской теории на языке центральных типов.

*Теорема 3.4.3* [67, c. 453]. Пусть – наследственный класс из , тогда следующие условия эквивалентны:

1. любая счетная модель из имеет алгебраически простое модельное расширение в ;
2. – сильно минимальный тип, где – центральный тип .

Для доказательства основного результата нам понадобится хорошо известный факт:

*Теорема 3.4.4* (Morley) [40, c. 152]. Теория тогда и только тогда -категорична, когда любая ее счетная модель имеет простое собственное элементарное расширение.

Очевидно, что мы можем использовать теорему Морли о несчётной категоричности в связи с существованием алгебраически простого модельного расширения для центрального типа в рамках следующей теоремы. Имеется в виду следующее: центральный тип, полученный при обогащении соответственной наследственной робинсоновской теории, в точности является центром обогащенной йонсоновской теории. Если заменить переменную константой, которая задаёт центральный тип, то мы получим полную теорию, которая модельно полна в силу совершенности обогащённой йонсоновской теории этого центра. Тем самым, в силу модельной полноты алгебраически простое модельное расширение будет так же и простым модельным расширением, что позволяет в силу вышеуказанной теоремы Морли считать этот центр -категоричной теорией [63, c. 55], в которой есть сильно минимальная формула.

*Теорема 3.4.5* [12, с. 160]. Пусть – робинсоновски наследственное многообразие, есть наследственный класс, – теоретическое множество, определяемое некоторой сильно минимальной -формулой , – некоторая -полная конечно аксиоматизируемая йонсоновская теория, определённая предложением , тогда следующие условия эквивалентны:

1. ;
2. центральный тип класса сильно минимален.

*Доказательство.* Если , тогда в силу теоремы 1.2.6 . Но тогда, согласно предложения 1.2.30, эти теории сохраняют ранг Морли, а соответственно и -категоричность, которая выражается через ранг Морли. Таким образом получили, что теории , и являются -категоричными, т.е. все семантические модели этих теорий являются насыщенными, следовательно, теории *,*  и являются совершенными. А значит и класс также является совершенным.

Заметим, что в теореме 3.4.3 (пункт a) эквивалентен тому, что класс является -категоричным (это следует из теоремы Морли), а значит и совершенным. Тогда, из теоремы 3.4.3 следует, что центральный тип класса является сильно минимальным.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Заметим, что в процессе диссертационного исследования мы работали в счетном языке первого порядка. Одним из важнейших классов теорий изучаемых в «восточной» теории моделей является класс индуктивных теорий. Этот класс определяется двумя характерными теоретико-модельными свойствами. Первое свойство – это аксиоматизируемость предложениями с длиной префикса не больше двух. Второе свойство – это замкнутость класса моделей данной теории относительно цепей. Причем первое свойство является синтаксическим, а второе – семантическим свойством. Воедино их связывает характеризация индуктивных теорий. Естественным и достаточно широким подклассом класса индуктивных теорий фиксированного языка является класс йонсоновских теорий, то есть такой класс индуктивных теорий, который удовлетворяет свойствам совместного вложения и свойству амальгамы при наличии хотя бы одной бесконечной модели.

В данной диссертации изучаются теоретико-модельные аспекты йонсоновских теорий, которые, вообще говоря, не являются полными. Основное внимание в диссертации уделялось изучению совершенных фрагментов с условием выпуклости и их классов моделей.

Совершенные фрагменты с условием выпуклости – это подмножества выпуклых теорий, которые также обладают свойством совершенности в йонсоновском смысле [5]. Совершенной йонсоновской теорией называется йонсоновская теория, имеющая модельный компаньон, который является центром данной теории. Центр произвольной йонсоновской теории, один из синтаксических инвариантов данной теории – это элементарная теория особой модели данной йонсоновской теории и такая модель носит название семантической. Эта модель является универсально-однородной в смысле «восточной» теории моделей, при этом хорошо известно, что «западный» аналог универсально-однородной модели является насыщенной моделью. В случае йонсоновской теории это не так. Если йонсоновская теория является универсально-однородной, то ее семантическая модель является насыщенной, что позволило назвать такие йонсоновские теории совершенными.

Легко заметить, что наиболее успешное описание йонсоновских теорий, было получено в случае существования у таких теорий модельного компаньона.

Выпуклые теории были определены А. Робинсоном, это подкласс индуктивных теорий, удовлетворяющих условию, что пересечение любых двух ее моделей является снова моделью этой теории, при условии, что это пересечение не пусто. В том случае, когда это пересечение никогда не пусто, такая теория называется сильно выпуклой [3].

Сочетание условий йонсоновости и выпуклости теорий продолжает выделять достаточно широкий подкласс класса йонсоновских теорий, и при этом существует достаточное количество алгебраических примеров таких теорий. В первую очередь к ним относятся различные виды групп, колец, решетки, а так же порядки и полигоны.

Рассмотрение теоретико-модельных понятий выпуклых и в то же время экзистенциальных простых теорий позволяет сузить рамки изучения более широких классов индуктивных теорий, и в частности йонсоновских теории. Сам по себе вопрос описания различных соотношений выпуклости и экзистенциальной полноты в рамках изучения йонсоновских теорий является еще не исследованным вопросом и в данной диссертации рассмотрены его частные случаи при фиксированных условиях.

Изучение совершенных йонсоновских теорий повлекло за собой создание нового технического аппарата для получения соответствующих результатов, вообще говоря, неполных теорий, что связано с теми трудностями, которые появляются при «бедности» таких теорий и отсутствия аналогов известных понятий и связанных с ними результатов из арсенала полных теорий, то есть «западной» теории моделей.

Совмещение требований совершенности, выпуклости для фиксированных фрагментов заданной йонсоновской теории создает новые возможности для изучения, как «восточной», так даже и «западной» теории моделей. В связи с тем фактом, что любую полную не йонсоновскую теорию можно преобразовать в некотором обогащении языка в йонсоновскую теорию с помощью процесса преобразования, который носит название морлезации.

В рамках изучения фрагментов фиксированных подмножеств семантической модели заданной йонсоновской теории получены описания новых теоретико-модельных понятий, кроме того, получены утверждения связанные с этими описаниями и их доказательства методом переноса свойств центра теории на саму теорию.

Во втором разделе получено описание критерия существования голографичной модели для совершенной йонсоновской теории с фиксированным центром. В частности в качестве основного результата второго раздела доказана теорема 2.2.3.

В третьем разделе получены результаты связанные с описанием теоретико-модельных понятий малых моделей. В первом параграфе получено описание ядерной модели совершенной ядерной теории и связь этой модели с оболочкой Кайзера такой теории, описание алгебраически простых моделей экзистенциально алгебраически простой теории относительно ядерности модели, при условии существования такой модели и в частности доказаны следствие 3.1.1 и теорема 3.1.2 соответственно. Во втором параграфе приведено описание ядерных моделей центра совершенной, выпуклой, экзистенциально полной и экзистенциально простой йонсоновской теории, и в частности доказана теорема 3.2.1 в качестве основного результата данного параграфа.

В третьем параграфе изучены теоретико-модельные свойства фрагмента алгебраически простого множества, при условии совершенности и экзистенциальной простоты с ограниченной полнотой, получено описание критерия существования ядерной модели центра выпуклых, совершенных, экзистенциально простых фрагментов с ограниченной полнотой. В частности доказаны следующие результаты: теорема 3.3.1 и теорема 3.3.2

Описание сильно минимальных центральных типов из класса косемантичности из фиксированного робинсоновски наследственного спектра многообразия получено в четвертом параграфе, и доказана теорема 3.4.5. как основной результат данного параграфа, связанный с вышеуказанным описанием.

Таким образом, подытоживая содержание полученных результатов данной диссертации, мы можем сделать вывод, что эти результаты математически подтверждают наши гипотезы относительно теоретико-модельных свойств вышеуказанных фрагментов, актуальности и научной сложности поставленных вопросов, а также возможности адаптирования постановок задач связанных с соответсвующими понятиями «западной» теории моделей в рамках изучения йонсоновских теорий. При этом следует заметить на основе полученных результатов о фиксированных фрагментах и их центров нетривиальную взаимосвязь и взаимное влияние. А так же, в силу того факта связанного с полнотой центра рассматриваемой йонсоновской теории, мы можем отметить вклад изучения йонсоновской теории и её центра в том смысле, что такие исследования важны и полезны и в обратную сторону, то есть для «западной» теории моделей. И тем самым проявляется двойственность и единность основных двух направлений теории моделей.

**Список использованных источников**

1. Robinson A. Introduction to Model Theory and Metamathematics of Algebra. – Amsterdam. – 1963. – 126 с.

2. Справочная книга по математической логике:Теория моделей: в 4 ч./ пер. с англ.; под ред. Дж. Барвайса. – М.: Наука, 1982. —Ч. I – 392 с.

3. Ешкеев А.Р., Шаматаева Н.К., Жумакаева К.Н. Классификация относительно косемантичности фрагментов йонсоновских множеств в экзистенциально простых выпуклых йонсоновских теориях.- Естественные и математические науки в современном мире: Материалы XXVII международной научно-практической конференции (3 февраля 2016). – №2 (37). – Новосибирск: Изд-во «СибАК», 2016. – С.100-108.

4. Ешкеев А.Р., Шаматаева Н.К., Рысбек Б.Е. Компаньоны фрагментов экзистенциально простой выпуклой йонсоновской теории.- «Наука 2015: итоги, перспективы» Материалы международной научно-практической конференции (25 января 2016). – М.: Грифон, 2016. – С.130-140.

5. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Small models of hybrids for special subclasses of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – No.95(3). – P. 68-73. <https://doi.org/10.31489/2019M2/68-73>

6. Ешкеев А.Р., Попова Н.В., Исаева А.К. О счетных моделях экзистенциально алгебраически простой йонсоновской теории// «Мальцевские чтения – 2020»: Тезисы докладов международной конференции. Новосибирск, 16-20 ноября 2020. – С. 227. [maltsev20.pdf (nsc.ru)](http://old.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf)

7. Yeshkeyev A.R., Popova N.V. On holographicness in the frames of Jonsson theories// “VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023)”. Тезисы докладов. Туркестан, 20–23 сентября 2023. – С. 216.

8. Yeshkeyev A.R., Issayeva A.K., Popova N.V. Core Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – No.97(1). – P. 104-110. <https://doi.org/10.31489/2020M1/104-110>

9. Yeshkeyev A.R., Popova N.V. Small models of convex fragments of definable subsets. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – No.100(4). – P. 160-167. <https://doi.org/10.31489/2020M4/160-167>

10. Ешкеев А.Р., Попова Н.В., Исаева А.К. Свойства определимых замыканий на подмножествах малых моделей.// «Мальцевские чтения – 2020»: Тезисы докладов международной конференции. Новосибирск, 16–20 ноября 2020. – С. 224. [maltsev20.pdf (nsc.ru)](http://old.math.nsc.ru/conference/malmeet/20/maltsev20.pdf)

11. Yeshkeyev A.R., Issayeva A.K., Popova N.V. Closure of special atomic subsets of semantic mode// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – No.97(1). – P. 97-103. <https://doi.org/10.31489/2020M1/97-103>

12. Ulbrikht O.I., Popova N.V. A fragment of a theoretical set and its strongly minimal central type. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. – No.111(3). – P. 152-164. <https://doi.org/10.31489/2023M3/152-164>

13. Попова Н.В., Мусатаева В. Стабильность свойства центральных типов выпуклых фрагментов // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. Тезисы докладов. Алматы, 2020. – С.31.

14. Попова Н.В., Тилеубек А. Не конечно-аксиоматизируемый центр универсального фрагмента // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. Тезисы докладов. Алматы, 2020. – С.32.

15. Попова Н.В., Исаева А.К., Жумагул Д., Нурмакова А. Ядерная модель выпуклого йонсоновского спектра // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова. Тезисы докладов. Алматы , 2021. – С.117.

16. Yeshkeyev, A.R., Popova N.V. Holographicness in perfect Jonsson theories // «Актуальные задачи математики, механики и информатики» материалы Международной научной конференции посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. Караганда, 8-9 сентября 2022. – С. 46.

17. Ешкеев А.Р.. Попова Н.В. Голографичность совершенного класса коссемантичности // «Таймановские чтения-2022»: материалы международной научно-практической конференции, посвященной 105-летию доктора физико-математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова. Уральск , 30 ноября 2022г. – С.21-24.

18. Tent K., Ziegler M. A course in model theory, volume 40 of Lecture Notes in Logic. Association for Symbolic Logic, La Jolla, CA; Cambridge University Press, Cambridge, 2012. – 248 с. https://doi.org/10.1017/bsl.2015.26

19. Ешкеев А.Р. Введение в теорию моделей. Учебное пособие, Караганда, 2008. – 240 с.

20. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории: Учебное пособие. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 249 с.

21. Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т. Йонсоновские теории и их классы моделей: монография. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. – 370 с.

22. Лавров, И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов: учебник. – 5-е изд., испр. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

23. Hodges W. Model theory. – Cambridge University Press, Cambridge, 1993. – 772 р. https://doi.org/10.1017/S0269888900007384

24. Шенфилд Дж. Математическая логика / пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – 528 с.

25. Marker D. Model theory: An Introduction. – New York: Springer-Verlag, Inc., 2002. – 342 р. https://doi.org/10.1007/b98860

26. Kueker D.W. Core structures for theories // Fundamenta Mathematicae LXXXIX. – 1973. – P. 154-171. DOI: 10.4064/fm-89-2-155-171

27. Simmons H. Existentially Closed Structures // The Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol. 37, No.2. – P. 293-310. https://doi.org/10.2307/2272974

28. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

29. Vaught, R. Denumerable models of complete theories. Infinitistic Methode, Oxford: Pergamon Press. – 1961 – P.303-321. https://doi.org/10.2307/2270563

30. Forrest W. Model theory for universal classes with the amalgamation property: a study in the foundations of model theory and algebra // Annals of Mathematical Logic. – 1977. – 11. – P. 263-366. https://doi.org/10.1016/0003-4843(77)90001-8

31. Бускаран Э. Теория моделей и алгебраическая геометрия. – M.: МЦНМО. – 2008. —280 с.

32. Eklof, P., Sabbagh, G.: Model completion and modules. Ann. Math.Logic. – 1971. – No.2(3). P. 251-295. DOI:[10.1016/0003-4843(71)90016-7](https://doi.org/10.1016/0003-4843%2871%2990016-7)

33. Macintyre A., On algebraically closed groups // Algebra and Logica. – 1974. – No 13. – P. 135-143.

34. Neumann B. H. A note on algebraically closed groups // Journal of the London Mathematical Society. – 1952. – No 27. – P. 247-249.

35. Lindstrom P. On model completeness // Theoria. – 1964. – No.30. – P. 183-196.

36. Chang C. C., Omitting types of prenex formulas // Journal. – 1967. – No.32. – P. 61-74.

37. Scorr W. R. Algebraically closed groups // Proceedings of the American Mathematical Society. – 1951. – No.2. P. 118-121.

38. Saracino, D. Model companion for ω-categorical theories // Proc. Amer.Math. Soc. – 1973. – No.39(3). – P. 591-598.

39. Кейслер Х.Дж., Чэн.Ч.Ч. Теория моделей. – М.: Мир – 1977. – с. 667.

40. Сакс Дж.Е. Теория насыщенных моделей. – М: Мир. – 1976. – 191 с.

41. Yeshkeyev A.R., Omarova M.T. Central types of convex fragments of the perfect Jonsson theory // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – No.1(93). – P. 95-101. DOI 10.31489/2019M1/95-101

42. Yeshkeyev, A.R., Ulbrikht, O.I.: JSp-cosemanticness of R-modules // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2019. – No.16. – P. 1233-1244. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.084

43. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. An algebra of the central types of the mutually model-consistent fragments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2021. – No.1(101). – P. 111-118. DOI 10.31489/2021M1/111-118

44. Yeshkeyev, A.R. Strongly minimal Jonsson sets and their properties // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2015. – No.4(80). – P. 47-51.

45. Yeshkeyev A.R., Issaeva A.K., Mussina N.M. The atomic definable subsets of semantic model. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2019. – No.94(2). – P. 84-91. DOI 10.31489/2019M2/84-91

46. Yeshkeyev A.R., Omarova M.T., Zhumabekova G.E. The J-minimal sets in the hereditary theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – No.94(2). – P. 92-98. DOI 10.31489/2019M2/92-98

47. Yeshkeyev A.R. The structure of lattices of positive existential formulae of (∆-*PJ*)-theories // ScienceAsia. Journal oh the Science Society of Thailand. – 2013. – Vol. 39. – Sup.1. – P. 19-24. doi: 10.2306/ScienceAsia1513-1874.2013.39S.019

48. Yeshkeyev A.R. The properties of central types with respect to enrichment by Jonsson set // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2017. – No.1(85). – P. 36-40.

49. Yeshkeyev A.R. Model-theoretical questions of the Jonsson spectrum // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – No.2 (98). – P. 165-173. DOI 10.31489/2020M2/165-173

50. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups. // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. —No.13. – P. 861-874. DOI 10.17377/semi.2016.13.068

51. Ешкеев А.Р. О форкинге для --теории и стабильность центральных типов --теорий в обогащённой сигнатуре // Вестн. Казах. нац. ун-та. Серия математика, механика, информатика. – 2009. – №3 (62). – С. 8-15.

52. Ешкеев А.Р., Ульбрихт О.И., Оспанов Р.М. Свойства моделей центра и центрального типа некоторых позитивных йонсоновских теорий в допустимых обогащениях сигнатуры // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – 2013. – № 4(72). – C. 40-48.

53. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Omarova M.T. The Number of Fragments of the Perfect Class of the Jonsson Spectrum // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – 43. – P. 3658-3673

54. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. Similarity of classes from Jonsson spectrum // The 16th Asian logic conference, 14th International Conference on Computability and Randomness (CCR 2019). Program and Abstracts. – Nur-Sultan, Kazakhstan. – 2019. – P. 44-45.

55. Urken G.A. Syntactic similarity of definable closures of Jonsson sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2018. – No.2(90). – P. 119-123.

56. Ешкеев А.Р. Уркен Г.А. Синтаксическое подобие некоторых йонсоновских теорий и их связь с допустимостью // Современная математика: проблемы и приложения: Сб. тр. Вторых Международных научных Таймановских чтений, посвященных 100-летию академика А.Д. Тайманова. – Кызылорда. – 2017. – С. 125-130.

57. Mustafin, Y.T. Quelques proprietes des theories de Jonsson // The Journal of Symbolic Logic. – 2002. —No.67(2). – P. 528-536. https://doi.org/10.2178/jsl/1190150095

58. Yeshkeyev A.R. Companions of the fragments in the Jonsson enrichment // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2017. – No.85 (1). – P. 41-45.

59. Baldwin J.T. Kueker D.W. Algebraically prime models. Ann. Math. Logic. – 1981. – No.20. – P. 289-330. [https://doi.org/10.1016/0003-4843(81)90007-3](https://doi.org/10.1016/0003-4843%2881%2990007-3)

60. Ешкеев А.Р. Теоретико-модельные свойства йонсоновских фрагментов // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». – 2014. – No 4(76). – С. 37-41.

61. Mustafin T.G. On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90, Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. – Helsinki. – 1990. – P. 259-265. https://doi.org/10.1017/9781316718254.017

62. Касымханулы Б., Морозов А.С. О голографичных структурах. // Сибирский математический журнал. – 2019. – No.60(2). – P. 401-410. https://doi.org/10.33048/smzh.2019.60.211

63. Ешкеев A.Р., Мукaнов A.А., Медеубaев Н.К. Кaтегоричные фрaгменты йонсоновских множеств // Естественные и математические науки в современном мире: сб. ст. по матер. XXVII междунар. науч.-практ. конф. – Новосибирск: СибАК. – 2015. – No 2(26). – С. 48-56.

64. Yeshkeyev A.R., Issayeva A.K. -cl-atomic and prime sets // Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. – 2019. – No.1(93). – P. 88-94. https://doi.org/10.31489/2019M1/88-94

65. Ешкеев А.Р. О йонсоновской стабильности и некоторых ее обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. – 2008. – 14. – No.8. – P. 117-128. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9879-z

66. Yeshkeyev A.R. The properties of similarity for Jonsson’s theories and their models // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. —2015 – No.4(80). – P. 52-59.

67. Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I. Independence and simplicity in Jonsson theories with abstract geometry // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – No.18(1). – P. 433-455. <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.030>

68. Yeshkeyev A.R., Omarova M.T. Chains of existentially closed models of positive (n1, n2)-Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – No.4(96). – P. 69-74. https://doi.org/10.31489/2019M4/69-74

69. Yeshkeyev A.R., Urken G.A. Connection of Jonsson theory with some Jonsson polygons theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – No.3(95). – P. 74-78. https://doi.org/10.31489/2019M2/74-78

70. Yeshkeyev A.R. Method of the rheostat for studying properties of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. – No.4(100). – P. 152-159. https://doi.org/10.31489/2020M4/152-159