Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.51 қолжазба құқығында

**ӨНЕРБЕК ЖОМАРТ МҰРАТҰЛЫ**

**Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктеріндегі кейбір операторлардың шенелімділігі және компактілігі**

6D060100 – «Математика» мамандығы бойынша философия докторы (PhD) ғылым дәрежесін алу үшін ұсынылған диссертация

Ғылыми жетекші

ф.-м,ғ.д., профессор Н.Ә.Бокаев

Шетелдік ғылыми кеңесші PhD,

профессор Массимо Ланза Де Кристофорис (Италия)

Қазақстан Республикасы

Астана қ, 2022 ж.

**МАЗМҰНЫ**

Кіріспе 4

1. **Классикалық интегралдық операторлардың айнымалы көрсеткішті локальді жане глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігі**. 15

1.1. Морри типтес локальді және глобальды кеңістіктер және олардың қасиеттері. ...................................................15

1.2. Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі Харди-Литтлвуд максималды функциясының шенелгендігі……………………………………......25

1.3. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының шенелгендігі (Спейн типтес нәтижелер)...33

1.4. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының шенелгендігі (Адамс типтес нәтижелер)...41

1.5. Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі бөлшек-максималды функциясының шенелгендігі………………………………………………………44

1.6. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралының шенелгендігі...............................................................................................................46

2. **Классикалық интегралдық операторлардың коммутаторларының айнымалы көрсеткишті локальді жане глобальди Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігі мен компактілігі**

2.1. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының коммутаторларының шенелгендігі………49

2.2. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторларының шенелгендігі………………………………………………………………………..52

2.3. Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі жиындардың компактілігі………………………………………………………………….……..55

2.4. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының коммутаторының компактілігі…………61

Қорытынды ............................................................................................................67

Пайданылған әдебиеттер тізімі.............................................................................68

**Кіріспе**

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Функционалдық кеңістіктер математиканың әртүрлі теориялық және қолданбалы есептерін шешуде маңызды рөл атқарады. Белгілі Никольский [1], Бесов [2], Трибель [3], Буренков [4] монографиялары әртүрлі функционалдық кеңістіктердің қасиеттерін зерттеуге арналған. Буренков [5] және басқалардың шолу мақалалары функционалдық кеңістіктер теориясына арналған.

Соңғы онжылдықтарда Морри типтес кеңістіктер белсенді түрде зерттелуде. Функционалдық талдау теориясында Морри типті кеңістіктер және олардың жалпылаулары (Морри типті кеңістіктер деп аталатын) маңызды рөл атқаратыны белгілі. Классикалық Морри кеңістіктері және олардың жалпылаулары дифференциалдық теңдеулер теориясындағы белгілі бір сұрақтарға байланысты пайда болды. Кейіннен Морри кеңістігі операторлар теориясында кең қолданыс тапты. Морри кеңістігіне және олардың қолданбаларына арналған көптеген кітаптар мен шолу мақалалары бар, мысалы [1-10].

Лебег кеңістігіндегі және Морри типті кеңістіктердегі Харди-Литлвуд максимум операторы, бөлшектік Харди-Литлвуд максимум операторы, Рис потенциалы, сингулярлық интегралдық операторлар және т.б. сияқты нақты талдаудың классикалық операторларының шектелу теориясы болып табылады. жақсы зерттелген. Сандық параметрлер мәндерінің басым көпшілігі үшін Моррей типті кеңістіктердегі классикалық операторлардың шектелгендігін қамтамасыз ететін салмақтық функциялар үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылды. Бұл нәтижелер нақты талдауда және жеке дифференциалдық теңдеулер теориясында жақсы қолданбаларға ие. Бұл домендерде салмақты Лебег кеңістіктерімен қатар жалпы Морри типті кеңістіктер де маңызды рөл атқарады.

Классикалық Морри кеңістігі Чарльз Морри [6] еңбектерінде 1938 жылы квазисызықты эллиптикалық дифференциалдық теңдеулерді шешуді зерттеуге байланысты енгізілді. Соңғы жылдары Морри типті кеңістіктердегі әртүрлі операторлардың шектелгендігі мен компактілігі сұрақтары белсенді түрде зерттелуде ([10], [11] ) қараңыз.

Көрсеткіштері тұрақты глобальді Морри типтес кеңістіктер мен ондағы классикалық операторлардың шенелгендігі Буренковтың, Гулиевтің, Мустафаевтың, Гоготашвиллидің жұмыстарында жақсы зерттелген.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістігі Дейнингтің, Саваноның жұмыстарында зерттелген.

Көрсеткіштері айнымалы Морри кеңістігі Алмейда, Хасанов, Самконың жұмыстарында енгізіліп, осы кеңістіктерде классикалық интегралдық операторлардың шенелгендік мәселелері қарастырылған.

Айнымалы көрсеткішті жалпыланған Морри кеңістіктері Гулиевтің, Хасановтың, Самконың жұмыстарында енгізіліп, осы кеңістіктердегі классикалық интегралдық операторлардың шенелгендік шарттары алынған ([40], [41] ).

Бұл диссертациялық жұмыста көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер енгізіліп, осы кеңістіктердегі классикалық интегралдық операторлардың шенелгендігінің шарттары зерттеледі.

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты.**

-Харди-Литллвуд максимальді операторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктердегі шенелгендік шарттарын алу.

- Рисс потенциалы және оның коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктердегі шенелгендік шарттарын алу.

-Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторы және оның

коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктердегі шенелгендік шарттарын алу.

-Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі компактілік шарттарын алу.

-Рисс потенциалының коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктердегі компактілік шартын алу.

**Зерттеудің ғылыми жаңалығы.**

Жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

-Көрсеткіштері айнымалы глобальді және локальді Морри типтес кеңістіктер енгізілді, олардың бос емес болуының шарттары алынды.

-Харди-Литллвуд максимальді операторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

- Рисс потенциалы және оның коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

-Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторы және оның

коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

-Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктерде Рисс потенциалы коммутаторының компактілік шарттары алынды.

**Зерттеу әдістері.**

Метрикалық функциялар теориясының, функционалдық анализ әдістері қолданылады.

**Зерттеудің тәжірибиелік және теориялық маңыздылығы.**

Алынған нәтижелер функционалдық анализдің әртүрлі зерттеулеріне және математикалық физика теңдеулерін шешуде қолданады.

**Зерттеу нәтижелерінің талқылануы.**

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері төмендегі конференцияларда және ғылыми семинарларда талқыланды:

- академик В.А.Садовничидің 80 жылдығына арналған «Современные проблемы математики и механики» халықаралық ғылыми конференция (Москва,МГУ, 13-15 мамыр, 2019 ж.);

-«Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла басталғанына 10 жыл толуына арналған « Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (ЕMJ-2019) атты халықаралық конференция;

- дәстүрлі сәуірлік математикалық конференция (Алматы, 3-5 сәуір, 2019ж.);

-«математика, механика және информатиканың теориялық және қолданбалы проблемалары» атты халықаралық ғылыми конференция (13 маусым Қарағанды, 2019ж).

**Жарияланымдар.**

Барлық ғылыми нәтижелер ашық баспада 9 ғылыми жариялымда бастырылған (4 мақалалар, 5 тезистер ). Жарияланған жұмыстарда ғылыми жетекшімен авторлық бірлестікте есептің қойылымы ғылыми жетекшінікі, ал мақалалардың негізгі нәтижелерін ізденуші толығымен өздігінен алды.

1. Bokayev N. A. Onerbek Zh. M. On the Boundedness of Integral Operators in Morrey-Type Spaces with Variable Exponents // Siberian Advances in Mathematics, 2022, Vol. 32, No. 2, 79-86, Q3, DOI: 10.1134/S1055134422020018 (Scopus, процентиль 38)

2. Adilkhanov A.N., Bokayev N. A. Onerbek Zh. M. On the boundedness of the maximal and the Riesz-type potential operators in the global Morrey-type spaces with variable exponent on bounded sets// Kazakh Mathematical Journal. - Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, 2020. - Vol. 20 no. 3. - P.69-78.

3. Onerbek Zh. M. Оn the boundedness of the Riesz potential and its commutator’s in the global Morrey-type spaces with variable exponents// Vestnik KazNU, -2022. - №2(114), P.54-60

4. Bokayev N.A., Onerbek Zh. M. Calderon-Zigmund integral in the Morrey-type spaces with variable exponents. Vestnik KazNPU. -2022, -No 2(78). -P. 7-13.

Тезистер:

1.Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем// Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В.А.Садовничего. Москва,МГУ, 13-15 мая 2019г.28-30.

2.Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем// Международная научная конференция «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». Караганды, КарГУ им. Е.А.Букетова, 13 июня 2019г. С.15.

3. Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри с переменным показателем // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Республики Казахстан . Алматы 3-5 апреля 2019 года, стр.54-55 .

4. А.Н. Адилханов, Ж.М. Онербек. О достаточных условиях ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем//«Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла басталғанына 10 жыл толуына арналған « Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (Еmj-2109) атты халықаралық конференция, ЕНУ, 2019ст. 14.

5. Bokayev N., Onerbek Zh., Adilkhanov A. Potential type operator in global Morrey-type spaces with variable exponents on unbounded sets // Традиционная международная апрельская математическая конференция посвященная 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова, Институт математики и математического моделирования, Алматы 2021 pp 82.

**Диссертацияның құрылымы:** Жұмыс кіріспе, екі бөлім, қорытынды және әдебиеттер тізімінен тұрады. Тұжырымдар мен формулалар нөмірлері үш көрсеткіштен құралған. Бірінші көрсеткіш-бөлімнің нөмерін, екінші көрсеткіш-бөлімнің ішкі бөлімдерінің нөмерін, үшінші көрсеткіш -сол ішкі бөлімдегі тұжырымдар мен фомулалардың меншікті нөмерін көрсетеді. Жұмыстың көлемі 72 бет. Әдебиеттер саны -50.

**Жұмыстың негізгі мазмұны.**

1938 жылы C. Морри енгізген [6], Морри кеңістіктері , келесі квазинорма ақырлы болатын , , , , барлық функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

Басқаша айтқанда , егер  және  табылып (тек -ке тәуелді), келесі теңсіздік орындалса



Бұл теңсіздіктегі ең кіші оң константа .

**Анықтама 1.** Айталық ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын. Жалпыланған Морри кеңістігі  келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

**Анықтама 2.** Айталық,  ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын.  локальді Морри типтес кеңістігі келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады :



**Анықтама 3.** Айталық,  ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын. глобальді Морри типтес кеңістігі келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

Біз бұл жұмыста көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын:

.

Жұмыс 2 бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде көрсеткіштері глобальді Морри типтес кеңістіктер енгізіліп, олардың қасиеттері қарастырылады, Харди-Литллвуд максимальді функциясының, Рисс потенциалының, Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторының шенелгендігінің шарттары алынған. Алынған нәтижелердің кейбіреулерін келтірейік.

1.2 пункте максимальді оператордың шенелгендігінің қажетті шарттары алынған.

**Теорема 1.2. 3.** Айталық,және жиынында өлшемді функциялар болсын*.* оң саны табылып*,* барлықүшін келесі теңдіктер орындалсын *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*.* Егер жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

Онда Харди Литллвуд максимальді операторы - кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

1.3 пункте Рисс потенциалының шенелгендігінің Спейн типтес теоремалар алынған.

**Теорема 1.3.4.** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып, барлықүшін *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*,* және функциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

Онда операторы кеңістігінен

кеңістігіне шенелген болады.

1.4 пункте Рисс потенциалының шенелгендігінің Адамс типтес теоремалар алынған.

**Теорема 1.4.1.** Айталық*,* шенелген облыс*,* жәнеөлшемді функциясы(1.8) және (1.9) шарттарды қанағаттандырсын *,,* оң өлшемдіжәнефункциялары*,* мұндағы *,* келесі шарттарды қанағаттандырсын

Онда операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

1.5 пункте бөлшек максимальді оператордың шенелгендігінің шарттары алынған.

1.6 пункте бөлшек сингулярлық интегралдық оператордың шенелгендігінің шарттары алынған.

**Теорема 1.6.1.** Айталық және функциялары жиынында өлшемді функциялар болып, ,

теңсіздіктері орындалсын. Егер өлшемді және функциялары төмендегі шартты

.

қанағаттандырса, онда сингулярлық интегралдық оператор кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

2.1 пункте Рисс потенциалының коммутаторының шенелдендігі туралы теоремалар алынған.

**Теорема 2.1.1.** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып*,* барлық  *үшін ,* және барлық дерлік жерде орындалсын*,* жәнефункциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(2.1)

Онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

2.2 пункте сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторының шенелдендігі туралы теоремалар алынған.

**Теорема 2.4.** Айталық және функциялары жиынында өлшемді функциялар болып, ,

теңсіздіктері орындалсын. Егер өлшемді және функциялары төмендегі шартты

.

қанағаттандырса, онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Басқа авторлардың алған нәтижелеріне шолу жасайық.

**Теорема A** (Гулиев В. 2012г. ) Айталық , , ,  және  келесі шарттарды қанағаттандырсын



Айталық, ** операторы  кеңістігінде шенелген болсын. Сонымен қатар



Онда  операторы  кеңістігінен  кеңістігіне шенелген болады.

Біздің мақсатымыз  коммутаторының  кеңістігіндегі компактілік шартын алу.

**Теорема B.** *Айталық , , , , , * өлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын



Сонымен қатар ** операторы -де шенелген болсын. Төмендегі шарт орындалсын



*Онда  коммутаторы  кеңістігінен  кеңістігіне компактілі болады.*

2.4 бөлімде  коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі компактілігінің жеткілікті шарттары келтіріледі .

**Теорема С.** Айталық , , немесе ,  және , , , сонымен қатар



барлық  үшін, мұндағы  -ге тәуелсіз. Онда  операторы  кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

2.4 бөлімде біздің мақсатымыз Рисс потенциалының компактілігі туралы келесі теореманы дәлелдеу болып табылады.

**Теорема D.** Айталық , ,  немесе ,  және , , , сонымен қатар



барлық  үшін, мұндағы  -ге тәуелсіз. Айталық ограничен из  в . Онда коммутатор   кеңістігінен кеңістігіне компактілі болады.

2.4 бөлімде сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторы  жалпыланған Морри типтес  кеңістіктеріндегі компактілігінің жеткілікті шарты

Айталық  арқылы  кеңістігіндегі бірлік сфераны белгілейік.  функциясы келесі шарттарды қанағаттандырсын:

(i)   дегі нөлдік дәрежелі біртекті функция, яғни,  кез-келген  және  үшін.

(ii)  функциясы -де орта мәнді қабылдасын, яғни



(iii) , келесі теңсіздік



кез-келген  үшін орындалады. Сонымен қатар алдағы пунктерде  деп ұйғарамыз.

Сингулярлық интегральдық оператор  гармоникалық анализ және функциялар теориясында маңызды рөл атқарады.



Айталық  болсын,  арқылы мультипликациалық операторды белгілейік: , мұндағы -өлшемді функция. Онда Кальдерон Зигмунд сингулярлық интегралдық оператор  және  операторының коммутаторы келесі теңдікпен анықталады



Біздің жұмыстың мақсаттарының бірі-сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторы -нің жалпыланған Морри типтес  кеңістіктердегі компактілігінің жеткілікті шарттарын алу.

Морри кеңістігіндегі сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторы  компактілігі зерттелген.

Келесі теоремада сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторы -нің жалпыланған Морри типтес  кеңістіктердегі шенелгендігінің жеткілікті шарты беріледі.

**Теорема E (V. S. Guliyev 2012)** Айталық ,  және  өлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын



Айталық  операторы  кеңістігінде шенелген болсын. Сонымен қатар,



Онда  операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

**НЕГІЗГІ БӨЛІМ**

**1. Классикалық интегралдық операторлардың айнымалы көрсеткішті локальді жане глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігі**

* 1. **Жалпыланган Морри типтес кеңістіктер және оның қасиеттері**.

Көрсеткіштері тұрақты болғанда Морри типтес кеңістіктер туралы мәліметтер келтірейік.

1938 жылы C. Морри енгізген [1], Морри кеңістіктері , келесі квазинорма ақырлы болатын , , , , барлық функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

Басқаша айтқанда , егер  және  табылып (тек -ке тәуелді), келесі теңсіздік орындалса



Бұл теңсіздіктегі ең кіші оң константа .

**Анықтама 1.1.1.** Айталық ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын. Жалпыланған Морри кеңістігі  келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

**Анықтама 1.1.2.** Айталық,  ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын.  локальді Морри типтес кеңістігі келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады :



**Анықтама 1.1.3.** Айталық,  ,  - нөлге тең емес өлшенетін теріс емес функция болсын. глобальді Морри типтес кеңістігі келесі квазинорма ақырлы болатындай барлық  функциялар жиыны ретінде анықталады



мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар.

Біз бұл жұмыста көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын:

.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктері ең алғашқы рет 1931 жылғы жұмысында Орличтің жұмыстарында қарастырылған. Бұл жұмыста келесі сұрақ зерттелген: айталық, және сандық тізбектері беріліп, қатары жинақталсын. Онда қатарының жинақталуының қажетті және жеткілікті шарты қандай ?. Бұл сұраққа жауап Орличтің сол жұмысында берілген: λ саны табылып, қатарының жинақталуы қажетті және жеткілікті, мұндағы . Бұл шарт кеңістігіндегі Гельдер теңсіздігі болып табылады.

Сонымен қатар, Орлич өз жұмыстарында айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктерінде Гелдер теңсіздігін қарастырып, дәлелдеген.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістігін шетелдік ғалымдарға тәуелсіз кеңестік ғалым Шарафутдинов енгізді. Ол осы кеңістіктерде Люксембург нормасын енгізген.

Айталық мәндерінің жиыны 1,болатын -де өлшемді функция болсын. Сонымен қатар

, (1.1.1)

мұндағы

, .

арқылы Ω жиынында өлшемді, келесі шама ақырлы болатын барлық функциялардың жиынын белгілейміз

осы кеңістікте норманы келесі түрде анықтаймыз

Айталық, өлшемді функция беріліп, Ω-Лебег өлшемі оң жиын болсын. Онда кеңістігі Банах кеңістігі болады.

Енді осы тұжырымды дәлелдейік.

Айнымалы көрсеткішті кеңістігіндегі кез-келген Коши тізбегін алайық. Онда кез-келген үшін тізбекшесі табылып, келесі теңсіздік орындалады

Онда келесі теңсіздік те орындалады

.

Келесі белгілеулерді енгізейік

және

мұндағы .

Келесі теңсіздіктерді аламыз

,

ендеше теңсіздігі де орындалады.

Лебегтің монотондық жинақталу теоремасы бойынша

Осыдан екені шығады.

Енді

қатарының абсолютті жинақталатынын көрсетейік.

Ол үшін келесі функцияларды енгізейік

,

.

Онда екені түсінікті, себебі теңсіздіктері орындалады.

Кез-келген үшін

.

Осыдан келесі теңсіздік шығады

Фату леммасы бойынша

Нәтижесінде келесі теңсіздікті аламыз

Ал бұл теңсіздік Коши тізбегінің кеңістігінде функциясына жинақталатынын көрсетеді.

Түйіндес көрсеткіш келесі формуламен анықталады

, көрсеткіштері үшін Гельдер теңсіздігі орындалады [diening]:

.

Айталық барлық өлшемді функцияларының логарафимдік шартты қанағаттандыратын барлық өлшемді функцияларының жиыны болсын :

, ,

Мұндағы тұрақтысы және -ке тәуелсіз. арқылы (1.1.1) шартты және логарифмдік шартты қанағаттандыратын барлық өлшемді функциялардың жиынын белгілейміз .

шенелмеген жиын болған жағдайда, арқылы келесі шексіздіктегі логарифмдік шартты қанағаттандыратын жиынының ішкі жиынын белгілейміз:

, .

Енді логарифмдік шартты қанағаттандыратын (x) функцияларының мысалдарын келтірейік.

1.

2. .

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктерінің негізгі қасиеттерін дәлелдеп, көрсетеміз.

1. Айталық, өлшемді функциясы берілсін, сонымен қатар

болсын . Онда келесі тұжырымдар ақиқат болады:

а) егер болса, онда .

б) айталық облысының өлшемі нольден үлкен болсын. Онда төмендегі екі шарт эквивалент болады:

.

Егер болса, онда .

Дәлелдеу. а) Айталық шарты орындалсын. Кез-келген

нақты санын бекітіп алайық. Шектің анықтамасы бойынша жеткілікті үлкен сандары үшін теңсіздігі орындалады. Алайда келесі теңсіздігі орындалғандықтан, шартын аламыз.

б) Айталық, шарты орындалып, болсын. Кез-келген нақты санын бекітіп алайық. Онда шектің анықтамасы бойынша жеткілікті үлкен сандары үшін теңсіздігі орындалады. болғандықтан, келесі теңсіздікті аламыз

ал осыдан

теңсіздігі шығады. Ендеше, б) тұжырымы дұрыс.

Енді кері тұжырымды дәлелдейік.

Айталық болсын. Келесі шарттарды қанағаттандыратын өлшемді

өлшемді жиындар үйірін алайық:

1)

2) кез-келген ,

3) ,

4) егер болса, онда ,

5) .

Енді кез-келген бекітілген санын алайық. Келесі белгілеулерді енгізейік

,

, .

функциясының анықтамасын ескеріп, келесі теңдікті аламыз:

Сонымен қатар, келесі теңсіздікті аламыз

ал жоғарыдағы шарт бойынша

жиындар жүйесі жоғарыдағы шарттарды шарттардың барлығын қанағаттандырғандықтан, келесі теңсіздіктер тізбегін аламыз

.

Бұл өрнектің оң жағында тұрған шама ақырлы емес:

,

ал осыдан келесі теңсіздік шығады

.

Лебегтің жинақтылық теоремасын пайдаланып, келесі теңсіздікті аламыз

.

Ендеше, б) тұрыжымының шарты орындалмайды, яғни жоғарыдағы шарттар өзара эквивалентті болады.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіріндегі әртүрлі жинақтылықтар арасындағы байланысты көрсететін келесі тұжырымды келтіріп, дәлелдейік.

Айталық, функционалдық тізбегі кеңістінде 0-ге жинақталсын. Онда бұл функция 0-ге Лебег өлшемі бойынша да жинақталады, яғни кез-келген

үшін

.

Дәлелдеу. Шектің анықтамасы бойынша, жеткілікті үлкен сандары үшін

теңсіздігі орындалады. Онда

.

болғанда келесі теңдікті аламыз

.

Бұл теңдік тұжырымды дәлелдейді.

Енді айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктеріне түйіндес кеңістіктердің қасиеттері туралы баяндайық.

Айталық өлшемді функциясы берілсін. Онда айнымалы көрсеткішті кеңістігі және бұл кеңістіктегі норма келесі түрде анықталады

,

.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістігінің дуалді кеңістік құрылымы жайлы келесі тұжырым ақиқат.

Айталық өлшемді функциясы берілсін. Онда кез-келген

сызықты функционалы үшін функциясы табылып,

келесі теңдік орындалады

Сонымен қатар нормалардың арасындағы келесі теңсіздік орынды

.

Басқаша айтқанда .

классы ретінде келесі шартты қанағаттандыратын барық өлшемді функцияларының жиынын белгілейміз

Айталық болсын. Онда салмақты Лебег кеңістігі ретінде келесі норма ақырлы болатын барлық оң өлшемді функцияларының жиынын түсінеміз

Айталық шенелген облыс, және мәндерінің жиыны болатын жиынында өлшемді функция болсын. көрсеткіштері айнымалы Морри кеңістігі [5]-те келесі норма бойывнша анықталған

.

Айталық -де анықталған оң өлшемді функция болсын, мұндағы шенелген жиын, . Айнымалы көрсеткішті жалпыланған Морри типтес кеңістік [40] –да келесі норма бойынша анықталған

.

Айталық -де анықталған оң өлшемді функция болсын, мұндағы шенелген жиын, , өлшемді функция көрсеткіштері айнымалы Морри типтес кеңістік [7]-де келесі норма бойынша анықталған

.

Айталық анықталған оң өлшемді функция болсын, мұндағы шенелмеген облыс. Айнымалы көрсеткішті типтес кеңістік [41] –де келесі норма бойынша анықталған

.

Бұл жұмыста біз көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри типтес кеңістікті енгіземіз.

Айталық

**Анықтама 1.1.4**

Айталық, -де оң өлшемді функция болсын , оң өлшемді функция болсын, мұндағы шенелмеген жиын, өлшемді функция көрсеткіштері айнымалы глобалді Морри типтес кеңістігі келесі норма ақырлы болатындай барлық функциялардың жиыны ретінде анықталады

,

болғанда,

,

болғанда.

кеңістігі жалпыланған Морри кеңістігімен сәйкес келеді, мұндағы

.

болған жағдайда осы кеңістікті арқылы белгілейік:

,

.

Егер , болса, онда кеңістігі классикалық глоабальді Морри типтес кеңістімен сәйкес келеді.

**Лемма 1.1.1.** Келесі шарт кеңістігі тривиальді емес болуының жеткілікті шартын береді:

Дәлелдеу*.* Барлық шенелген функциялар осы кеңістікте жататынын көрсетсе жеткілікті. Айталық, болсын. Онда теңсіздігін пайдаланып (мысалы, [11]-ді қара), мынаны аламыз

ал бұл екенін білдіреді.

Бұл жағдайда кеңістігі шенелген функциялардан тұрады, яғни бос емес.Лемма 1.1 дәлелденді.

**1.2 Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі Харди-Литтлвуд максималды функциясының шенелгендігі.**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде кеңістіктердегі Харди-Литтлвуд максималды функциясының шенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.), (.)) функцияларына Харди-Литтлвуд максималды функциясының кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін шарттар алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді Морри типтес кеңістіктердегі Харди-Литтлвуд максималды функциясының шенелгендігінің шарттары да белгілі.

Бұл пункте Харди-Литтлвуд максимальді функциясының айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегішенелгендігінің жеткілікті шарттарын келтіреміз. Айталық . Харди Литллвуд максимальді операторы келесі теңдікпен анықталады , (1.2.1) мұндағы  центрі  және радиусы  ашық шар, , .

Айнымалы Лебег кеңістіктерінің көрсеткіші тұрақты Лебег кеңістіктерінен өте үлкен айыршалықтары бар.

Атап айтқанда:

- кеңістігі жылжытуға байланысты инвариантты емес. Жылжыту операторы - кеңістігінде шенелмеген. Юнгтің үйірткіге байланысты теңсіздігі орындалмайды.

- тұрақты сан болғандағы келесі формула

айнымалы көрсеткіш жағдайында орындалмайды.

Пуанкаре, Соболев, Феферман-Стейн теңсіздіктері айнымалы көрсеткіш жағдайында орындалмайды. А. Лернер келесі

теңсіздігінің орындалуы үшін болуы қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеген.

Л.Дейнинг болған жағдайда максимальді функцияның кеңістігінде шенелген болатынын дәлелдеген.

Енді максимальді функция кеңістігінде шенелмеген болатындай функциялары мен облыстарының мысалдарын келтірейік.

1. . Онда максимальді функция - кеңістігінде шенелмеген болады.

Дәлелдеу. Айталық, болсын. Онда

.

Осыдан екені шығады. Ал үшін

Онда кез-келген λ үшін

Ендеше,

2. Айталық, өлшемді функциясы беріріліп, саны табылып,, , , болсын.Онда максимальді функция кеңістігінде шенелмеген болады.

Дәлелдеу. Айталық болсын. Онда

Ал бұл теңсіздік екенін білдіреді. Бірақ үшін келесі теңсіздіктер

орындалады. Сонымен қатар, кез-келген үшін

Бұл екенін білдіреді.

3. Айталық болсын. Онда максимальді функция кеңістігінде шенелмеген болады.

Дәлелдеу. Кез-келген , мұндағы , үшін теңсіздігі орындалатыны айқын.

Келесі функцияны анықтайық

.

Онда

Барлық үшін

Кез-келген үшін теңсіздігі орындалады, ендеше

Осыдан максимальді функцияның шенелмеген екені шығады.

Максимальді функцияның нормасы туралы маңызды бірнеше теңсіздіктерді келтірейік.

Айталық, саны берілсін. Максимальді функция - кеңістігінде шенелген болып, шарты орындалсын. Онда кез-келген

үшін

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеу. Айталық, нақты саны максимальді оператор - кеңестігінде шенелген болатындай таңдап алынсын. Онда

функциясы табылып, төмендегі қатынастар орындалады

,

біз мұнда Лебегтің дифференциалдық теоремасын қолдандық.

Ары қарай белгілі леммаларды пайдаланып

теңсіздігін аламыз.

Максимальді оператор кеңістігінде шенелген екендігі туралы шартты пайдаланып, келесі теңсіздікті аламыз

.

Келесі лемма [41] жұмыста дәлелденген.

**Лемма 1.2.1** Айталықжәне *.* Онда

Дәл осы жұмыста келесі теорема дәлелденген.

**Теорема 1.2.A.** Айталық *.* Онда

кез-келген үшін, мұндағы тұрақтысы және тәуелсіз.

Біз шенелмеген облыстарда максимальді оператордың шар бойынша нормасының жоғарыдан бағалануы туралы теңсіздікті дәлелдейміз.

**Лемма 1.2.2.** Айталық  *.* Онда

(1.2.1)

мұндағы тұрақтысы және тәуелсіз.

*Дәлелдеу.* 1.2.1 лемма және 1.2.A теореманы қолданып

Лемма 1.2.2 дәлелденді.

Айталық бекітілген оң сан болсын. Мынадай белгілеулер енгізейік:

.

Айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктеріндегі дуальді Харди операторының шенелгендігінің қажетті шарты туралы келесі теорема [33]-те дәлелденген.

**Теорема 1.2.B.** Айталық *және*  жиынында өлшемді функциялар болсын*.* оң саны табылып*,* барлық үшін келесі теңдіктерорындалсын *,* және теңсіздігібарлық дерлік жерде орындалсын*.* Егер

(1.2.2)

болса, онда операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Келесі теоремада максимальді оператордың айнымалы көрсеткішті шенелмеген облыстардағы глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігінің қажетті шартын береміз.

**Теорема 1.2. 1.** Айталық,және жиынында өлшемді функциялар болсын*.* оң саны табылып*,* барлықүшін келесі теңдіктер орындалсын *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*.* Егер жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(1.2.3)

Онда Харди Литллвуд максимальді операторы - кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу*.* Норманың анықтамасы және 1.2 .1 теорема бойынша

белгілеу енгізейік

мұндағы

кез-келген бекітілген үшін. Онда (1.2.2) шарт (1.2.3) түрін қабылдап, сол шарттан операторының ден -ге шенелгендігі шығады. Нәтижесінде аламыз

ал бұл теңсіздік оператордың шенелгендігін білдіреді.

Теорема 1.2.1 дәлелденді.

Келесі теорема шенелген облыс жағдайында [40]-та дәлелденген максимальді оператордың шар бойынша нормасының жоғарыдан бағалануы туралы теңсіздікті келтірейік.

**Теорема 1.2.C.** шенелген облыс, .*, . Онда*

(1.2.4)

мұндағы тұрақтысы -ларға тәуелсіз.

Бізге бұл бағалау максимальді оператордың глобальді Морри типтес кеңістіктерде шенелгендігін дәлелдеу үшін қажет.

Келесі теоремада шенелген облыста максимальді оператордың шенелгендік шартын береміз.

**Теорема 1.2.2.** Айталық*,* шенелген облыс*, ,*

*,* оң өлшемдікелесі шартты қанағаттандырсын

(1.2.5)

Онда максимальді оператор - кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу. 1.2.C теореманы және Гельдер теңсіздігін пайдаланып, аламыз

Бұл теңсіздік максимальді оператор - кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін көрсетеді.

Теорема 1.2.2 дәлелденді.

**1.3** **Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының шенелгендігі (Спейн типтес нәтижелер).**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде кеңістіктердегі Рис потенциалыныңшенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.), (.)) функцияларына Рис потенциалының кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін Спейн типтесшарттар алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалыныңшенелгендігінің шарттары да белгілі.

Айталық функциясы берілсін. Онда Рисс потенциалы келесі теңдікпен анықталады

,

мұндағы .

Бұл пункте Рис потенциалыныңайнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегішенелгендігінің жеткілікті шарттарын келтіреміз.**Теорема 1.3.А.** Айталық , , ,  және , , шарттары орындалсын, және төмендегі шарт орындалсын

,

кез- келген , мұндағы  . Онда  Рисс потенциалы  кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Бұл бөлімде Риис потенциалының шенелгендік шарттарын айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктерде шенелген және шенелмеген облыстарда қарастырамыз.

Шенелген облыста алынған нәтижелерді дәлелдеу үшін [40]-та дәлелденген Рисс потенциаланың шенелген облыстардағы айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктеріндегі шар бойынша нормасының жоғарыдан бағалауы туралы көмекші теоремаларды келтірейік.

**Теорема 1.3.В.** Айталық,шенелген облыс*,* келесі шарттарды қанағаттандырсын

(1.3.1)

(1.3.2)

Онда

мұндағы тұрақтысы -ларға тәуелсіз.

Дәл осы жұмыста дәлелденген Рисс потенциалы мен максимальді операторды байланыстыратын келесі теореманы келтірейік.

**Теорема 1.3.С.** Айталық*,* шенелген облыс*,* және  өлшемді функциясы(1.3.1) және (1.3.2) шарттарды қанағаттандырсын*.*

Онда

мұндағы тұрақтысы -ларға тәуелсіз.

Келесі теоремада Рисс потенциалының шенелген облыстардағы айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелегендігінің Спейн типтес нәтижесін береміз.

**Теорема 1.3.1.** Айталық*,* шенелген облыс*,*  жәнеөлшемді функциясы(1.3.1) және (1.3.2) шарттарды қанағаттандырсын*,*

*,* оң өлшемдікелесі шартты қанағаттандырсын

(1.3.3)

Онда Рисс потенциалы - кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** Айталық, болсын.

Бізге тек қарастыру жеткілікті, себебі шарты орындалады.

1.7 теорема және Гельдер теңсіздігін қолданып

Осы теңсіздік және (1.10) шарттан

ал бұл Рисс потенциалы - кеңістігінеен кеңістігіне шенелген екенін білдіреді.

Теорема 1.9 дәлелденді.

**Теорема 1.3.2.** Айталық*,* шенелген облыс*,* жәнеөлшемді функциясы(1.8) және (1.9) шарттарды қанағаттандырсын*,*

*,* оң өлшемдіжәнефункциялары*,* мұндағы *,* келесі шарттарды қанағаттандырсын

(1.3.4)

(1.3.5)

операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** Айталық, болсын. Төмендегі норманы бағалайық

1.3C теоремасы бойынша

мұндағы . Гельдер теңсіздігі және (1.3.5) шартты қолданып

Сондықтан

оң санын төмендегідей таңдейық

Онда

Ендеше

Осыдан шығатыны

Келесі теңсіздікті аламыз

Максимальді оператордың шенелгендігі туралы теорема бойынша

Бұдан операторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін білдіреді.

Келесі теоремалары Рисс потенциалының шенелмеген облыстардағы глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігінің жеткілікті шарттарын береді.

Біз төмендегідей көмекші теоремаларды келтіреміз.

Шенелмеген облыстардағы айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктердегі Рисс потенциалының шар бойынша нормасының жоғарыдан бағалау туралы теорема [41] жұмыста дәлелденген.

**Теорема 1.3.Д.** Айталықкелесі шарттарды *,*  қанағаттандырсын*.*Онда келесі теңсіздік орынды

(1.3.6)

мұндағы тұрақтысы және айнымалыларына тәуелсіз.

Енді осы теореманы көрсеткіші айнымалы салмақты Рисс потенциалына өткіземіз.

Дәлелдеу**.** функциясын келесідей жіктейміз:

, , .

Онда

Айнымалы көрсеткішті салмақты Рисс потенциалының шенелгендігі туралы теорема бойынша

1.1 лемма бойынша

(1.3.8)

Айталық, және болсын, екені айқын. теңсіздігін қолданып,

нақты санын таңдап алып,

Ендеше

,

(1.3.8)-ті ескеріп, (1.3.7) аламыз.

Теорема 1.3.3 дәлелденді.

Біз келесі теоремада Рисс потенциалының шенелген облыстардағы көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігінің қажетті шартын береміз.

**Теорема 1.3.4.** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып, барлықүшін *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*,* және функциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(1.3.9)

Онда операторы кеңістігінен

кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** 1.3.Д теорема бойынша

Келесі белгілеу енгізейік

мұндағы

кез-келген бекітілген үшін. Онда операторының ден шенелгендігін қаматамасыз ететін (1.2.2) шарт (1.3.9) түрде жазылады.

Сол шарт орындалғандықтан, біз келесі теңсіздікті аламыз

ал бұл теңсіздік операторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін көрсетеді.

Теорема 1.3.4 дәлелденді.

**Салдар 1.3.1.** Айталық*, ,*  болсын*.*

Сонымен қатар, келесі шарттар орындалсын

(1.3.10)

(1.3.11)

Онда операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** (1.16) шарт келесі түрде болады

Ішкі және сыртқы интегралдардың жинақтылық шарттарынан (1.3.10) және (1.3.11) шарттарын аламыз.

1.3.1 салдар дәлелденді.

**Теорема 1.3.5** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып, барлықүшін *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*,* және функциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

Онда операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** Бұл теореманың дәлелдеуі дәл 1.14 теореманың дәлелдеуіндей. Тек операторының орнына операторын қою жеткілікті.

Теорема 1.3.5 дәлелденді.

**1.4. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының шенелгендігі (Адамс типтес нәтижелер).**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде кеңістіктердегі Рис потенциалыныңшенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.), (.)) функцияларына Рис потенциалының кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін Адамс типтесшарттар алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалыныңшенелгендігінің шарттары да белгілі.

Бұл пункте Рис потенциалыныңайнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегішенелгендігінің жеткілікті шарттарын келтіреміз

**Теорема 1.4.1.** Айталық*,* шенелген облыс*,*  жәнеөлшемді функциясы(1.8) және (1.9) шарттарды қанағаттандырсын,

*,* оң өлшемдіжәнефункциялары*,* мұндағы *,* келесі шарттарды қанағаттандырсын

(1.4.1)

(1.4.2)

операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** Айталық, болсын. Төмендегі норманы бағалайық

1.3C теоремасы бойынша

мұндағы . Гельдер теңсіздігі және (1.3.5) шартты қолданып

Сондықтан

оң санын төмендегідей таңдейық

Онда

Ендеше

Осыдан шығатыны

Келесі теңсіздікті аламыз

Максимальді оператордың шенелгендігі туралы теорема бойынша

Бұдан операторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін білдіреді.

Теорема 1.4.1 дәлелденді.

**1.5 Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі бөлшек-максималды функциясының шенелгендігі.**

Айнымалы көрсеткішті бөлшек-максималды функциясы келесі теңдікпен анықталады

(1.5.1)

болған жағдайда бұл оператор классикалық бөлшек-максималды операторымен сәйкес келеді. Егер , операторы максимальді Харди Литллвуд операторымен сәйкес келеді.

**Лемма.1.5. 1.**  операторы үшін келесі теңсіздік орынды

мұндағы тұрақтысы және -ке тәуелсіз.

үшін бұл теңсіздік белгілі, біз айнымалы жағдай үшін дәлелдейік.

Дәлелдеу. үшін келесі шаманы енгізейік

мұндағы - кеңістігіндегі бірлік шар. екені айқын.

Келесі теңсіздікті аламыз

Лемма дәлелденді.

Жоғарыдағы теңсіздіктің орындалғаны себепті, Рисс потенциалына алынған алдыңғы барлық теоремалар бөлшек-максимальді функция үшін де ақиқат болады.

**Теорема 1.5.1,**Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып, барлықүшін *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*,* және функциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(1.5.2)

Онда операторы кеңістігінен

кеңістігіне шенелген болады.

**Теорема 1.5.2** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*,* және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *,* оң саны табылып, барлықүшін *,* жәнебарлық дерлік жерде орындалсын*,* және функциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

Онда операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

**Теорема 1.5.3.** Айталық*,* шенелген облыс*,*  жәнеөлшемді функциясы(1.3.1) және (1.3.2) шарттарды қанағаттандырсын*,*

*,* оң өлшемдікелесі шартты қанағаттандырсын

(1.5.3)

Онда операторы кеңістігінен

кеңістігіне шенелген болады.

**Теорема 1.5.4.** Айталық*,* шенелген облыс*,* жәнеөлшемді функциясы(1.8) және (1.9) шарттарды қанағаттандырсын*,*

*,* оң өлшемдіжәнефункциялары*,* мұндағы *,* келесі шарттарды қанағаттандырсын

(1.5.4)

(1.5.5)

Онда операторы кеңістігінен

кеңістігіне шенелген болады.

**1.6 Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордың шенелгендігі.**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде Кальдерона-Зигмунд операторы және оның коммутаторының шенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.), (.)) функцияларына сингулярлық интегральдық оператор T- кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін шарттар алынды. Дәл осы сияқты шарттар көрсетілген кеңістіктерде сигулярлық интегралдық оператордың коммутаторына да алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді

Морри типтес кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордың шенелгендік шарттары да белгілі.

Сингулярлық интегралдық оператор келесі теңдікпен анықталады

Мұндағы ядро K(x,y)- төмендегі шарттарды қанағаттандыратын Ω×Ω-да үзіліссіз функция

Біз бұл бөлімде сингулярлық интегралдық оператордың көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендік шартын аламыз.

Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторының шенелмеген облыстардағы айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктеріндегі нормасының жоғарыдан бағалануы туралы келесі теорема [41]-де дәлелденген.

**еорема 1.6.A.** Айталық . Онда

,

тұрақтысы және тәуелсіз.

**Теорема 1.6.1.** Айталық және функциялары жиынында өлшемді функциялар болып, ,

теңсіздіктері орындалсын. Егер өлшемді және функциялары төмендегі шартты

.

қанағаттандырса, онда сингулярлық интегралдық оператор кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** 1.6.A теорема және , көрсеткіштері бойынша Гельдер теңсіздігін қолданып:

=

=

Бұл теңсіздік сингулярлық интегралдық опертор кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін көрсетеді.

Теорема 1.6.1 дәлелденді.

1. **Классикалық интегралдық операторлардың коммутаторларының айнымалы көрсеткішті локальді жане глобальди Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігі мен компактілігі**

**2.1. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының коммутаторының шенелгендігі.**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде кеңістіктердегі Рис потенциалыныңкоммутаторының шенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.), (.)) функцияларына Рис потенциалыныңкоммутаторының кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін шарттар алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалыныңкоммутаторының шенелгендігінің шарттары да белгілі.

Бұл пункте Рис потенциалыныңкоммутаторының айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегішенелгендігінің жеткілікті шарттарын келтіреміз.

арқылы келесі норма ақырлы болатындай барлық функциялардың жиынын белгілейік

мұндағы .

Айталық, болсын. Рисс потенциалының коммутаторы келесі теңдікпен анықталады

Бұл бөлімде Риис потенциалының коммутаторының шенелгендік шарттарын айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктерде шенелген және шенелмеген облыстарда қарастырамыз.

Рисс потенциалының коммутаторының шенелген облыстардағы айнымалы көрсеткішті Лебег кеңістіктеріндегі шар бойынша нормасының жоғарыдан бағалауы туралы келесі теорема [42]-де дәлелденген.

**Теорема 2.1.A.** Айталық шенелмеген облыс болсын,

, , , , . Онда

мұндағы тұрақтысы және тәуелсіз.

**Теорема 2.2.1.** Айталық және және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *, a* оң саны табылып*,* барлықүшінжәнебарлық дерлікжерде орындалсын*.* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(2.2.1)

Онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу. 2.1.A теореманы пайдаланып

біз мұнда , теңсіздігін қолдандық. Мынадай белгілеу енгіземіз

мұндағы

кез-келген бекітілген үшін. Онда операторының ден шенелгендігін қаматамасыз ететін (1.2.2) шарт (2.1.1) түрде болады.

Сол шарт орындалғандықтан, біз келесі теңсіздікті аламыз

Бұл теңсіздік коммутаторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін көрсетеді.

Теорема 2.1.1 дәлелденді.

**Теорема 2.1.2.** Айталықжәненақты саны *,*  шарттарын қанағаттандырсын*.*  функциялары жиынында өлшемді функциялар болып, ,

теңсіздіктері орындалсын.

Сонымен қатар*,* жәнефункциялары *,* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

.

.

Онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу. 2.1.A теореманы пайдаланып

Бұл теңсіздік коммутаторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген екенін көрсетеді.

Теорема 2.1.2 дәлелденді.

**2.2. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордың коммутаторларының шенелгендігі.**

Біз бұл пункте көрсеткіштері p(.), θ(.) айнымалы глобальді Морри типтес кеңістіктер қарастырамыз, мұндағы шенелмеген жиын. Осы кеңістіктерде кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордыңкоммутаторының шенелгендігі туралы мәселелер қарастырылады.

көрсеткіштері мен ((.),(.)) функцияларына сингулярлық интегралдық оператордыңкоммутаторының кеңістігінен кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін шарттар алынды.

көрсеткіштері тұрақты болғанда, сингулярлық интеграл және оның коммутаторының глобальді Морри типтес кеңістіктердегі шенелгендігін басқа авторлар зерттеген. жиыны шенелген болған жағдайда да глобальді Морри типтес кеңістіктердегі сингулярлық интегралдық оператордыңкоммутаторының шенелгендігінің шарттары да белгілі.

Бұл пункте сингулярлық интегралдық оператордыңкоммутаторының айнымалы көрсеткішті глобальді Морри типтес кеңістіктердегішенелгендігінің жеткілікті шарттарын келтіреміз.

Айталық, болсын. Кальдерон-Зигмунд интегралдық операторы

келесі теңдікпен анықталады

Келесі теорема [43]-те дәлелденген.

**Теорема 2.2. A.** Айталық және болсын. Онда

,

мұндағы тұрақтысы және тәуелсіз.

**Теорема 2.2.1.** Айталық және және функциялары -те өлшемді функциялар болсын *, a* оң саны табылып*,* барлықүшінжәнебарлық дерлік жердеорындалсын*.* жәнеөлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

(2.2.1)

Онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.**

біз мұнда , теңсіздігін қолдандық. Мынадай белгілеу енгіземіз

мұндағы

кез-келген бекітілген үшін. Онда операторының ден шенелгендігін қаматамасыз ететін (1.2.2) шарт (2.2.1) түрде болады.

Сол шарт орындалғандықтан, біз келесі теңсіздікті аламыз

Бұл шарт коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болатынын көрсетеді.

Теорема 2.2.1 дәлелденді.

**Теорема 2.2.2.** Айталық және функциялары жиынында өлшемді функциялар болып, , теңсіздіктері орындалсын. Егер өлшемді және функциялары төмендегі шартты

.

қанағаттандырса, онда коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болады.

Дәлелдеу**.** 1.15 теорема және , көрсеткіштері бойынша Гельдер теңсіздігін қолданып:

=

Бұл шарт коммутаторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болатынын көрсетеді.

**2.3. Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктердегі жиындардың компактілігі.**

Бұл бөлімде жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындардың компактілігінің жеткілікті шарттары келтірілген.

Үзіліссіз функциялар кеңістігіндегі  (Арцела-Асколи теоремасы) және  кеңістіктердегі (Фреше-Колмагоров теоремасы) жиындардың компактілігі туралы белгілі теоремаларды келтірейік.

**Теорема 2.3.A.** **(**Арцела-Асколи 1895)

Айталық  жиыны компактілі болсын. Онда  жиыны предкомпактілі болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті

 (2.3.1)

 (2.3.2)

**Теорема 2.3.B.** (Фреше-Колмогоров) Айталық  болсын. Онда  жиыны предкомпактілі болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті

 (2.3.3)

 (2.3.4)

 (2.3.5)

Мұндағы (2.3.4) шарт функцияның айырмасы терминінде берілген. Дәл осы сияқты Фреше-Колмагоров теоремасы белгілі, онда (2.3.4 ) шарт функцияның орта мәні термиинінде берілген.

**Теорема 2.3.C.** [] (Фреше-Колмогоров) Айталық  болсын. Онда  жиыны предкомпактілі болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті

 (2.3.6)

 (2.3.7)

және

 (2.3.8)

мұндағы  – шарының толықтауышы, кез-келген  үшін және  функциясы үшін



мұндағы . Ал - жиынының характеристикалық функциясы, - жиынының толықтауышы,  –А жиынының Лебег өлшемі.

Сонымен қатар, егер  –шенелген жиын болса, онда  жиынының компактілі болуы үшін (2.3.3)-(2.3.4) шарттарының орындалуы қажетті және жеткілікті, мұндағы  жиыны  жиынымен ауыстырылады.

Банах кеңістігіндегі шенелген жиындардың компактілік шартын келесі теорема береді (Отелбаев-Ценд, 1972).

Айталық В –(-∞;+∞) сандық осінде анықталған функциялардың Банах кеңістігі болсын. Сонымен қатар, В кеңістігінде жылжыту операторы  шенелген және күшті үзіліссіз болсын.

**Теорема 2.3.D.** [] (Отелбаев-Ценд). В жиынының ішкі жиыны болатын К жиыны предкомпактілі болуы үшін келесі шарттардың орындалуы қажетті және жеткілікті:

 (2.3.9)

 болғанда,

 при  (2.3.10)

Морри кеңістігіндегі жиындардың компактілігі туралы сұрақтар [46], [47], ал жалпыланған Морри кеңістігі үшін [48]-де зерттелді.

Бұл бөлімдегі мақсатымыз жалпыланған Морри кеңістігіндегі жиындар үшін компактілік шартын табу болып табылады.

**Теорема 2.3.E.** Айталық,  және  болсын. Сонымен қатар, жиыны төмендегі шарттарды қанағаттандырсын:

 (2.3.11)

 (2.3.12)

 (2.3.13)

Онда жиыны  кеңістігінде предкомактілі жиын болады.

Морри  кеңістігі жағдайында дәл осы теорема жұмыста дәлелденген,  - жағдайда Фреше-Колмогоровтың теоремасын береді.

**Теорема 2.3.1.** Айталық, оң өлшемді функциясы шартын қанағаттандырсын, мұндағы өлшемді функция, тұрақтысы ға тәуелсіз. жиыны үшін келесі шарттар орындалсын

, (2.3.14)

, (2.3.15)

. (2.3.16)

Ондажиыны кеңістігінде предкомактілі жиын болады.

Дәлелдеу. Айталық нақты берілсін. функциясының шарындағы орта мәнін арқылы белгілейік:

*=*

*.*

Ендеше

*.*

жиыны предкомпактілі жиын екенін дәлелдеу үшінжиыны жеткілікті азүшін предкомпактілі жиын болатынын дәлелдеу жеткілікті.

Бұл тұжырымды дәлелдеу үшін, кез-келген *ε үшін* жиыны үшінақырлы *ε-*тор бар екенін дәлелдеу жеткілікті*.*

Ол үшінжиыныкеңістігінде предкомпактілі болатынынкөрсетейік*,* мұндағы *.*

Кез-келген үшін Гельдер теңсіздігі бойынша

жәнетеңсіздіктері ақиқат, ендешежиыны *( 2.3.13)* шарт бойынша бірқалыпты шенелген болады*.* Предкомпактіліктің бірінші шартты орындалатыны дәлелденді.

Енді екінші шарт орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін төмендегі айырманы бағалайық;

*( 2.3.14)* шарт бойынша предкомпактіліктің екінші шарты шығады.

Дәлелдеуді аяқтау үшін*,* жиыны үшінкеңістігінде ақырлытор кез-келген *ε* саны үшін бар екенін көрсетейік*.*

Кез-келгенсаны үшінтеңсіздіктері орындалатындай жәнесандары табылады.

Сонымен қатар

*.*

Арцел-Асколи теоремасы бойыншажиыншасы табылып*,* жиыншасыжиыны үшінкеңістігініңнормасы бойынша ақырлытор болады*.*

жиыншасыжиыны үшіннормасы бойынша ақырлытор болатынын дәлелдейік*.*

Дәлелдеуді аяқтау үшін, кез-келгенүшінэлементі табылып, келесі теңсіздік орындалатынын көрсету жеткілікті

(2.3.17)

Бізді, мұндағы, келесі теңсіздік орындалатындай таңдап ала аламыз:

*.*

*(* 2.3.17*)* шартты көрсету үшін біз үш жағдайды қарастырамыз*.*

*1. .*

Егерболса, онда

*.*

болған жағдайда

*.*

*2. . .* Бұл жағдайда

*3. ,* Онда

*+*

Мұндағыжәнешамалары *1,2* жағдайлардағы әдіспен *ε-*нан кіші қыла аламыз.

Ендешежиыны үшін кеңістігінде ақырлытор бар*.*

Теорема толығымен дәлелденді*.*

**2.4. Айнымалы көрсеткішті локальді және глобальды Морри типтес кеңістіктердегі Рис потенциалының коммутаторының компактілігі.**

Морри кеңістігі жағдайында жиындардың компактілігі [46-47] те зерттелген. Келесі белгілі теоремалар  коммутатордың  Морри кеңістіктерінде шенелген және компактілі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттарын береді.

**Теорема 2.4.A.** Айталық , , ,  болсын. Онда  коммутатордың  кеңістігінен  кеңістігіне шенелген болуы үшін  шартының орындалуы қажетті және жеткілікті.

**Теорема 2.4.B.** Айталық , , ,  болсын. Онда  коммутатордың  кеңістігінен  кеңістігіне шенелген болуы үшін  қажетті және жеткілікті.

**Теорема 2.4.C.** Айталық , , ,  болсын және  өлшемді функциялары келесі шартты қанағаттандырсын

 (2.4.1)

Онда  коммутаторы  кеңістігінен  кеңістігіне шенелген болады.

Біздің мақсатымыз- коммутаторының жалпыланған Морри  кеңістігінде компактілі болуының жеткілікті шартын алу .

**Теорема 2.4.1.** *Айталық , , , ,  және  функциялары* (2.3.14)  *шартты қанағаттандырсын.  коммутаторы  кеңістігінен  кеңістігіне компактілі болады.*

Теореманы дәлелдеу үшін бізге келесі көмекші тұжырымдар қажет.

**Лемма 2.4.1.** Айталық  болсын. Онда  сандарына ғана тәуелді  табылып, кейбір ,  және , ,  үшін келесі теңсіздік орындалады

 (2.4.2)

*Дәлелдеу.*  операторының анықтамасын пайдаланып, мынаны аламыз







 теңсіздігі барлық  үшін орындалғандықтан, біз келесі теңсіздікті аламыз

 (2.4.3)

Осыдан аламыз







 (2.4.4)

 теңдігі  үшін орындалғандықтан, .

Осыдан





 (2.4.5)

(2.4.4) және (2.4.5) теңсіздіктерден (2.4.2) теңсіздік шығады, мұндағы .

**Лемма 2.4.2.** Айталық,  болсын. Онда сандарына ғана тәуелді  табылып, кейбір , ,  шарттарын қанағаттандыратын функциялар және , ,  үшін келесі бағалау орынды

 (2.4.6)

*Дәлелдеу.*  Айталық, ,, для  болсын. Онда











2.4.1 леммадан (2.4.6) бағалауын аламыз.

**Теореманың дәлелдеуі.**

 үшін теореманың 1-3 шарттары орындалатынын дәлелдеу жеткілікті.

Айталық F-  Морри кеңістігіндегі кез-келген шенелген жиын болсын. Тығыздық себепті, теореманы барлық  үшін дәлелдеу жеткілікті, яғни  жиыны  де предкомпактілі жиын екенін дәлелдеу жеткілікті.

Айталық, келесі шарт орындалсын



(2.4.2) шартты ескере отырып, мынаны аламыз



Осыдан теореманың 1-ші шарты шығады.

Енді  операторы үшін теореманың 3-ші шартын аламыз



Бұл 2.4.2 леммадан шығады. Шындығында







Осыдан теореманың 3-ші шартын аламыз.

Енді теореманың 2-ші шарты орындалатынын көрсетейік, яғни  және  үшін келесі теңсіздік



айтарлықтай аз  үшін орындалатынын көрсетейік.

Айталық,  теңсіздігін қанағаттандыратын сан болсын. Онда  үшін аламыз







 болғандықтан,



Онда



2.4.1теорема бойынша



 үшін келесі теңсіздікті аламыз



Сондықтан



Қайтадан 2.4.1 теореманың негізінде

.

Ендеше,



Сондықтан



Дәл сол сияқты, келесі теңсіздікті қолданып



Мынаны аламыз



Сондықтан



Мұндағы  тұрақтысы  және  ге тәуелсіз.  шамасын өте аз қылып, төмендегі теңсіздікті аламыз

,

ендеше  теореманың 2-ші шартын қанағаттандырады. Ендеше,  жиыны  кеңістігінде предкомпактілі. Теорема толығымен дәлелденді.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Лебег кеңістігіндегі және Морри типті кеңістіктердегі Харди-Литлвуд максимум операторы, бөлшектік Харди-Литлвуд максимум операторы, Рис потенциалы, сингулярлық интегралдық операторлар және т.б. сияқты нақты талдаудың классикалық операторларының шектелу теориясы болып табылады. жақсы зерттелген. Сандық параметрлер мәндерінің басым көпшілігі үшін Моррей типті кеңістіктердегі классикалық операторлардың шектелгендігін қамтамасыз ететін салмақтық функциялар үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылды. Бұл нәтижелер нақты талдауда және жеке дифференциалдық теңдеулер теориясында жақсы қолданбаларға ие. Бұл домендерде салмақты Лебег кеңістіктерімен қатар жалпы Морри типті кеңістіктер де маңызды рөл атқарады.

Жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынған:

-Көрсеткіштері айнымалы глобальді және локальді Морри типтес кеңістіктер енгізілді, олардың бос емес болуының шарттары алынды.

-Харди-Литллвуд максимальді операторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

- Рисс потенциалы және оның коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

-Кальдерон-Зигмунд сингулярлық интегралдық операторы және оның

коммутаторының көрсеткіштері айнымалы глобальді Морри кеңістіктерде шенелгендік шарттары алынды.

-Айнымалы көрсеткішті Морри типтес кеңістіктерде Рисс потенциалы коммутаторының компактілік шарттары алынды Диссертациялық жұмыс бойынша негізгі материалдар ғылыми журналдар мен халықаралық және республикалық конференциялардың жинағында жарияланған: «Ғылым және білім-2019», халықаралық ғылыми-практикалық конференциясының баяндамаларының материалдары, «Жас ғалымдардың VI халықаралық ғылыми конференциясының еңбектері», «Ломоносов -2020» Студенттер, магистранттар және жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясы, «Математика, механика мен информатиканың теориялық және қолданбалы мәселері», халықаралық ғылыми конференциясының материалдары, «Бірінші халықаралық Жолдасбеков симпозиумы» баяндама тезистерi, «Қазiргi математика, информатика және механиканың көкейкестi мәселелерi» баяндама тезистерi және т.б.

Алынған нәтижелерді студентттерге, магистранттарға арнайы курс оқығанда пайдалануға болады.

**ПАЙДАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТЕР ТІЗІМІ**

[1] Nikol’skij S.M. Approximatin of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems // Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[2] Besov O.V., Il’in V.P. and. Nikol’skij S.M Integral Representation of Functions and Imbedding Theorems. Vol. I+II, V.H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1978, 1979, Translated from the Russian. Scripta Series in Mathematics, Edited by Mitchell H. Taibleson.

[3] Triebel H. Theory of function spaces, Birkhäuser, Basel, 1983.-P.000

[4] V.I. Burenkov, Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces I, Eurasian Math. J. 3 (2012), no. 3, 11 - 32.

[5] V.I. Burenkov, Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces II, Eurasian Math. J. 4 (2013), no. 1, 21 - 45.

[6] Morrey, C.B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans.Amer.Math.Soc, vol. 43, pp. 126-166. (1938)

[7] Stein, E.M.: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton Mathematical Series, vol.30. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, (1970)

[8] Stein, E.M., Weiss, G.: Introduction to Fourier Analisis on Euclidean Spaces. 297 p. (1971)

[9] Grafakos, L.: Modern Fourier Analysis. Springer Science + Business Media, LLC, 233 Spring street, New York, NY 10013, 507 p. USA (2009)

[10] Burenkov, V.I.: Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. I. Eurasian Mathematical Journal, vol. 3, N 3, pp. 11-32 (2012)

[11] Burenkov, V.I.: Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces. II. Eurasian Mathematical Journal, vol. 4, N 1, pp. 21-45 (2013)

[12] Adams, D.R.: Morrey Spaces. Birkhuser, 123 p. (2015)

[13] Mizuhara, T.: Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces Harmonic Analisis (S.Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo, pp.183-189. (1991)

[14] Nakai, E.: Hardy-Littlewood maximal operators and the Riesz potential on generalized Morrey spaces. Math.Nachr. vol.166, №1, pp.95-103. (1994)

[15] Guliyev, V.S.: Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces. J.Inequal.Appl., pp.20. (2009)

[16] Burenkov, V.I., Guliyev, V.S.: Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces. Studia Mathematica 163, no.2, pp.157-176. (2004)

[17] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S.: Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces. Journal of Computational and Applied Mathematics, pp.280-300. (2007)

[18] Burenkov, V.I., Guliyev, H.V., Guliyev, V.S.: Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces. Doklady Ross.Akad.Nauk, 412, no.5, 2007, pp.585-589 (in Russian). English transl.in Acad.Sci.Dokl.Math.76. (2007)

[19] Burenkov, V.I., Gogatishvili, A., Guliyev, V.S., Mustafaev, R.: Boundedness of the fractional maximal operator in the local Morrey-type spaces. Complex Var.Elliptic Equations 55, no.8-10, pp.739-758. (2010)

[20] Diening, L., Harjulehto, P., Hasto, P., Ruzicka, M.: Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. SPIN Springer’s internal project number. Monograph, 502 p. (2010)

[21] Almedia, A., Hasanov, J.J. and Samko S.G.: Maximal, potential operators in variable exponent Morrey spaces. Georgian Math. J. 15, No 2, pp.195-208. (2008)

[22] Kokilashvili, V., Meskhi, A.: Maximal functions and potentials in variable exponent Morrey spaces with njndoubling measure. Complex.Var.Elliptic Equ. 55, No.8-10, pp.923-936.(2010)

[23] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G.: Boundedness of the Maximal, potential and singular operators in the gewneralized variable exponent Morrey spaces. Math. Scand.107, pp.285-304. (2010)

[24] Guliyev, V.S., Hasanov, J.J. and Samko, S.G.: Boundedness of the Maximal, potential and singular operators in the gewneralized variable exponent Morrey spaces. [In russion] Probl. Mat. Anal. 50, 3-20, (2010); English transl. J. Math. Sci., New York 170, No 4, pp.423-443. (2010

[25] J. Alvarez,C.Perez,  *Estimates with weights for various singular inegral operators.* Boll.Un.Mat.Ital.A(7)8(1994),no.1, 123-133.

[26] F. Andersen, T.John,  *Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals.* Studia.Math.69(1980),19-31.

[27] C.B. Morrey,  *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations.* Trans.Am.Math.Soc.43 (1938), 126-166.

[28] V. Burenkov,H.Guliev  *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces .* Studia Math.163 (2004),157-176.

[29] V. Burenkov,V.Guliev  *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces .* Potential Anal.31 (2009),1-39

[30] V. Burenkov,H.Guliev,V.Guliev  *Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces .* Doklady Ross.Akad.Nauk.Matematika,412, no.5(2007), 585-589 (in Russian).English transl. in Acad.Sci.Dokl.Math.,76 (2007).

[31] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka  *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents.* Monograph (2010), 1-493

[32] L. Diening,  *Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces and .* Math.Nachr.268(2004),31-43.

[33] D. Edmunds, V.Kokilasvili, A.Meskhi  *On the boundedness and compactness of weighted Hardy operators in spaces .* Georg.Math.J.12(2005), Num.1,27-44

[34] V. Burenkov. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces // Eurasian. Math. J. – 2012. – Vol.3, No.3, – Pp. 11-32.

[35] V. Burenkov. Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces // Eurasian. Math. J. – 2013. – Vol.4, No.1, – Pp. 21-45.

[36] L.Diening, P.Harjulehto, P.Hasto, M.Ruzicka. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents // Monograpgh. – 2010. – Pp. 1-493.

[37] L.Diening Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces and . // Math.Nachr. – 2004. – Vol.268, – Pp.31-43.

[38] A. Almeida,J.Hasanov S.Samko. Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces // Georgian. Math. J. – 2008. – Vol.15, No.2, – Pp. 195-208.

[39] V. Guliyev,S.Samko, J.Hasanov Boundedness of the maximal, potential type and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey spaces. // Math.Scand. – 2010. – Vol.107, – Pp. 285-304.

[40] V. Guliyev,S.Samko, J.Hasanov. Boundedness of maximal, potential type,and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces // J.Math.Sciences. – 2010. – Vol.170, No. 4. – Pp. 423-442.

[41] V. Guliyev,S.Samko. Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets // J.Math.Sciences. – 2013. – Vol.193, No. 2. – Pp. 228-247.

[42] V. Guliyev, J.Hasanov, X.Badalov. Commutators of Riesz potential in the vanishing generalized Morrey spaces with variable exponent // J.Math.Sciences. – 2019. – Vol.22, No. 1. – Pp. 331-351.

[43] Guliyev. V, Hasanov. J, Maximal and singular integral operators and their commutators on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent.//Math.Ineq.Appl, Vol.21(2018), 41-61.

[44] Almeida. A, Hasto. P, Besov spaces with variable smoothness and integrability. // Journal of functional anal. , Vol.258 (2010), 1628-1655

[45] Peetre. J, On convolution operators leaving spaces invariant. //Ann.Math.Pura ed Appl.,72, no.4(1966), 295-304

1. Y. Chen, Y. Ding, Compactness of commutators for singular integrals on Morrey Spaces, Canad. J. Math. 64 (2012) no. 2, 257\_281.
2. Y. Chen, Y. Ding, X. Wang, Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey space, Potential Anal. 30 (2009), no. 4, 301\_313.
3. **Bokayev N.A.**, Burenkov V.I., Matin D.T. On precompactness of a setin general local and global Morrey-type spaces // Eurasian Math. J., 2017, [Volume 8,](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=contents&option_lang=eng&jrnid=emj&vl=8&yl=2017&series=0#showvolume) [Number 3,](http://www.mathnet.ru/php/contents.phtml?wshow=issue&jrnid=emj&year=2017&volume=8&issue=3&series=0&&option_lang=eng) Pages 109–115.  ( IF: 0,526 (2017),

49 **Bokayev N.A.**, Burenkov V.I., Matin D.T Sufficient conditions for the pre-compactness of sets in global Morrey-type spaces. Citation: AIP Conference Proceedings 1880, 030001 (2017); DOI: 10.1063/1.5000600 / View online: <http://dx.doi.org/10.1063/1.5000600>; View Table of Contents: <http://aip.scitation.org/toc/apc/1880/>

1. N.A. Bokayev, V.I. Burenkov, D.T. Matin, Sufficient conditions for pre-compactness of sets in the generalized Morrey spaces, Vestnyk KarGU 4 (2016), 18\_40.

**Диссертация тақырыбы бойынша жарияланған жұмыстар тiзiмi**

1. Bokayev N. A. Onerbek Zh. M. On the Boundedness of Integral Operators in Morrey-Type Spaces with Variable Exponents // Siberian Advances in Mathematics, 2022, Vol. 32, No. 2, 79-86, Q3, DOI: 10.1134/S1055134422020018

2. Adilkhanov A.N., Bokayev N. A. Onerbek Zh. M. On the boundedness of the maximal and the Riesz-type potential operators in the global Morrey-type spaces with variable exponent on bounded sets// Kazakh Mathematical Journal. - Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, 2020. - Vol. 20 no. 3. - P.69-78.

3. Onerbek Zh. M. Оn the boundedness of the Riesz potential and its commutator’s in the global Morrey-type spaces with variable exponents// Vestnik KazNU, Т 114, №2. 2022

4. Бокаев Н. А., Онербек Ж.М. Об ограниченности сингулярного интеграла типа Кальдерона-Зигмунда в глобальных пространствах типа Морри с переменными показателями// Vestnik KazNPU, 2022, №2

Тезистер:

1.Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем// Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В.А.Садовничего. Москва,МГУ, 13-15 мая 2019г.28-30.

2.Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем// Международная научная конференция «Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики». Караганды, КарГУ им. Е.А.Букетова, 13 июня 2019г. С.15.

3. Бокаев Н.А., Онербек Ж.М. Об ограниченности потенциала Рисса в локальных пространствах типа Морри с переменным показателем // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь дня работников науки Республики Казахстан . Алматы 3-5 апреля 2019 года, стр.54-55 .

4. А.Н. Адилханов, Ж.М. Онербек. О достаточных условиях ограниченности потенциала Рисса в глобальных пространствах типа Морри с переменным показателем//«Eurasian Mathematical Journal» журналының шығарыла басталғанына 10 жыл толуына арналған « Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (Еmj-2109) атты халықаралық конференция, ЕНУ, 2019ст. 14.

5. Bokayev N., Onerbek Zh., Adilkhanov A. Potential type operator in global Morrey-type spaces with variable exponents on unbounded sets // Традиционная международная апрельская математическая конференция посвященная 75-летию академика НАН РК Тынысбека Шариповича Кальменова, Институт математики и математического моделирования, Алматы 2021 pp 82.