Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

ӘОЖ 539.3 (043) Қолжазба құқығында

**НУРГОЗИЕВА АЙЖАН ЖАНАБАЕВНА**

**Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаны есептеудің дәлденген теориясы**

8D05403-Механика

философия докторы (PhD) дәрежесіне диссертация

Отандық ғылыми кеңесші:

PhD, қауымдастырылған профессор

Ахажанов Сунгат Беркинович,

Шетелдік ғылыми кеңесші:

Мехмет Авжар (Mehmet Avcar),

PhD, профессор,

Сүлеймен Демирел университеті (Түркия)

Қазақстан Республикасы

Алматы, 2025

**МАЗМҰНЫ**

[**НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР** 4](#_Toc197349882)

[**БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР** 5](#_Toc197349883)

[**КІРІСПЕ** 7](#_Toc197349884)

[**1 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРетін ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯЛАРҒА АРНАЛҒАН зерттеулерге шолу** 10](#_Toc197349885)

[**2 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны есептеудің жетілдірілген дәлденген теориясы** 17](#_Toc197349886)

[2.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген дәлденген теория бойынша пластинаның математикалық моделі 17](#_Toc197349887)

[2.1.1 Негізгі болжамдар, жылжулар, деформациялар мен кернеулер 17](#_Toc197349888)

[2.1.2 Пластинаның дифференциалдық тепе – теңдік теңдеуі, ішкі күштері 20](#_Toc197349889)

[2.1.3 Көлденең ығысу параметрі мен шекаралық шарттар 23](#_Toc197349890)

[2.2 Тік бұрышты пластинаны есептеуде айнымалылар бөлу әдісі мен арқалық функцияларын қолдану 27](#_Toc197349891)

[2.2.1 Пластинаны айнымалылар бөлу әдісі бойынша есептеу 27](#_Toc197349892)

[2.2.2 Пластинаны есептеуде қолданылатын арқалық функциялары 31](#_Toc197349893)

[2.3 Тік бұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу алгоритмі 35](#_Toc197349894)

[**3 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ Ақырлы элементтер әдісімен есептеу** 37](#_Toc197349895)

[3.1 Изотропты пластинаның иілуіндегі төртбұрышты ақырлы элементі, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы. 37](#_Toc197349896)

[3.2 Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаның ақырлы элементінің пішін функциясы, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы 48](#_Toc197349897)

[**4 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ Тікбұрышты пластинаЛАРДЫҢ иілуін есептеу** 54](#_Toc197349898)

[4.1 Таралған жүктеме әсер еткенде барлық жақтары топсалы тірелген пластинаның иілуі 54](#_Toc197349899)

[4.2 Әртүрлі бекінісі бар пластиналардың таралған жүктеме әсерінен иілуі 66](#_Toc197349900)

[4.2.1 Контуры қатты бекітілген пластинаның иілуі 66](#_Toc197349901)

[4.2.2 Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластинаның иілуі 68](#_Toc197349902)

[4.2.3 Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластинаның иілуі 71](#_Toc197349903)

[4.2.4 Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос пластинаның иілуі 72](#_Toc197349904)

[4.3 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу 75](#_Toc197349905)

[4.3.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді бекітілген пластинаны есептеу 75](#_Toc197349906)

[4.3.2 Тесік ақауы бар пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу 82](#_Toc197349907)

[4.3.3 Серпімділі негіздегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу 89](#_Toc197349908)

[**Қорытынды** 95](#_Toc197349909)

[**Пайдаланылған Әдебиеттер тізімі** 96](#_Toc197349910)

[**Қосымша** 100](#_Toc197349911)

## НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР

Бұл диссертацияда келесі стандарттарға сілтемелер жасалды:

ҚР МЖМБС 5.04.034-2011 Қазақстан Республикасының Мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Жоғары оқу орнынан кейінгі білім. Докторантура. Негізгі ережелер.

Автореферат және диссертацияны безендіру бойынша нұсқаулық, ҚР БҒМ, Жоғары аттестаттау комитеті. – Алматы, 2004.

МС 7.1-2003 Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптар және жобалау ережелері.

## БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

|  |  |
| --- | --- |
|  | декарттық координатар жүйесі |
|  | көлденең өлшемсіз координаталар |
|  | пластинаның  координаттық өстер бойындағы өлшемдері (қабырғаларының ұзындықтары) |
|  | координаттық өс бойындағы өлшемі (пластинаның қалыңдылығы) |
|  | пластинаға әсер ететін сыртқы таралған жүктеме. |
|  | пластинаның цилиндрлік қатаңдығы |
|  | ығысу модулі |
|  | серпімділік модулі |
|  | серпімділік тұрақтылар параметрі |
|  | цилиндрлік қатаңдық параметрі |
|  | көлденең ығысу параметрі |
|  | көлденең ығысудың таралу функциясы |
|  | сызықтық деформациялар |
|  | ығысу деформациялары |
|  | нормал кернеулер |
|  | жанама кернеулер |
|  | жанамалық және нормалдық кернеулердің таралу функциялары |
|  | жылжулар |
|  | тангенциалдық жылжулардың таралу функциясы |
|  | жалпы майысу функциясы |
|  | ығысу деформациясы ескерілген майысу функциясы |
|  | классикалық теория бойынша майысу функциясы |
|  | *x1* мен *x2* өстерімен бағытталған иілу және бұралу моменттері |
|  | *x1* мен *x2* өстеріне перпендикуляр көлденең күштер |
|  | *x1* мен *x2*  өсіне бағыттас нормалдың бұрылу бұрышы |
|  | біртекті теңдеудің меншікті санының квадраты |
|  | ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері |
|  | ішкі және сыртқы күштердің жұмыстары |
|  | элементтің жылжу векторы |
|  | элементтің транспонирленген жылжу векторы |
|  | деформация матрицасы |
|  | ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы |
|  | түйін күштерінің векторы |
|  | пластинаның координаттық функцияларының транспонирленген векторы |
|  | көлденең ығысуды ескермегендегі координаттық функциялар |
|  | көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функциялар |
|  | өстері бойынша бұрыштық жылжу |
|  | бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған момент |
|  | бұрыштық жылжу бойындағы момент |
|  | жылжуы бойымен бағытталған күш |
|  | көлденең ығысу деформациясын ескергендегі түйіндік жылжулар |
|  | ақырлы элементтің көлденең ығысу параметрлері |

## КІРІСПЕ

**Зерттеу тақырыбының өзектілігі.** Пластиналарды көлденең ығысу деформация әсерін ескере отырып есептеу құрылыс, машина жасау, авиация және басқа да салаларда құрылымдық элементтердің беріктік пен орнықтылығын арттыруда маңызды рөл атқарады. Көптеген есептеу әдістерінде көлденең ығысудың әсері ескерілмейді немесе жуық мәні қабылданады, бұл нәтижелердің дәлдігіне әсер етіп, материалдардың дұрыс пайдаланылмауына немесе құрылымдардың қажетті деңгейде сенімді болмауына әкелуі мүмкін.

Қазіргі кезде жұқа пластиналар немесе жүктеме қарқындылығы жоғары пластиналар үшін көлденең ығысу деформация әсерін есепке алу арқылы олардың кернеулік-деформациялық күйін дәлірек анықтауға мүмкіндік бар. Бұл жұмыс көлденең ығысу деформациясын ескеретін жетілдірілген аналитикалық және сандық әдістерді әзірлеуге бағытталған. Бұл өз кезегінде инженерлік тәжірибеде құрылымдық элементтердің беріктілік және орнықтылық сипаттамаларын сенімді бағалауға жағдай жасайды.

Кирхгоф гипотезаларына негізделген пластинаның классикалық теориясы жұқа пластиналарды есептеу үшін жеткілікті болғанымен заман талабына сай бұл теорияны дәлдеу қажеттілігі пайда болды. Рейсснер мен Миндлин ұсынған бірінші ретті ығысу теориясынан бастап осы уақытқа дейін ұсынылған жоғары ретті ығысу теориялар дәлірек нәтиже көрсеткенімен, теорияларға жаңа тәуелді айнымалылар енетіндіктен есептеу күрделі және ұзақ уақыт алады.

Сондықтан көлденең ығысуды ескеретін дәлденген есептеу теориясының әзірленуі және оны инженерлік есептерде қолдану әдістемесінің жасалуы қазіргі заманғы инженириядағы өзекті мәселе болып табылады.

**Диссертациялық жұмыстың мақсаты:** Көлденең ығысу деформациясын ескере отырып изотропты жұқа пластинаны есептеудің дәлденген теориясының жетілдірілген нұсқасын әзірлеу және оның негізінде пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу әдісін құру.

**Зерттеу міндеттері:**

1. Көлденең ығысу деформациясы ескерілген дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасына сәйкес негізгі болжамдарды тұжырымдау, негізгі шешуші теңдеуді қорытып шығару және көлденең ығысу деформациясын параметр ретінде алу.

2. Пластинаның иілу есебін арқалықтың иілу есебіне келтіру. Цилиндрлік қатаңдық параметрін анықтау.

3. Тікбұрышты жұқа пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеуге арналған айнымалыларды бөлу әдісін құру және арақалық функцияларын қолдану арқылы есептеу алгоритмін әзірлеу.

4. Әртүрлі бекінісі бар пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу. Жетілдірілген әдіс негізінде алынған нәтижелерді классикалық және белгілі дәлденген теориялар нәтижелерімен салыстыру.

**Зерттеу нысаны** – изотропты тікбұрышты жұқа пластина.

**Зерттеу әдістері.** Көлденең ығысу ескерілген дәлденген теорияны жылжу функциясы арқылы жетілдіру, көлденең ығысу ескерілген пластинаның кернеулік-деформациялық күйін зерттеу үшін айнымалыларды бөлу әдісі, ақырлы элементтер әдісі қолданылды, барлық есептеулер MathCAD, Fortran бағдарламасында жүргізілді.

**Зерттеу нәтижесінің теориялық және тәжірибелік маңыздылығы.**

Пластиналарды есептеудің дәлденген теориясы жұқа пластиналардың кернеулік-деформациялық күйін дәлірек сипаттауға мүмкіндік береді. Дәлденген модельдер қауіпсіздікті арттыруға мүмкіндік береді, бұл салмақты, шығындарды және материалды тұтынуды азайтуға әкеледі. Пластиналарды есептеудің ұсынылған теориясы композиттік, анизотропты, көпқабатты материалдарға бейімделуі мүмкін, бұл оны қазіргі заманғы инженерлік тәжірибеде әмбебап құрал етеді. Бұл есептеу теориясы компьютерлік модельдеудің сенімділігін арттыра отырып, сандық әдістермен (ақырлы элементтер әдісі) біріктірілген.

**Жұмыстың ғылыми жаңалығы:**

1. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны есептеудің дәлденген теориясының математикалық моделін құру, көлденең ығысуды параметр түрінде қолдану, пластинаның иілу есебін арқалықтың иілу есебіне цилиндрлік қатаңдық параметрі арқылы келтіру.

2. Ұсынылған жетілдірілген теория негізінде әр түрлі бекінісі бар тікбұрышты пластиналарды қарапайым полиномдар арқылы есептеу әдісін құру.

**Қорғауға ұсынылатын тұжырымдар:**

- Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның дәлденген теориясының жетілдірілген нұсқасының негізгі теңдеулері мен нұсқасын ұсыну. Көлденең ығысуды параметр түрінде ескеру. Негізгі тепе-теңдік теңдеуінің санын бірге төмендетуге болатынын көрсету.

- Айнымалыларды бөлу әдісі мен дайын арқалық функцияларын қолдана отырып тікбұрышты пластинаны есептеудің әмбебап әдісі мен алгоритмі ұсынылады.

- Көлденең ығысуды ескергендегі жетілдірілген дәлденген теориясы ақырлы элементтер әдісімен оңай жүзеге асады.

**Жұмыстың апробациясы:** Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

- әл-Фараби атындағы ҚазҰУ механика-математика факультетінің «Механика» кафедрасының ғылыми семинарларында баяндалып, талқыланды (2020-2024 жж.);

- студенттер мен жас ғалымдардың «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2022»: XVII Халықаралық ғылыми конференциясында, Қазақстан, Нұр-Сұлтан;

- «Фараби әлемі» студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясында, 2023, Қазақстан, Алматы, ұсынылып, нәтижелер баспаға жарияланды.

**Жарияланымдар.** Диссертация мазмұны бойынша 8 жұмыс жарияланды, солардың ішінде халықаралық конференцияларда - 2, Scopus дерекқорында индекстелген журналдарда - 2, ҚР Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынатын журналдарда - 4.

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, төрт тараудан, қорытындыдан, әдебиеттер тізімі мен қосымшадан тұрады.

**Диссертацияның негізгі мазмұны.**

**Жұмыстың кіріспесінде** диссертациялық зерттеу тақырыбының өзектілігі, жұмыстың негізгі мақсаты, зерттеу объектісі, пәні мен әдістері, ғылыми жаңалығы, диссертацияның ғылыми-практикалық маңызы қалыптастырылды.

**Бірінші тарауда** зерттелетін мәселенің қазіргі күйі талданды және көлденең ығысу деформациясын екергендегі дәлденген теория бойынша әдебиеттерге шолу жасалды.

**Екінші тарауда** көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген дәлденген теориясына негізделіп оның математикалық моделі құрылған. Айнымалыларды бөлу әдісіне негізделіп пластинаның классикалық теория бойынша шешімін анықтау жолы ұсынылған және де алынған шешім мен көлденең ығысу параметрі қолданып пластинаның дәлденген теория бойынша шешімі алынған. Сонымен қатар пластинаның шешімін анықтау үшін арқалық функцияларын қолдану реті келтірілген.

**Үшінші тарауда** ақырлы элементтер әдісі бойыншакөлденең ығысу деформациясын ескергендегі изотропты пластинаны есептеу жолы берілген.

**Төртінші тарауда** ұсынылған әдіске мысал ретінде бірқалыпты таралған жүктеме әсер еткенде әртүрлі бекінісі бар пластиналардың иілу есебі шешілген және нәтижелерге салыстыру жасалды. Ақырлы элементтер әдісін қолдануы мысалы ретінде серпімді тірелген пластина, серпімділік негізі бар пластина және тесік ақауы бар пластиналар есептелген.

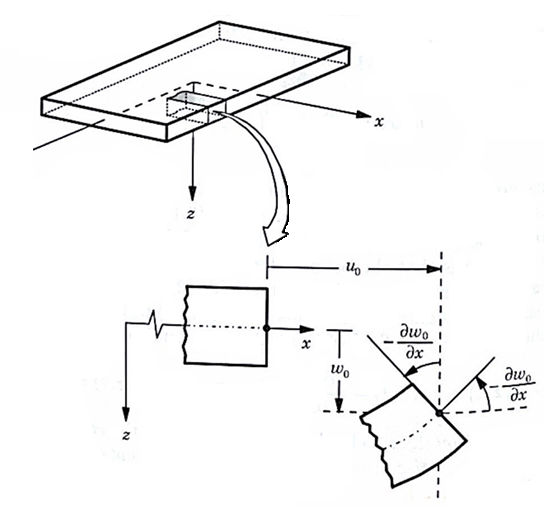
**Қорытындыда** осы диссертациялық жұмыстың барысында алынған нәтижелер бойынша қорытындылар берілген.

# 1 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРетін ДӘЛДЕНГЕН ТЕОРИЯЛАРҒА АРНАЛҒАН зерттеулерге шолу

Пластиналар мен қабықшалар теориясы деформацияланатын қатты дене механикасының негізгі бөлігі болып саналады, себебі пластиналар мен қабықшалар авиа, зымыран, аспап, кеме, ғимарат құрылысы сияқты және т.б. салаларда жиі қолданылатын негізгі элемент. Көлденең ығысу деформация әсері анық байқалатын материалдарды өнеркәсіпте қарқынды қолдану нәтижесінде ғылымда жаңа талдау әдістерін зерттеу мәселесі туындайды. Ал аталған әсерлерді ескермейтін пластиналардың классикалық теориясы талдау және зерттеу үшін жеткіліксіз.

Қарапайым теория болып саналатын пластиналардың классикалық теориясының шығу және даму тарихы екі ғасырдан астам уақытты алып жатыр [[1]](#лит_1), [[2]](#лит_2), [[3]](#лит_3) және Кирхгофтың [[4]](#лит_4) жасаған болжамдарына негізделген соң әдетте оның атымен аталады. Кирхгоф пластиналар теориясын құру үшін екі өлшемді есепке қатысты Бернулли-Эйлердің жазық қималар гипотезасын жалпылайтын гипотезаны алды. Дербес жағдайда пластинаның орта жазықтыққа қатысты нормал элементі пластина иілген кезде түзу сызықты және нормалды болып қалады да, орта жазықтықта деформациялар (созылу, сығылу және ығысу) болмайды деп саналады және  көлденең нормал кернеуі ескерілмейді.

Кирхгофтың бастапқы теориясында Пуассон әсерімен байланысты *w* майысу *z* координатасынан тәуелді деп ескерілді. Кейін Томпсон мен Тэт [[5]](#лит_5) көлденең нормал деформациясы болмайды деп Кирхгофтың гипотезасын толықтырды. Нәтижесінде майысу тек *x, y* координаталарынан тәуелді болды, яғни *w=w(x,y)*. Сонда жылжулар өрісі нөлдік трансверсал деформацияларына сәйкес келеді (сурет 1.1).



Сурет 1.1 ‑ Классикалық теория бойынша пластинаның деформацияланбаған және деформацияланған күйі.

Осы сияқты бұл теорияның әр түрлі қолданбалы түрлерін Love [[6]](#лит_6), Тимошенко мен Войновский-Кригер [[7]](#лит_7), Тимошенко мен Гир [[8]](#лит_8) және т.б. ұсынды.

Алғаш рет көлденең ығысуды ескеру қажеттігі туралы Тимошенко арқалықтың көлденең тербелісі туралы есебіне қатысты көрсетті [[9]](#лит_9). Ал Рейсснер [[10]](#лит_10), [[11]](#лит_11) пластинаның серпімді-статикалық иілуінің жаңа сызықтық теориясын кернеуге негіздеп жасап ұсынды. Ол пластинаның орта сызығына түзусызықты элементінің нормал болу гипотезасынан бас тартып, осы элементтің түзусызықты болып қалу гипотезасын қабылдады. Рейсснер пластинаның қалыңдығы бойынша кернеудің иілу заңын сызықтық түрде береді, ал жанама және нормал көлденең кернеулерін үш өлшемді серпімділік теорияның тепе-теңдік теңдеулерінен анықтайды. Одан соң пластинаның толық энегиясын құрып, Кастильяноның вариациялық принципін қолдана отырып есепті экстремумге шығарады. Белгісіз Лагранж көбейткіштері ретінде алынған шамалар пластинаның көлденең қимасында нормалдың майысуы мен бұрылу бұрыштарын сипаттайтыны анықталды. Рейсснер бойынша пластинасының иілу есебінің фундаменталды дифференциалдық теңдеулерінің жүйесі мына түрде болады:

.  (1.1)

мұндағы кернеу функциясы.

Рейсснердің аппроксимациясына ұқсас Миндлин [[12]](#лит_12) жылжуларға негізделген тәсілді қолданып теория құрды. Миндлин теориясына сәйкес көлденең ығысу пластинаның бүкіл қалыңдығында тұрақты деп есептеледі, бірақ бұл болжам ығысу кернеулері жоқ беттің шарттарын бұзады. Миндлин теориясы көлденең ығысу кернеулері мен ығысу деформациялар арасындағы сәйкесіздікті ығысуды түзетуші коэффициентін қолдану арқылы жуықтап қанағаттандырады. Әдебиетте бұл теорияны пластинаның *бірінші ретті ығысу теориясы* деп атайды, ал бұл әдіспен шығарылатын пластиналарды Рейсснер-Миндлин пластиналары деп атап кеткен.

В.В. Васильев [[13]](#лит_13) жұқа изотропты пластиналардың классикалық теориясына және бірінші ретті ығысу теориясына сыни көзқараспен талдау жасады. В.В. Васильев [[14]](#лит_14) Рейсснер теориясы Кирхгоф теориясын нақтыламайды, ал физикалық тұрғыдан дұрыс болатын пластина теориясына дейін толықтырады деп санайды және оны классикалық теория деп атау керек деп ұсынды. Бұл тұжырымдаманы негіздеу мақсатында төртінші ретті пластиналардың классикалық теориясының физикалық сәйкессіздігін көрсетіп, ал алтыншы ретті теорияның теңдеулері вариациялық есепті қажет етпей дәстүрлі түрде тікелей жолмен қорытылатыны және пластина теориясының математикалық және физикалық тұрғыдан сәйкес болатынын көрсетеді [[15].](#лит_15)

Wang C.M. [[16]](#лит_16) Рейсснер және Миндлин құрған теориялардың айырмашылықтары бар екенін және оларды қосарлана аталуы қате пікір екенін айтады. Екі теорияның арасындағы сапалық айырмашылықтарды көрсету үшін ол Рейсснер мен Миндлин пластиналарының иілу қатынастарының сандық мәндерін анықтады. Бұл қатынастардан алынған Рейсснер пластинасының шешімдерін Salerno мен Goldberg [[17]](#лит_17) Рейсснердің теориясы бойынша пластиналарды тікелей есептеп нәтижелерімен салыстырды, ал Mansfield [[18]](#лит_18) және Lee [[19]](#лит_19) алған нәтижерлерді Кирхгоф және Миндлин пластиналар нәтижелерімен сәйкесінше салыстырды.

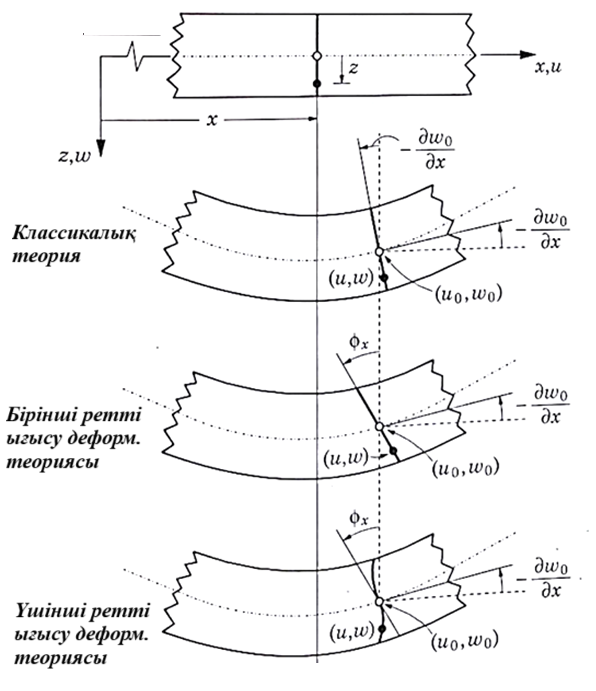
Ортотропты пластиналардың кернеулерге негізделіп жетілдірілген теориясын Medwadowski [[20]](#лит_20) ұсынды. Бұл теорияда сызықтық емес теңдеулер жүйесі серпімділіктің үш өлшемді теориясының сәйкес теңдеулерінен алынды. Теңдеулер жүйесі сызықтық болып, кернеу функциясы қолданылды.

Librescu [[21]](#лит_21) әдісінде теңгерілген көлденең жылжулар қолданылады. Ығысу кернеуі мен ығысу деформациясы арасындағы негізгі қатынастар қанағаттандырылады. Рейсснер тұжырымы Librescu көзқарасының дербес жағдайы болып табылады.

Levinson [[22]](#лит_22) материалдар кедергісін қолданады және оның теориясы Миндлин теориясына қарағанда қосымша түзетуші факторды талап етпейді. Levinson тәсілімен алынған пластина қозғалысының негізгі теңдеулері Миндлин теориясымен бірдей болады, егер Миндлин теориясымен байланысты ығысудың түзетуші коэффициенті 5/6 тең деп қабылданса.

Бірінші ретті деформация теориясының кемшілігі ретінде композиттік пластиналарға қолданғанда ығысуды түзетуші факторын дәл бағалау қиындығы болады. Композиттік пластиналарды талдау үшін Рейсснер [[23]](#лит_23) өзінің бірінші ретті теориясын нақтылады және жоғары ретті ығысу деформациясының теориясын жасады. Бірінші ретті теориямен салыстырғанда жоғары ретті функциялармен сипатталған жылжу өрісі көлденең ығысу деформацияларының қалыңдық бойынша сызықты емес таралуларын дұрыс жуықтай алады. Осы еңбегінің арқасында жоғары ретті ығысу деформациясының бірқатар теориялары әзірленді және көп қабатты композиттік пластиналарды талдауға қолданылды.

Levinson [[22]](#лит_22) және Murthy [[24]](#лит_24) қалыңдық бойындағы жазықтықта жылжуларды кеңейту үшін үшінші ретті көпмүшелерді қолданатын пластиналар теориясын жасады. Алайда Levinson мен Murthy-дің пластиналар теориясында жылжулар кинематикасымен вариациялық үйлеспейтін пластиналардың классикалық теориясының тепе-теңдік теңдеулері қолданылды. Бұл кемшілікті түзету үшін Reddy [[25],](#лит_25) [[26]](#лит_26) пластиналардың вариациялық үйлесетін тепе-теңдік теңдеуі бар теорияны дамытты және де Reddy-дің теориясын анизотропты қабатты композиттік пластиналар үшін қолдануға болады.



Сурет 1.2‑ Классикалық теория, бірінші ретті ығысу теориясы мен үшінші ретті ығысу теориясы бойынша колденең нормалдың деформациясы.

Reddy [[26]](#лит_27) пластинаның үшінші ретті ығысу деформация теориясында түзусызықтық жорамалын алып тастау арқылы кинематикалық гипотезасын одан әрі босаңсытады, яғни деформацияға дейінгі орта жазықтыққа түзу нормаль деформациядан кейін кубтық қисықтарға айналуы мүмкін. (Сурет 1.2). Reddy-дің берілген теорисында жылжу өрісі мына түрде болады:

.  (1.2)

Жылжу өрісі көлденең ығысу деформацияларының (демек, кернеулердің) квадраттық өзгеруіне сәйкес келеді және пластинаның жоғарғы мен төменгі беттерінде көлденең ығысу кернеулерінің жоғалуына әкеледі. Осылайша, үшінші ретті теориядағы ығысуды түзетуші факторды қолдану қажеттілігі туындамайды. Есептеулердің артуына байланысты үшінші ретті ығысу теориясының дәлдігі бірінші ретті ығысу теориясына қарағанда сәл өседі.

Rohwer [[27]](#лит_27) қорытындысы бойынша Murthy мен Reddy-дің пластиналар теориясы барлық жоғары ретті ығысу деформация теорияларының арасында жетекші болып қала береді. Ferreira [[28]](#лит_28) сәйкес Reddy-дің пластиналар теориясы көп қабатты композиттік пластиналарды талдау үшін қолданылатын ең танымал әрі қарапайым жоғары ретті ығысу деформация теориясы болып табылады.

Reddy теориясынан басқа, Амбарцумян [[29]](#лит_29) көп қабатты анизотропты пластиналардың деформациясын түсіндіру үшін көлденең ығысудың басқа кернеу функциясын ұсынды. Амбарцумян теориясы белгілі Рейсснер мен Миндлин теориясының жалғасы болып табылады және көп қабатты композиттік құрылымдарды талдауда кең қолданыс тапты.

Жоғарыда аталған Murthy мен Reddy пластиналар теорияларын басшылыққа алып Shi G. [[30]](#лит_30) пластиналардың жаңа қарапайым үшінші ретті деформация теориясын ұсынды. Shi G. ұсынған теорияда вариациялық үйлесімді басқарушы теңдеулердің жаңа жиынтығын және олармен байланысты дұрыс шекаралық шарттар шығарылды. Shi G. теориясымен алынған аналитикалық шешімдер жоғары ретті ығысу деформация теорияларына қарағанда жақсы нәтиже бере алатынын көрсетті.

Yucheng Liu [[31]](#лит_31) өз жұмысында жетілдірілген жоғары ретті пластиналар теориясын Амбарцумян теориясының негізінде жасайды. Ұсынылған теорияны анизотропты материалдардан жасалған көп қабатты композитті пластиналарды талдауға тікелей қолдануға болады. Сонымен қатар, берілген пластиналар теориясын бұралу мен иілуге жұмыс істейтін қабықшаның ақырлы элементтерін модельдеуіне қолдануға болады.

Сонымен қатар жоғары ретті пластиналар теориясының көлденең ығысу кернеуін тригонометриялық функциялармен сипаттаған Touratier M. [[32],](#лит_32) Soldatos K.P. [[33]](#лит_33), көрсеткіштік функциялармен сипаттаған Karama M. мен т.б. [[34]](#лит_34) және Aydogdu M.[[35]](#лит_35) сияқты басқа зерттеушілерді атауға болады.

Rameshchandra P. Shimpi [[36]](#лит_36), [[37]](#лит_37), [[38]](#лит_36), [[39]](#лит_37) жаңа жетілдірілген пластиналар теориясын дамытып, оның екі қарапайым нұсқасын ұсынды. Бұл теорияның теңдеулері пластинаның классикалық теориясының теңдеулеріне қатты ұқсайды. Дегенмен, одан айырмашылығы бар: көлденең және осьтік жылжулардың иілу және ығысу компоненттері бар деп есептейді, сондықтан иілу компоненттері ығысу күштеріне ықпал етпейді және сол сияқты ығысу компоненттері иілу моменттеріне ықпал етпейді, яғни (иілу компоненті және ығысу компоненті).

Теорияның бірінші нұсқасында вариациялық үйлесімділік сақталады, бірақ шекті тиімділік мүшелерін елемей толық потенциалдық энергияның қарапайымдатылған өрнегі қолданылады. Негізгі теңдеулер мына түрде беріледі

 (1.3)

Екінші нұсқада жалпы тепе-теңдік теңдеуін қолдана отырып негізгі теңдеуді пластинаның классикалық теориясындағы негізгі теңдеу түрінде ұсынады, бірақ көлденең жылжуға емес майысу компонентіне қатысты жазып шығарады:

 (1.4)

Миндлиннің қарапайым ығысу деформация теориясында белгісіз функциялар саны үш болса, бұл теорияда екіге тең болады.

Shimpi [[38]](#лит_38) мақаласында бір айнымалыға тәуелді төртінші ретті дербес туындымен берілген дифференциалдық теңдеу арқылы анықталатын бірінші ретті ығысу деформациясының жаңа теориясын жариялады.

Huu-Tai Thai және т.б. [[40]](#лит_39) өз жұмыстарында Shimpi ұсынған теорияны басшылыққа алып изотропты пластиналар үшін жаңа қарапайым ығысу деформациясының теориясын ұсынады. Бұл теория классикалық пластиналар теориясындағыдай бір белгісіз және бір басқарушы теңдеуден тұрады, бірақ ол ығысу деформациясының әсерлерін дәл ескере алады. Берілген теорияда жылжу өрісі екі айнымалыдан тұратын пластинаның нақтыланған теориясына негізделген және көлденең ығысу иілу және ығысу бөліктерінен тұрады. Үш өлшемді серпімділік теориясының тепе-теңдік теңдеулері негізінде иілу және ығысу бөліктері арасында байланыс орнатылды.

Kedar S. Pakhare [[41]](#лит_39) аз деформацияланатын сызықты серпімді изотропты пластиналардың иілуіне арналған жылжуларға негізделген жаңа бірінші ретті ығысу деформация теориясының екі айнымалы нұсқасын ұсынды. Потенциалдық энергияның стационарлық принципі негізінде негізгі дифференциалдық теңдеулер мен вариациялық сәйкес келетін шекаралық шарттарды алды. Теорияның бұл нұсқасында екі белгісіз функциясы бар бір-бірімен байланысты негізгі екі дифференциалдық теңдеу бар, ал Миндлин теориясында мұндай теңдеу саны үшке тең.



(1.5)



 пластинаның майысу функциясы, бұрылу, ығысудың түзетуші коэффициент 5/6 тең.

Берілген теория бойынша әр түрлі бекінісі бар төртбұрышты изотропты пластинаға біртекті жайылған жүктеме әсер еткенде иілу есебін шешу үшін Леви әдісі қолданылды. Алынған аналитикалық және сандық зерттеулер нәтижелерге бастапқы белгісіз айнымалылардың санын қысқарту елеулі әсер етпейтінін көрсетілген.

Сонымен қазірге кезде дәлденген теориялардың санының көптігене қарамастан оларды жетілдіру қажеттілігі тұр, себебі теорияның реті жоғарлаған сайын тәуелді айнымалылар саны мен шешу теңдеулер саны да артады. Бұл өз кезегінде күрделі және ұзақ есептеулерге алып келеді.

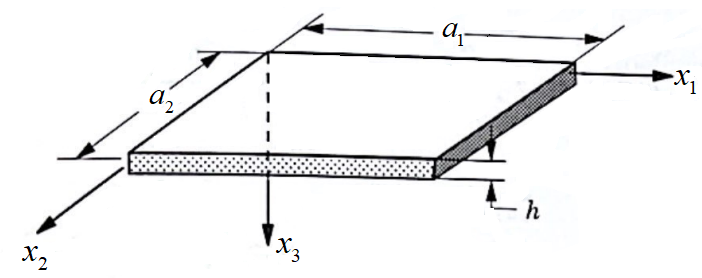
# 2 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны есептеудің жетілдірілген дәлденген теориясы

Берілген бөлімде материалы изотропты жұқа тікбұрышты пластиналардың кернеулік-деформациялық күйін есептейтін жетілдірілген дәлденген теория мен әдісі берілген. Есептеу әдісі көлденең ығысу деформациясы ескерілетін Рейсснер – Миндлин ұсынған болжамдарға негізделген дәлденген теория бойынша жүргізіледі. Әдеттегі шешуші теңдеу санынан қарағанда ұсынылған әдісте шешуші теңдеу саны бірге тең. Есептеу барысында пластина иілуін арқалықтың иілуіне келтіру мақсаты тұр. Бұл үшін пластинаның цилиндрлік қатаңдығын арқалықтың жалпыланған цилиндрлік қатаңдығына алып келу қажет. Берілген есепті шешу үшін Кантарович – Власовтың вариациялық әдісін негізге алынады және арқалықтың иілу теңдеуін пластинаның майысу теңдеуі ретінде қолданылады.

# 2.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген дәлденген теория бойынша пластинаның математикалық моделі

# 2.1.1 Негізгі болжамдар, жылжулар, деформациялар мен кернеулер

Материалы изотропты тікбұрышты пластина үш өлшемді қатты дене ретінде қарастырылады және оған  таралған жүктеме әсер етеді (сурет 2.1). Осы пластинаны  координаттық жүйеде қарастырайық:  - пластинаның  координаттық өстер бойындағы өлшемдері (қабырғаларының ұзындықтары);  -  координаттық өс бойындағы өлшемі (пластинаның қалыңдылығы).  жағдайында жазықтық пластинаның орта (бейтарап) жазықтығы болып табылады. Пластинаның  шеттері әр түрлі бекіністерге ие не бос болуы мүкін.



Сурет 2.1 – Тікбұрышты пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі

Негізгі болжамдарды мына түрде қабылдаймыз:

1. Орта жазықтыққа нормал болатын кез-келген түзусызықты элемент пластина деформацияланған соң түзусызықты және нормал болмайды, оның ұзындығы сақталады және қалыңдық бойымен параболалық заңдылық бойынша өзгереді. Сондықтан  өсімен  өстері арасында ығысу пайда болады және оны келесі заңдылық бойынша өзгеруін қабылдаймыз:



 (2.1)





мұнда  көлденең ығысу деформациясы; көлденең ығысу параметрі;  серпімділік тұрақтылар параметрі; көлденең ығысудың таралу функциясы;  көлденең өлшемсіз координата,  жалпы майысу функциясы;  бойлық модулі;  ығысу модулі.

2. Деформацияланатын элементтің ұзындығы өзгермейтіндіктен  бағытында сызықтық деформация болмайды, яғни

. (2.2)

3. Орта жазықтық деформацияланбайды, яғни ол бейтарап болады және оның жылжулары да

. (2.3)

4. Орта жазықтыққа параллель қабаттарда қысым болмайды. Бұл болжам бойынша  және  кернеулерімен салыстырғанда өте аз болатын  кернеуін ескермеуге болады, яғни

. (2.4)

Бірінші болжам бойынша пластинаның майысу функциясы  координатасынан тәуелсіз болатыны шығады

 (2.5)

сондықтан пластинаның орта жазықтығының майысуларын анықтау жеткілікті.

Бейтарап жазықтық шарттарын ескере отырып ығысу деформация компоненттерін интегралдау арқылы тангенциалдық жылжуларды анықтаймыз



 (2.6)



мұндағы тангенциалдық жылжулардың таралу функциясы.

(2.4) және (2.5) жылжуларды ескере отырып серпімділік теориясының формулалары бойынша деформацияларды мына түрде анықтаймыз:

 (2.7)

(2.7)-де  деформацияларын (2.1), (2.2) болжам бойынша қабылдап аламыз, ал  деформацияларын анықтаймыз.

Пластинаның материалы изотропты болған жағдайда Гуктың жалпы заңдары келесі түрде болады:



 (2.8)



(2.7) деформацияларын (2.8) өрнектерге қойып кернеулер көрсеткіштерін табамыз:



(2.9)



Жоғарыдағы  көлденең нормалдық және жанамалық кернеулер көрсеткіштерін







кернеулік тепе – теңдік теңдеулеріне қойып, оларды интегралдау арқылы келесі кернеулерді аламыз:





 (2.10)







мұнда ,  жанамалық және нормалдық кернеулердің таралу функциялары,  Лаплас операторы.

# 2.1.2 Пластинаның дифференциалдық тепе – теңдік теңдеуі, ішкі күштері

Пластинаның дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін анықтау үшін көлденең нормалдық кернеудің шекаралық шарттарын қолданамыз



мұнда  - пластинаға әсер ететін сыртқы жүктеме.

Осы шартты (2.10) – шы өрнекке енгізу арқылы аламыз



немесе жаңадан белгілеу енгізіп пластинаның дифференциалық тепе-теңдік теңдеуін аламыз

 (2.13)

 (2.13\*)

мұнда  цилиндрлік қатаңдық параметрі.

(2.13) теңдеуге жаңадан белгілеу енгізе отырып пластинаның классикалық теориядағы иілу теңдеунің түріне келтіріп ала аламыз

 (2.14)

 (2.15)

мұнда  ығысу деформациясы ескерілген майысу функциясы,  классикалық теория бойынша майысу функциясы,  пластинаның цилиндрлік қатаңдығы.

 түрінде белгілеп алсақ (2.13)- теңдеуден классикалық түрде жазылады

**** (2.16)

Жылжу компоненттері мен (2.15) теңдік негізінде нормалдардың бұрылу бұрышын анықтауға болады:

****

(2.17)

****

 *x1*  өсіне бағыттас нормальдің бұрылу бұрышы,  *x2*  өсіне бағыттас нормалдың бұрылу бұрышы.

(2.9) кернеулер және (2.15) теңдікті қолдана отырып ішкі күштерді анықтаймыз:







 (2.18)







мұнда  *x1* мен *x2* өстерімен бағытталған иілу моменттері,  аталған өстерге қатысты бұралу моменті,  *x1* мен *x2* өстеріне перпендикуляр көлденең күштер.

 және  көлденең күштер тең болады





егер келесі шарт орындалатын болса:

**** (2.19)

(2.9) және (2.10) кернеулерді (2.18) ішкі күштер арқылы анықтаймыз:



**** (2.20)



мұнда  - тепе-теңдік теңдеулерін, ал  - Гук заңдарын қанағаттандыратын кернеулер.

# 2.1.3 Көлденең ығысу параметрі мен шекаралық шарттар

Көлденең ығысу параметрін анықтау үшін (2.19)-ды (2.15) формулаға қойып түрлендірулер жасаймыз

****

****

****

немесе тұрақтылардың мәндерін қоя отырып келесі түрде аламыз

**** (2.21)

мұндағы **** біртекті теңдеудің меншікті санының квадраты.

(2.13\*) формуласына анықталған (2.21) көлденең ығысу параметрін қойып *g* цилиндрлік қатаңдық параметрін мына түрде жазып аламыз

**** (2.22)

Табылған (2.21) параметрді (2.19) теңдікке қойып жалпы майысу функциясы көлденең ығысу параметрімен байланысты цилиндрлік қатаңдық параметрі мен классикалық теория бойынша майысу функцисының көбейтіндісі ретінде өрнектеп аламыз

**** (2.23)

Көлденең ығысу параметрі классикалық теория бойынша майысу функциядан тәуелді болып, атауына сәйкес қайырма-қайшылыққа әкеп тұр. Бұл қарама-қайшылықтан құтылу үшін  майысу функциясына қатысты келесі теңдеуді қарастырайық:

**** (2.24)

анықталатын меншікті сан.

*k2* меншікті санды анықтау үшін  функциясын мына түрде аламыз

 (2.25)

мұнда  майысудың амплтидулық мәні, *х,у –* өлшемсіз координаталар.

(2.25)-ті (2.24)-ге қойып меншікті санды аламыз



Мына теңдеулер орындалған жағдайда

  (2.26)

берілген меншікті сан мына түрде жазылады

 (2.27)

(2.26) теңдеу үшін шешімді  түрінде әр түрлі бекіністердің шекаралық шарттарын ескере отырып анықтаймыз:

1. Көлденең қима шеттері бекітілген. Бұл жағдайда келесі шарттар орындалады:



 (2.28)



Берілген шекаралық шартта шешім мына түрде болады



2. Бір шеті бекітілген, ал екіншісі бос. Бұл жағдайда келесі шарттар орындалады



 (2.29)



Ал шешім келесі түрде жазылады



3. Көлденең қима шеттері бос болған жағдайда келесі шарттар орындалады



 (2.30)





Есептің шешімі мына түрде болады





(2.28)-(2.30) формулалар негізінде *k1* параметрін мына түрде жазып алуға болады

 (2.31)

мұндағы *і –* нұсқа номері.

Осы сияқты *k2* параметрі үшін жазып аламыз

 (2.32)

мұндағы  нұсқа номері.

(2.27) параметрді (2.31) және (2.32) ескеріп мына түрде жазып аламыз:

 (2.33)

Сонымен, көлденең ығысу деформациясын ескере отырып пластинаның жалпы майысуын есептеу үшін классикалық теорияда белгілі шешімді және көлденең ығысу параметріне тәуелді цилиндрлік қатаңдық параметрін анықтау қажет.

Пластинаның жақтарында  түрлі бекіністерені байланысты шекаралық шарттардың негзігі түрлері келесі болады:

* топсалы тірелгенде

 (2.34)

* қатаң бекітілгенде

 (2.35)

* серпінді тірелгенде

 (2.36)

* бос, яғни байланыстар болмағанда

**** (2.37)

(2.34)-(2.36) шекаралық шарттарды талдау нәтижесінде үшінші шарт бірінші шарттың салдары болатыны шығады. Алайда (2.37) шарт үшін бұлай бірден айтуға болмайды. Сондықтан келесі түрлендірулер жасаймыз.

(2.18) көлденең күшті (2.24) теңдеуді ескере отырып мына түрде жазып аламыз:

****

****

Дифференциалдап және бұралу моментін ескере отырып алатынымыз:



(2.38)

****

Белгілі (2.33) параметр негізінде (2.38)-де бұралу моментін көлденең күш арқылы өрнектеп аламыз

**** (2.39)

мұндағы бірінші өрнек бос шеттегі бұралу моментін *х2* осі бойынша есептегенде қолданылады, ал екінші өрнек *х1* осі үшін.

(2.39) бірінші өрнегін (2.38) қойып, үшінші шарт бірінші шарттың салдары болатынына көз жеткіземіз және бекініссіз шет үшін қолданылатынын ескереміз.

Сонымен, ұсынылған жетілдірілген теорияның басқа теориялардан айырмашылығы есептеу формулалары классикалық теориядағыдай болатындығында. Параметр ретінде өрнектелген көлденең ығысу деформациясын пластинаның классикалық теориясының кез-келген анықталған шешіміне көбейте отырып дәлденген нәтиже алуға болады [42, 43].

# 2.2 Тік бұрышты пластинаны есептеуде айнымалылар бөлу әдісі мен арқалық функцияларын қолдану

# 2.2.1 Пластинаны айнымалылар бөлу әдісі бойынша есептеу

Көлденең ығысу деформациясы ескерілген дәлденген теория бойынша пластинаның кернеулік және деформациялық күйлерін анықтау үшін классикалық теорияда белгілі шешімдерді қолдануға болады.

Классикалық теорияда белгілі пластина иілу есебінің дәл шешімдері тек кейбір дербес жағдайларда алынған, әдетте қалыңдығы тұрақты және конфигурациясы қарапайым болатын, белгілі бір шекаралық шарттарға ие пластиналарға қатысты (Навье әдісі, Леви әдісі). Вариациялық есептеудің тура әдістерін (Ритц әдісі, Бубнов-Галерикин әдісі, Кантарович-Власов әдісі) қолдану арқылы күрделі шекаралық шарттары бар пластинаның иілу есебінің жуық шешімдерін алуға мүмкіндік бар.

Кантарович-Власов әдісі көмегімен дербес туындылары бар теңдеулерден қарапайым дифференциалдық теңдеулерге жуықтап көшуге болады.

Пластинаның классикалық теория бойынша майысу функциясын және көлденең таралған жүктемені мына түрде аламыз:



 (2.40)

мұнда  - максималды майысудың параметрі;  - майысудың көбейткіші; - майысудың өлшемсіз функциясы;  - майысудың нормаланған өлшемсіз арқалық функциялары;  - көлденең таралған жүктеменің максималды қарқындылығы;  - сыртқы жүктеменің өзгері заңы;  - өлшемсіз координаталар.

Пластинаның  бұрылу (көлбеу) бұрыштары келесі түрде анықталады:

 (2.41)



мұнда  - координаттық өстер () бойындағы пластинаның көлденең қимасының бұрылу бұрыштары;

Қисықтықтар  мен бұрылу  табылады:



 (2.42)



мұнда  - координаттық өстер () бойындағы пластинаның талшықтарының майысуын сипаттайтын шамалар;  - олардың осы бағыттардағы бұрылуын сипаттайтын шама.

Иілу () мен бұралу () моменттері анықталады:

, , ,

, , , (2.43)

, , , 

мұнда  - координаттық өстер () бойымен бағытталған иілу моменттері;  - осы бағыттардағы пластинаның талшықтарын бұрайтын момент;  - пластинаның цилиндрлік қатаңдығы және қалыңдылығы; - пластинаның материалының серпімділік модулі мен Пуассон коэффициенті.

Көлденең күштер () табылады:

, , ,

(2.44)

, , ,

мұнда  - координаттық өстерге () перпендикуляр көлденең күштер.

Пластинаның (2.13) тепе-теңдік теңдеуін (2.40) өрнегін қолдана отырып iшкі () және сыртқы () күштердің қарқындылықтарыг мына түрде жазып аламыз:



  (2.45)

мұнда ,  - ішкі және сыртқы күштердің қарқындықтарының таралу функциялары;  - ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері.

Тепе-теңдік шарттарын тексереміз:

* сыртқы және ішкі жүктемелердің теңдігі:



 (2.46)

* cыртқы және ішкі жүктемелердің тең әсерлі күштерінің теңдігі:

 (2.47)

* сыртқы және ішкі жүктемелердің жұмыстарының теңдігі:

 (2.48)

мұнда  - ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштері;  - олардың жұмыстары.

Пластинаның (2.34)-(2.37) шекаралық шарттарына айнымалаларды бөлу әдісін қолданып төмендегі түрге келтіреміз: ( жағдайын қарастырайық)

* топсалы тірелгенде ()



 (2.49)



* қатты бекінген жағындағы ()



 (2.50)



* серпінді тірелген жағындағы ()

 (2.51)







* бос (бекініссіз) жағындағы ()



, (2.52)

.

Тангенциалдық жыжуларды анықтау үшін (2.40)-ты ескере отырып (2.5), (2.6) және (2.23) өрнектерін қолданамыз



 (2.53)

.

(2.20) кернеулерді (2.43), (2,44) ішкі күштер арқылы анықтаймыз:





 (2.54)













# 2.2.2 Пластинаны есептеуде қолданылатын арқалық функциялары

Пластинаны шексіз горизонтал және вертикал жолақ арқалықтардан тұратын жиынтық түрінде қабылдап, сол арқалықтардың белгілі иілім функцияларына негізделіп пластинаны шешімін аналитикалық түрде алуға болады. Пластинаның өлшемсіз майысу функциясын арқалықтардың өлшемсіз иілім функцияларының көбейтіндісі түрінде алып, максималды майысу параметрін сыртқы жүктеме мен ішкі күштердің теңәсерлі күштерінің қатынасы ретінде анықтауға мүмкіндік береді.

Арқалықтардың өлшемсіз иілім функцияларын анықтау үшін көлденең бағытта  және сәйкесінше тік бағытта  теңдеулерін интергаралдап, шекаралық шарттарды ескере отырып табылады.

Пластинаның сыртқы жүктеменің өзгеру (2.20) заңын жазып аламыз:

 (2.55)

мұнда  -  өсі бойынша жүктеменің өзгеру заңы (горизонтал арқалықтың жүктемесінің өзгеру заңы);  -  өсі бойынша жүктеменің өзгеру заңы (вертикал арқалықтың жүктемесінің өзгеру заңы).

Пластинадан горизантал талшығын бөліп алып оның тепе-теңдігін қарастырамыз. Бұл талшықты арқалық ретінде алып, оның тепе-теңдік теңдеуін және интегралдарын мына түрде жазып аламыз:





 (2.56)





мұнда  - төмендегі шекаралық шарттардан анықталатын тұрақтылар.

Берілген (2.47) – (2.50) шекаралық шарттарды (2.40) майысу функциясының өрнегіне қолдану арқылы келесі жағдайлар қарастырылып алынған арқалық иілім функциялары:

1. Екі шеті топсалы бекітілген:



 (2.57)

1. Екі шеті қатты бекітілген арқалық үшін



 (2.58)

1. Статикалық анықталмаған арқалық үшін



 (2.59)

1. Екі шеті бос жағдайда

;

 (2.60)



1. Бір шеті топсалы, екіншісі бос

;

, (2.61)

.

1. Бір шеті қатты бекітілген, екіншісі бос



  ; (2.62)



1. Екі шеті серпімді тірелген



  ; (2.63)



1. Бір шеті топсалы, екіншісі серпімді тірелген



  ; (2.64)



1. Бір шеті қатты бекітілген, ал екіншісі серпімді тірелген



  ; (2.65)



1. Бір шеті серпімді тірелген, ал екіншісі бос



 (2.66)



Алынған функцияларды нормалау қажет, ол үшін максималды майысу пайда болатын координатаны мына шарттан табамыз:

 (2.67)

және майысудың нормаланған функциясын келесі формула бойынша анықтаймыз:

. (2.68)

Пластинаның  бағытында талшықтарының майысу функциясын алу үшін  ауыстыруларын жасау қажет.

Сонымен пластинаның шексіз тік және көлденең арқалықтардың жиынтығы ретінде бейнеленуі иілу пластиналарының есептеулерінде арқалықты иілу мәселелерінің нақты шешімдерін қолдануға мүмкіндік беретінін атап өткен жөн [[44]](#лит_45). Ұсынылған әдістің қолданыстағы әдістерден айырмашылығы – бұл әдістерде функцияны табудың орнына бұл әдісте параметр табылып, қарапайым көпмүшелерде аналитикалық түрде иілу есебінің шешімін алуға мүмкіндік береді. [[45]](#лит_45)

# 2.3 Тік бұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін есептеу алгоритмі

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі тікбұрышты пластинаны есептеудің жетелдірілген әдісінің алгоритмі айнымалыларды бөлу әдісі мен арқалықтардың иілім функцияларын қолдануға негізделіп келесі қадамдарды орындаудан тұрады:

1. Пластинаның геометриясы мен материалын анықтау: пластинаның  ұзындығы,  ені және  биіктігін;  сермпімділік модулі,  Пуассон коэффициентін, ығысу модулін.
2. Айнымалыларды бөлу әдісін қолданып пластинаның классикалық теориясы бойынша (2.40) түрінде шешімді алу қажет. Ол үшін пластинаның шеттеріндегі бекіністерге байланысты (2.47)-(2.50) шекаралық шарттарына ескере отырып белгілі (2.56)-(2.66) арқалықтың өлшемсіз иілім функцияларын *х* және *у* бағыты үшін анықтап аламыз.
3. Біртекті теңдеулердің  меншікті сандары (2.28) – (2.30) бойынша анықталады,  цилиндрлік қатаңдық параметрі (2.22) мен  көлденең ығысу параметрі (2.21) бойынша табылады.
4. Көлденең ығысуды ескергендегі  жылжулар компоненттері (2.53) есептеледі.
5. Пластинаның  ішкі күштері (2.43), (2.44) бойынша анықталады.
6. Пластинаның  кернеулер компонеттері (2.54) бойынша анықталады
7. Пластинаның контурының тік реакциялары және олардың тең әсер күштері, пластинаның контурының толық тік реакциясы текскеріледі.

Осы алгоритм бойынша есептелген пластиналардың мысалдары жұмыстың төртінші бөлімінде беріледі.

Тарау бойынша қорытынды

1. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасы бойынша тікбұрышты пластинаның математикалық моделі құрылды. Көлденең ығысу деформациясы параметр ретінде қабылданды. Пластинаның цилиндрлік қатаңдығын көлденең ығысу деформация параметрімен байланыстырылды, ол арқылы негізгі шешуші теңдеу саны бірге тең болады және классикалық теорияның шешуші теңдеудің формасына ие. Пластинаның дәлденген теориясының шешімін алу үшін классикалық теорияның белгілі шешімін қолданамыз.

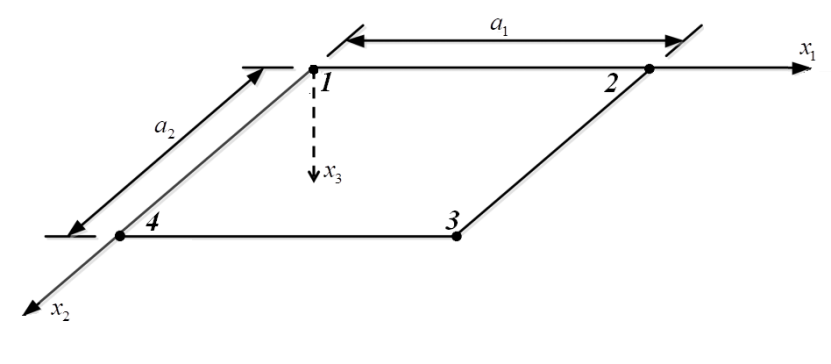
2. Параметр ретінде қарастырылып отырған көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның есептеудің әдісі құрылды. Оның негізінде айнымалыларды бөлу әдісі жатыр. Пластинаны горизантал және вертикал бағытта шексіз жолақ-арқалықтардан тұратын жүйе ретінде алып, арқалықтардың иілім функциялары анықталды. Пластина жақтары топсалы, қатты, серпімді бекіністерге ие және бос болғанда шекаралық шарттарды ескере отырып, арқалықтың иілім функциясының мүмкін болатын 10 нұсқасының шешімі жалпы түрде алынды. Бұл арқылы 55 түрлі бекітілген пластинаны есептеу мүмкіндігі бар.

3. Тікбұрышты пластинаның кернеулік-деформациялық күйін анықтайтын алгоритм жасалды, ол бойынша серпімділік теорияның тепе-теңдік теңдеулері қанағаттандырылады және пластинаның барлық шекаралық шарттары орындалады.

# 3 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ ПЛАСТИНАНЫ Ақырлы элементтер әдісімен есептеу

# 3.1 Изотропты пластинаның иілуіндегі төртбұрышты ақырлы элементі, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы.

Пластинадан төртбұрышты элементті бөліп алып, түйіндерін белгілеп,  координаттар жүйесінде жеке қарастырайық (сурет 3.1).



Сурет 3.1 – Пластинаның төртбұрышты ақырлы элементі

Ақырлы элементтің кез келген түйінінде келесі жылжулар пайда болады: бірінші - түйіннің  өсі бойындағы тік жылжуы , екінші -  өсі бойындағы бұрыштық жылжу , үшінші - осі бойындағы бұрыштық жылжу .

*i* түйінінің жылжу векторын жоғарыдағы жылжуларды ескере отырып, келесі түрде жазамыз:

 (3.1)

Берілген элементтің жылжу векторын (3.1) формуласын қолданып, келесі түрде анықтаймыз:

 (3.2)

Жұқа пластинаның сыртқы күш әсер етпегендегі дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуін қолданып, ақырлы элементтің пішін функциясын анықтаймыз:

 (3.3)

мұнда  - жұқа пластинаның майысу функциясы немесе ақырлы элементтің пішін функциясы деп атаймыз.

Бұл теңдеудің шешімін төртінші дәрежелі толықсыз полином арқылы іздестіреміз:

 (3.4)

коэффициенттерді анықтау үшін берілген элементтің төрт түйінінің жылжулары белгілі деп (3.4) формуласын қолданып шекаралық шарттарды мына түрде жазамыз:













 (3.5)













(3.5) шекаралық шарттарды матрицалық түрде жазуға болады:

 (3.6)

мұнда С - тұрақты белгісіздер алдындағы коэффициенттерден құралған матрица.

(3.6) өрнектен тұрақты белгісіздер векторын кері матрица арқылы табамыз:

 (3.7)

Майысу функциясын (3.4) вектор түрінде анықтаймыз:

 (3.8)

(3.8) теңдеуді (3.7) өрнегіне қолдана отырып, пішін функциясын ақырлы элемент түйіндерінің жылжу векторы арқылы табуға болады:

 (3.9)

Мұнда  транспонирленген координаттық функциялар векторы. Әрбір координаттық функция ақырлы элементтің иілуіндегі пішінін анықтайды.

Сөйтіп, элементтің түйіндерінің жылжулары белгілі болған жағдайда, (3.9) формула бойынша ақырлы элементтің кез келген нүктесінің тік жылжуын анықтауға болады.

Ақырлы элементтің деформациялары, майысу функциясы  арқылы анықталады:



 (3.10)



мұндағы  -сызықтық деформация, бұрыштық деформация.

(3.10) теңдеулерді (3.9) бойынша векторлық түрде жазуға болады:

 (3.11)

мұнда *В* - деформация матрицасы, өлшемі (3x12) -ге тең болады.

Ақырлы элементтің ішкі күштері мына формулалармен анықталады:



 (3.12)



мұнда  цилиндрлік қатаңдығы,  ақырлы элементтің қалыңдығы,  Пуассон коэффициенті,  серпімділік модулі.

Серпімділік матрицасын енгізу арқылы және (3.11) формуласын қолдана отырып ішкі күштер векторын табамыз:

 (3.13)

 (3.14)

мұнда ақырлы элементтің *x* және *y* өстері бойындағы иілу моменттері,  - элементтің бұралу моменті.

Сонымен, майысу функциясы (3.9) белгілі болса, деформацияны (3.11) өрнегі және ішкі күштерді (3.14) арқылы табуға болады.

*Қатаңдық матрицасы және жүк векторы*

Ақырлы элементтің түйіндерінде пайда болатын күштердің векторы мына формула бойынша анықталады:

 (3.15)

мұндағы   түйінінің күштерінің векторы,  жылжуы бойымен бағытталған күш;  бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған момент;  бұрыштық жылжу бойындағы момент.

Ақырлы элементтің түйіндік күштерінің жұмысы былайша анықталады:

 (3.16)

мұнда -элементтің транспонирленген жылжу векторы.

Ішкі күштерден пайда болған жұмысты табамыз:

 (3.17)

мұнда транспонирленген деформация векторы,  ақырлы элементтің ішкі күштерінің векторы, ақырлы элементтің ауданы.

(3.17) формулаға (3.11) және (3.14) теңдіктерін қойып, мына түрге келтіреміз:

 (3.18)

Егер жұмыстар (3.16) және (3.18) бір-біріне тең болған жағдайда, ақырлы элемент тепе-теңдікте болады:

 (3.19)

мұнда  ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы.

Ақырлы элементке сыртқы таралған күштер  әсер етсе, күштер жұмысы былайша табылады:

 (3.20)

мұнда -жүк векторы, -сыртқы күштер қарқындылығы.

Төртбұрышты ақырлы элементтің майысу функциясының нақты түрін алатын әдісті қарастырайық. Қарастырылатын элементтің майысу функциясын мына түрде іздейміз:

 (3.21)

мұнда  өлшемсіз координаталар,  тұрақты белгісіздер,   өстерінің бойындағы арқалықтардың иілуіндегі координаттық функциялар.

Арқалықтардың иілуіндегі координаттық функциялар [[48, 52]](#лит_46) арқылы табылады:

 (3.22)

Функциялар  (3.22) өрнектен  алмастыру арқылы анықталады.

Ақырлы элементтің түйіндеріндегі шекаралық шарттарды қарастырайық:



 (3.23)





(3.21) теңдеуін қолдана отырып, тұрақты белгісіздерді табамыз:



 (3.24)





Ақырлы элементтің дифференциалдық тепе-теңдік теңдеуі  (3.21) формуласын ескергенде мына түрде жазылады:

 (3.25)

мұндағы  және  - және  - функциялардың екінші ретті туындылары.

(3.25) теңдеуді ақырлы элементтің әрбір түйініне қолданайық:

 (3.26)

(3.26) пайдалану арқылы мынандай теңдеулер аламыз:



 (3.27)





Мұндағы бос мүшелер былайша анықталады:

 (3.28)

(3.27) теңдеулер жүйесін шешіп қалған тұрақты белгісіздерді табамыз:



 (3.29)





Табылған белгісіздерді (3.24) және (3.29) майысу функциясына (3.21) қойып, оны векторлық түрде анықтаймыз:

 (3.30)

мұнда  -пластинаның координаттық функцияларының транспонирленген векторы, -түйін жылжуларының векторы.

Пластинаның координаттық функцияларының нақты түрлері былайша табылады:











 (3.31)













(3.21) формуладағы функциялар, арқалықтың иілуі мен біліктің бұралуындағы координаттық функциялар арқылы өрнектелген.

Жылжу функциясын және оның туындыларын былайша табамыз:





 (3.32)





Ақырлы элементте пайда болатын ішкі күштерді векторлық түрде анықтайық:





 (3.33)





мұнда  - және  өстерінің бойымен бағытталған иілу моменттері, -бұралу моменті, - және  өстері бойынша көлденең күштер, -Лаплас операторы, -Пуассон коэффициенті, -ақырлы элементтің цилиндрлік қатаңдығы және серпімділік модулі.

Ішкі күштердің ақырлы элементте таралу функциялары былайша табылады:





 (3.34)





(3.32)–ші майысу функциясы мен (3.33)-ші ішкі күштердің мәндерін қолдана отырып, ақырлы элементтің жақтарындағы ішкі күштердің жұмыстарын анықтауға болады:

 жақтары



 жақтары



 жақтары (3.35)



 жақтары



Ақырлы элементтің жақтарындағы ішкі күштердің жалпы жұмысы былайша анықталады:

 (3.36)

мұнда –ақырлы элементтің қатаңдық матрицасы , яғни ол 12 жол және 12 бағанадан тұрады. Оның элементтерінің мәндері координаттық функциялардан (3.31) және олардың туындыларынан тәуелді болады.

Ақырлы элементтің түйіндері бекіністерден босаған жағдайда, оның реакцияларының жұмысын былайша анықтауға болады:

 (3.37)

 (3.37)

мұндағы мысалы -тік жылжуы бойымен бағытталған реакция, -үшінші түйіннің  бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған реакция, -төртінші түйіннің  бұрыштық жылжуы бойымен бағытталған реакция.

Ақырлы элемент тепе-теңдікте болуы себебінен жұмыстар тең екендігі белгілі . Осы жұмыстардың өрнектерін (3.36) және (3.37) қолдана отырып, ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін анықтауға болады:

 (3.38)

(3.31) координаттық функцияларды қолдана отырып, (3.35) формула бойынша қатаңдық матрицасының элементтерін анықтаймыз :























 (3.39)

****

****

















(3.20) формула арқылы  және координаттық функциялардың мәндерін (3.31) ескеріп, сыртқы жүктер векторын анықтаймыз:

 (3.40)

Сонымен, ақырлы элементтің жақтарының ішкі күштерінің жұмыстарын қолдана отырып, ақырлы элементтің қатаңдық матрицасын табуға болады. (3.38) негізгі тәуелділігін қолдана отырып, кез келген төртбұрышты пластинаның иілу есептерін кез келген сыртқы жүктер түскенде және қырларындағы шарттар қойылғанда анықтауға болады.

# 3.2 Көлденең ығысуды ескергендегі пластинаның ақырлы элементінің пішін функциясы, қатаңдық матрицасы мен жүк векторы

Классикалық теория бойынша төртбұрышты пластинаны есептегенде көлденең ығысу деформациясы ескерілмейді. Көлденең ығысу деформациясын ескеру дәлденген теориялардың негізіне жатады және ол жаңа функция арқылы сипатталады.

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі мен қатаңдық матрицасын анықтау үшін [[44, 45]](#лит_44) жұмыстарында алынған нәтижелерді қолданамыз. Пластинаның классикалық теориясында қолданылатын жалпыланған көлденең күштер төмендегі түрде анықталған:



(3.41)



Майысу функциясының мәнін (3.30) қолданып, көлденең күштердің формулаларын (3.41) ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулары арқылы өрнектеп аламыз :

 (3.42)

 (3.43)

(3.42) және (3.43) көлденең күштері классикалық емес теория бойынша әдебиеттерде былайша анықталады:

 (3.44)

мұндағы -көлденең ығысудан пайда болатын бұрыштар,  -көлденең ығысу деформациясының өзгеру заңдылығына тәуелді параметр (тұрақты болғанда , парабола бойынша өзгергенде ), - ақырлы элементтің көлденең ығысу қатаңдығы.

Көлденең ығысу бұрыштарын табу үшін жаңа белгісіздерді енгіземіз:

  (3.45)

(3.45) өрнектегі белгісіздерді ескеріп, (3.42) және (3.43) көлденең күштерін келесі түрде жазамыз:



(3.46)



(3.46) теңдеулердің сол жақтарына көлденең ығысу бұрыштарын (3.44) енгізіп, төмендегі белгісіздерді табамыз:



(3.47)



Ықшамдау арқылы оларды келесі түрде жазуға болады:



(3.48)



Келесі параметрлерді енгізіп, (3.48)-ші формуладан көлденең ығысу бұрыштарын табамыз:

 (3.49)

 (3.49)

 (3.50)

Ақырлы элементтің майысу функциясын табу үшін (3.30) формуланы жаңа белгісіздер (3.45) бойынша анықтауға болады:

 (3.51)

мұнда  көлденең ығысуды ескермегендегі координаттық функциялар,  көлденең ығысу деформациясын ескергендігі түйіндік жылжулар.

Көлденең ығысу бұрыштарын (3.50) ескеріп, (3.51) формуладан ақырлы элементтің майысу функциясын аламыз:

 (3.52)

мұнда  ақырлы элементтің көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функциялар.

Көлденең ығысуын ескергендегі координаттық функциялар былайша болады:













 (3.53)











Осы өрнектен  жағдайда (3.31) өрнегіндегі нәтиже алынады.

Қорыта келе, көлденең ығысу деформациясы негізгі параметрлер (3.49) арқылы ескеріледі. Әдебиеттерде көлденең ығысу деформациясын ескергенде ақырлы элементтің белгісіздер саны 16-ға тең болса, ұсынылып отырған әдісте олар 12-ге тең болады. Анықталған майысу функциясы белгілі координаттық функциялар  бойынша табылады.

*Көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасы және жүк векторы*

Классикалық теория бойынша төртбұрышты пластинадан бөлініп алынған ақырлы элементтің қатаңдық матрицасын қолданып, пластинаның көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасын анықтауға болады. Ол үшін төртбұрышты ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін (3.38) қолданамыз.

Тәуелділіктің - ші жолын жазайық:

 (3.54)

Ескі белгісіздерді жаңа белгісіздермен (3.45) алмастырып, (3.54)-ті төмендегі түрге келтіруге болады:

 (3.55)

(50)-ші көлденең ығысу бұрыштарының мәндерін, (55)-ші өрнекке қойып, ұқсас мүшелерін жинақтап, осы өрнекті мына түрде жазамыз:

 (3.56)

Пластинаның ақырлы элементінің қатаңдық матрицасының элементтері көлденең ығысу ескергенде мына формулалармен анықталады:



 (3.57)







(3.39)-шы қатаңдық матрицаның элементтерін (3.57)-ші формулаларға қойып, мынандай нәтижелерді анықтаймыз:



 (3.58)





Жүк векторының мәндерін анықтау үшін (3.40) формуласын қолданып, жұмысты табамыз:

 (3.59)

Ескі белгісіздерді жаңа белгісіздермен (3.45) ауыстырып, (3.59)-ды мына түрге келтіреміз:

 (3.60)

(3.60) өрнектен транспонирленген жылжу векторының көбейту құраушыларын анықтаймыз. Ол вектор (3.40) формуласына тең болады.

Сөйтіп, көлденең ығысу деформациясы (3.49) формулалары бойынша табылып, параметрлер арқылы ескеріледі. Бұл параметрлер тек қатаңдық матрицасына әсері болады, ал жүк векторына ешқандай әсерін тигізбейді. [[46, 47]](#лит_46)

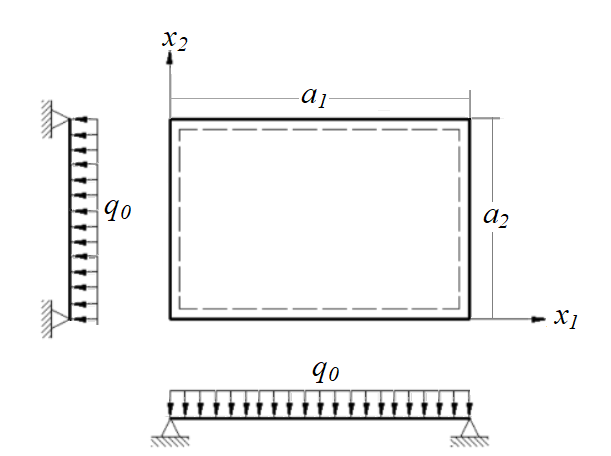
Қорытындылай келе, классикалық теорияда қарастырылмайтын көлденең ығысу деформациясы, ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей ақ ескерілді. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның ақырлы элементі және қатаңдық матрицасы табылды. Шешуші теңдеулер жүйесі толығымен автоматтандырылды.

# 4 КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ Тікбұрышты пластинаЛАРДЫҢ иілуін есептеу

Берілген тарауда бірінші тарауда ұсынылған жетілдірілген әдісін іске асыру мысалы ретінде жақтары әр түрлі бекінген не бос болатын тікбұрышты пластиналардың біртекті таралған жүктеме әсерінен майысуын, кернеулік-деформациялық күйін анықтау есептері беріледі.

# 4.1 Таралған жүктеме әсер еткенде барлық жақтары топсалы тірелген пластинаның иілуі

 координаттық жүйеде изотропты тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның  жақтары топсалы тірелген, ал жоғарғы бетіне бірқалыпты таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.1.1).



Сурет 4.1.1 – Тікбұрышты пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі.

2.3 бөлімде берілген алгоритмге сәйкес алдымен пластинаның классикалық теория бойынша шешімін (2.40) түрінде тауып аламыз.

Горизонтал және вертикал бағытта арқалықтардың өлшемсіз нормаланған иілім функцияларын (2.57), (2.67), (2.68) өрнектерінен сыртқы жүктеменің таралау заңы  болған жағдайда анықталып мына түрде жазылады [[48]](#лит_46):

 (4.1)

мұндағы .

 өлшемсіз функциясының туындаларын анықтаймыз:

























Ішкі күштердің таралу функциялары табамыз:



Барлық жағы топласалы тірелгенде пластинаның (2.47) шекаралық шарттары қанағаттандырылатыны текскеріледі:

-  немесе  жағында:













-  немесе  жақтарда

,











Майысудың үлкенін мәнін сыртқы және ішкі жүктемелердің жұмыстарының теңдігінен анықталады. Ол үшін (2.45)бойынша ішкі () және сыртқы () күштердің қарқындылықтары анықталады:









мұнда  ішкі және сыртқы күштердің тең әсерлі күштерінің жұмыстары;

Көлденең қима шеттері бекітілген жағдайда (2.28) сәйкес, (2.31), (2.32), (2.33) параметрлер анықталады:



(2.22) бойынша  цилиндрлік қатаңдың параметрін есептеледі, (2.21) бойынша  көлденең ығысу параметрі анықталады.

****

****

Көлденең ығысуды ескергендегі жылжулар компоненттері (2.53) жалпы майысу функциясын қолдана отырып төмендегідей анықталады



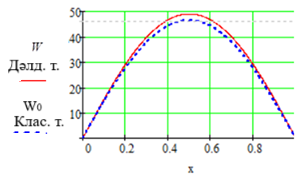




|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Сурет 4.1.2 – Квадрат пластинаның *W* көлденең майысуының изоклинасы мен эпюрасы ().

Майысудың максималды мәні пластинаның  нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.2).  арқылы өлшемсіз майысу айнымалысын белгілеп аламыз. Пластинаның ортасында классикалық теория бойынша максималды өлшемсіз майысу мәні 0,4137  тең, ал көлденең ығысуды ескергенде максималды майысу мәні 0,4354  тең болады. Классикалық теорияның мәні 5% дәлденеді.



Сурет 4.1.3 – Квадрат пластинаның *W, W0* көлденең майысулары

(2.18), (2.43) өрнектерін қолдана отырып пластинаның моменттері табылады.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Сурет 4.4 – Квадрат пластинаның *М1* моментінің изоклинасы мен эпюрасы ().

Горизантал бағытта *М1* моменті:



вертикал бағытта *М2* моменті:



*М1* және*М2* үшін максималды мән пластинаның  нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.4) және бірдей өлшемсіз мәнге ие *М1 = М2* *=*0,04964.

Бұралу моменті келесі түрде табылады:



оның максималды мәні 0,0318 тең және (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) пластинаның төбелерінде симметриялы болады.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Сурет 4.1.5 – Квадрат пластинаның *М12* бұралу моментінің изоклинасы мен эпюрасы ().

(2.18), (2.44) өрнектерін қолдана отырып пластинаның көлденең күштері анықталады:

- горизонтал бағытта



- вертикал бағытта



*Q1, Q2* үшін максималды мән пластинаның сәйкесінше  және  нүктесінде пайда болады (сурет 4.1.6, 4.1.7) және бірдей өлшемсіз мәнге ие *Q1 = Q2* *=*0,0286.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Сурет 4.1.6 – Квадрат пластинаның *Q1* көлденең күші ().

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Сурет 4.1.7 – Квадрат пластинаның  *Q2* көлденең күші ().

Пластинаның кернеулер компонеттерін (2.54) бойынша анықтаймыз, максималды нормал кернеулердің есептеу нәтижелері, максималды жанама кернеулердің графиктері сурет 4.1.8-4.1.13 келтірілген. Нормал және жанама кернеулердің өлшемсіз түрлерінің мәндері келесі түрде қолданылады

, , , , .

Көлденең және тік бағытта нормал кернеулердің мәні бірдей болады және өлшемсіз мәні  тең. Жанама кернеулерлердің максималды өлшемсіз мәндері  тең болады: , , .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Сурет 4.1.8 – Квадрат пластинаның нормал кернеулердің максималды мәндер графигі (). | Сурет 4.1.9 – Квадрат пластинаның нормал кернеулердің максималды мәндер графигі (). |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Сурет 4.1.10 – Квадрат пластинаның жанама кернеулердің максималды мәндер графигі (). | Сурет 4.1.11 – Квадрат пластинаның жанама кернеулердің максималды мәндер графигі (). |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| Сурет 4.1.12 – Квадрат пластинаның жанама кернеулердің максималды мәндер графигі (). | Сурет 4.1.13 – Квадрат пластинаның, , кернеулерінің биіктік бойынша (0, 0,5) нүктесінде өзгеруі |

Кесте 4.1 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі майысуы мен кернеулері

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  | |
| Классикалық теория | | | | | | | |
|  | 0,4062 | 0,2762 | 0,2762 | 0,2085 |  | - | |
| I ретті ығысу теориясы (Reddy) | | | | | | | |
| 10 | 0,4259 | 0,2762 | 0,2762 | 0,2085 | 0,3927 | | 0,3927 |
| 20 | 0,4111 | 0,2762 | 0,2762 | 0,2085 | 0,3927 | | 0,3927 |
| 50 | 0,407 | 0,2762 | 0,2762 | 0,2085 | 0,3927 | | 0,3927 |
| 100 | 0,406 | 0,2762 | 0,2762 | 0,2085 | 0,3927 | | 0,3927 |
| Ұсынылған әдіс | | | | | | | |
| 10 | 0,4354 (*2,18%*) | 0,3005 (*4,39%*) | 0,3005 (*4,39%*) | 0,1923 (*1,20%*) | 0,4279 (*8,23%*) | | 0,4279 (*8,23%*) |
| 20 | 0,4191 (*1,91%*) | 0,2985 (*7,47%*) | 0,2985 (*7,47%*) | 0,1911 (*9,11%*) | 0,4276 (*8,16%*) | | 0,4276 (*8,16%*) |
| 50 | 0,4146 (*1,83%*) | 0,2979 (*7,28%*) | 0,2979 (*7,28%*) | 0,1977 (*5,46%*) | 0,4287 (*8,40%*) | | 0,4287 (*8,40%*) |
| 100 | 0,4139 (*1,91%*) | 0,2979 (*3,56%*) | 0,2979 (*3,56%*) | 0,1907 (*2,05%*) | 0,4289 (*8,44%*) | | 0,4289 (*8,44%*) |

Кесте 4.1 біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі жетілдірілген әдіс бойынша және пластинаның бірінші ретті ығысу теориясы бойынша Reddy [[49]](#лит_43) алған максималды өлшемсіз майысу, өлшемсіз нормал және жанама кернеулердің мәндері, классикалық теория бойынша мәндер келтіріледі. Пластинаның классикалық теориясында өлшемсіз шамалар пластина жақтары мен биіктігінің қатынасына тәуелді емес. Бірінші ретті ығысу теориясында көлденең кернеулер *х3* немесе *z* координатсынан тәуелді болмайды, яғни биіктік бойынша тұрақты болады. Нәтижесінде көлденең ығысудың әсері майсудың өсуіне алып келеді. Ал ұсынылған әдіс бойынша көлденең кернеулер *х3* немесе *z* координатсынан тәуелді болады, сондықтан олардың мәні пластинаның қалыңдығы өскен сайын өзгеріп отырады.

Пластинаның классикалық теориясы, бірінші ретті ығысу теориясы мен ұсынылған әдіс бойынша алынған майысулардың айырмашылық графигі сурет 4.1.14 көрсетілген.



Сурет 4.1.14 – Топсалы тірелген квадрат пластинаның ұзындық пен биіктік қатынасына байланысты өлшемсіз майысулардың өзгеру графигі

4.2-кестеде пластинаның орта нүктедегі майысудың ұсынылған әдіс бойынша алынған өлшемсіз мәндері, Shimpi алған классикалық теория бойынша, Mindlin-нің бірінші ретті ығысу теориясы бойынша, Shimpi мен Pachare ұсынған бірінші ретті ығысу теориясының жаңа нұсқасы бойынша алынған өлшемсіз мәндері берілген. Пластина пішіні квадратты, материалы изотропты, Пуассон коэффициенті *v=*0,3 тең және біртекті таралған жүктеме әсерінен майысады.

Кесте 4.2 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Теориялар | *h/a1*=0,01 | *h/a1*=0,05 | *h/a1*=0,1 | *h/a1*=0,2 |
| Ұсынылған әдіс | 0,00414 | 0,00419 | 0,00437 | 0,00507 |
| Shimpi бойынша классикалық теория [[39]](#лит_37) | 0,00406 *(1,93% )* | 0,00406  *(3,10%)* | 0,00406  *(2,29%)* | 0,00406  *(19,92%)* |
| Mindlin пластина теориясы [[50]](#лит_39) | 0,00406  *(1,93%)* | 0,00411  *(1,91%)* | 0,00427  *(2,29%)* | 0,0049  *(3,35%)* |
| Shimpi бойынша  бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [[39]](#лит_37) | 0,00407  *(1,69%)* | 0,00412  *(1,67%)* | 0,00426  *(2,52%)* | 0,0049  *(3,35%)* |
| Pachare бойынша  бірінші ретті ығысу теориясы [[42]](#лит_37) | 0,00406  *(1,93%)* | 0,00411  *(1,91%)* | 0,00427  *(2,29%)* | 0,0049  *(3,35%)* |

Алынған нәтижелерден ұсынылған әдістің ұқсас бірінші ретті ығысу теорияларға қарағанда салыстырмалы қателегі 3,35*%* аспайтынын көреміз. 4.2 кестеге сәйкес топсалы тірелген квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеру графигі сурет 4.1.15 берілген.



Сурет 4.1.15 – Топсалы тірелген квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

Пластинаның тік реакциялары және олардың теңгеруші күштері анықтмаймыз:











Пластинаның контурының толық реакциясы





Сонымен, біртекті таралған жүктеме әсерінен топсалы тірелген пластинаның кернеулік және деформациялық күйі көлденең ығысу деформациясын ескеру арқылы кешенді түрде зерттелді. Пластинаның майысу функциясы арқалықтардың иілу функциялары негізінде анықталды. Есептеу нәтижелері көрсеткендей, көлденең ығысу деформациясын ескерген жағдайда, пластинадағы жылжулардың артуы байқалады, ал жанама кернеулердің шамасы азаяды. Ұсынылған әдіс арқылы алынған нәтижелер әдебиеттегі дәлелденген теориялық шешімдермен салыстырылып, олардың өзара сәйкестігі негізінде әдістің дұрыстығы мен тиімділігі дәлелденді.

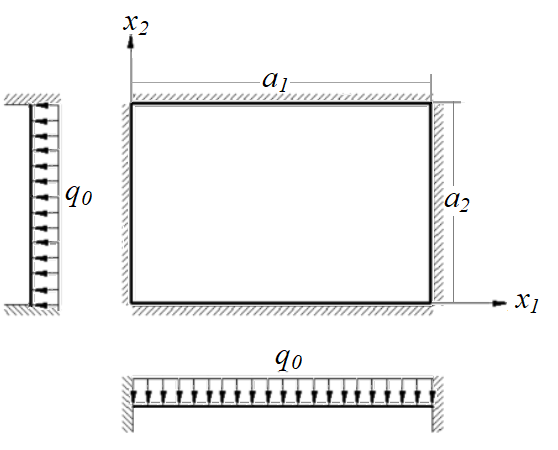
# 4.2 Әртүрлі бекінісі бар пластиналардың таралған жүктеме әсерінен иілуі

Бұл тармақта қарастырылатын есептердің шығару реті 2.3 тармақта берілген есептеу алгоритмі бойынша жүргізіледі және жоғарыда келтілірлген мысалда толық ашып жазылғандықтан жұмысты ықшамдау үшін қысқаша түрде сипатталатып, негізгі мәндер ғана берілетін болады. Барлық есептеулер

MathCAD бағдарламалық пакетте орындалды.

# 4.2.1 Контуры қатты бекітілген пластинаның иілуі

 координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның  жақтары қатты бекітілген болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.1). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



Сурет 4.2.1 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның геометриясы мен координаттық жүйесі.

Алгоритмге сәйкес алдымен пластинаның классикалық теория бойынша шешімін (2.40) түрінде тауып аламыз.

Горизонтал және вертикал бағытта арқалықтардың өлшемсіз нормаланған иілім функцияларын (2.58), (2.67), (2.68) өрнектерінен сыртқы жүктеменің таралау заңы  болған жағдайда анықталып мына түрде жазылады [[51]](#лит_46):



мұндағы .

 өлшемсіз функциясының туындаларын және ішкі күштердің таралуын анықтаймыз. Көлденең қима шеттері қатты бекітілген жағдайда (2.28) сәйкес, (2.31), (2.32), (2.33) параметрлер анықталады:



(2.22) бойынша  цилиндрлік қатаңдың параметрін есептеледі, (2.21) бойынша  көлденең ығысу параметрі анықталады.

****

****

Қатты бекінген пластинаның көлденең иілуі кезінде максималды мән пластина центрінде пайда болады, ал ең үлкен иілу моменті бекітілген шетінің ортасында (сурет 4.2.2, 4.2.3).

Изотропты квадрат пластинаның максималды майысу мәндері ұсынылған теория бойынша , классикалық теория бойынша [[52]](#лит_53)  мен Reddy бойынша  [[49]](#лит_43) тең болады. Бұдан ұсынылған теориямен алынған мән Reddy дәлденген теориясының мәніне өте ұқсас екенін көреміз. Кесте 4.2.1-де ал С.П. Тимошенко әдісі бойынша пластина ортасыда пайда болатын максималды мәндері беріледі және арқалық функцияларымен анықталған майысу мәндерінің салыстырмалы айырмашылығы берілген.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *а)изоклина* | *ә)эпюра* |
| Сурет 4.2.2 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның майысуның а) изоклинасы мен ә) эпюрасы. | |

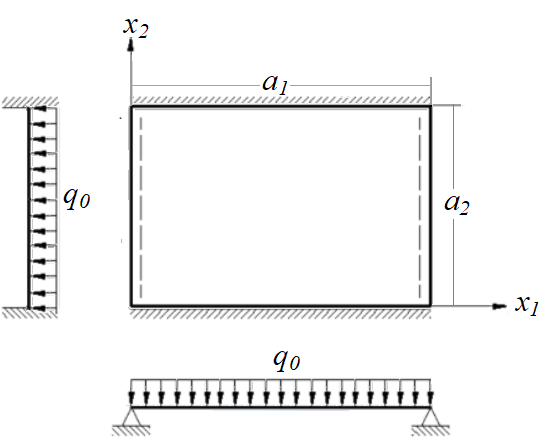
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| *а)изоклина* | *ә)эпюра* |
| Сурет 4.2.3 – Барлық жақтары қатты бекітілген квадрат пластинаның иілу моментерінің а) изоклинасы () мен ә) эпюрасы (). | |

Кесте 4.2.1 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде контуры қатты бекітілген квадрат пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі майысуы мен классикалық теория бойынша майысу мәндері

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Ұсынылған теория | Классикалық теория |  |
| 1 | 0,00133 | 0,00126 | 5,26% |
| 1,1 | 0,00159 | 0,00150 | 5,66% |
| 1,2 | 0,00182 | 0,00172 | 5,49% |
| 1,3 | 0,00203 | 0,00191 | 5,91% |
| 1,4 | 0,00220 | 0,00207 | 5,91% |
| 1,5 | 0,00236 | 0,00220 | 6,78% |
| 1,6 | 0,00249 | 0,00230 | 7,63% |
| 1,7 | 0,00259 | 0,00238 | 8,11% |
| 1,8 | 0,00269 | 0,00245 | 8,92% |
| 1,9 | 0,00277 | 0,00249 | 10,11% |
| 2 | 0,00284 | 0,00254 | 10,56% |

# 4.2.2 Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластинаның иілуі

Қабырғаларының ұзындығы , ал қалыңдығы  болатын пластинаны  координаттық жүйеде қарастырайық. Пластинаның қарама-қарсы жақтары топсалы тірелген және қатаң бекітілген болсын және оған қарқындылығы біртекті жүктеме әсер етсін. (сурет 4.3). Пластина материалы изотропты және біртекті.



Сурет 4.3 - Қарама-қарсы екі жағы топсалы тірелген және екі жағы қатты бекітілген пластина

Пластинаның өлшемсіз майысу функциясы (2.59) бойынша мына түрде алынады.



 және пластина квадраттық болғанда: (2.22) бойынша цилиндрлік қатаңдың параметрі  мен (2.21) бойынша көлденең ығысу параметрі  болады.

Максималды майысу мәнінің көрсеткіші .

Изотропты квадрат пластинаның максималды майысу, иілу моменттерінің мәндері ұсынылған теория бойынша

,





Reddy бойынша [[49]](#лит_43)

,



.

Бұдан ұсынылған теориямен алынған мәндер мен Reddy дәлденген теориясының мәндері арасындағы майысу бойынша алшақтық 1,36%. құрайды, ал моменттерінің алшақтығы 2-7%.

Кесте 4.2.2-де Shimpi және Pachare ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі, ал сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

Кесте 4.2.2 - Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

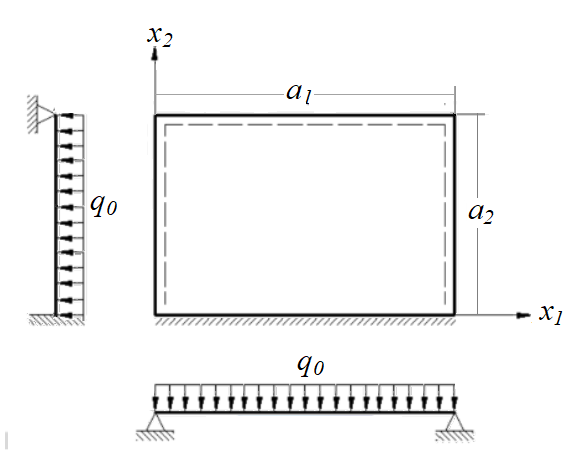
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Теориялар |  | | | |
| *0,01* | *0,05* | *0,10* | *0,20* |
| Ұсынылған әдіс | 0,00199 | 0,00202 | 0,00210 | 0,00244 |
| Shimpi бойынша классикалық теория [[39]](#лит_37) | 0,00192 (3,52%) | 0,00192 (4,95%) | 0,00192 (8,57%) | 0,00192 (21,31%) |
| Mindlin пластина теориясы [[50]](#лит_39) | 0,00192 (3,52%) | 0,00199 (1,49%) | 0,00221 (5,24%) | 0,00302 (23,77%) |
| Shimpi бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [[39]](#лит_37) | 0,00192 (3,52%) | 0,00199 (1,49%) | 0,00222 (5,71%) | 0,00308 (26,23%) |
| Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [[41]](#лит_37) | 0,00192 (3,52%) | 0,00197 (2,48%) | 0,00213 (1,43%) | 0,00276 (13,11%) |



Сурет 4.2.4 –Әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

# 4.2.3 Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластинаның иілуі

 координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның  жақтары топсалы және  қатты бекітілген болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.1). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



Сурет 4.2.3 - Үш шеті топсалы тірелген және бір шеті қатты бекітілген пластина

Пластинаның өлшемсіз майысу функциясы (2.57), (2.59) формула бойынша анықталады:



 және пластина квадраттық болғанда: (2.22) бойынша цилиндрлік қатаңдың параметрі  мен (2.21) бойынша көлденең ығысу параметрі . Максималды майысу мәнінің көрсеткіші  .

Кесте 4.2.3 –те Тимошенко бойынша классикалық теория, Shimpi және Pachare, Zenkour ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі,

Сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

Кесте 4.2.3 – Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

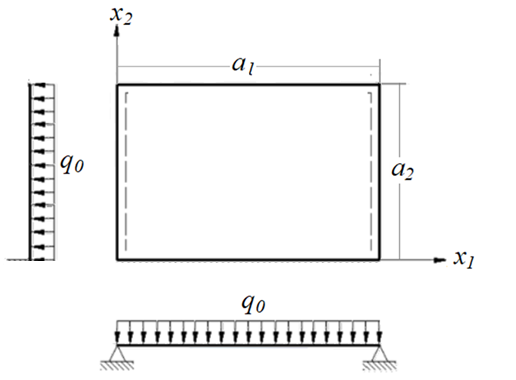
|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Теориялар |  | | | |
| *0,001* | *0,04* | *0,10* | *0,20* |
| Ұсынылған теория | 0,00282 | 0,00284 | 0,00298 | 0,00345 |
| Классикалық теория [[52]](#лит_37) | 0,00279  *(1,06%)* | 0,00279  *(1,76%)* | 0,00279  *(6,38%)* | 0,00279  *(19,13%)* |
| Zenkour бойынша ығысу теориясы [[53]](#лит_37) | 0,00279  *(1,06%)* | 0,00283  *(0,35%)* | 0,00306  *(2,68%)* | 0,00383  *(11,01%)* |
| Shimpi бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [[39]](#лит_37) | 0,00279  *(1,06%)* | 0,00283  *(0,35%)* | 0,00307  *(3,02%)* | 0,00387  *(12,17%)* |
| Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [[41]](#лит_37) | 0,00279  *(1,06%)* | 0,00282  *(0,70%)* | 0,00300  *(0,67%)* | 0,00363  *(5,22%)* |



Сурет 4.2.5 – Әртүрлі теориялар бойынша алынған максимал өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

# 4.2.4 Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос пластинаның иілуі

 координаттық жүйеде тікбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның  жақтары топсалы тірелген, ,  бос болсын, ал жоғарғы бетіне біртекті таралған жүктеме әсер етсін (сурет 4.2.5). Пластина материалы изотропты және Пуассон коэффициенті 0,3 тең.



Сурет 4.2 6 - Қарама-қарсы екі шеті топсалы тірелген және екі шеті бос платина

Берілген есеп әдебиеттерде пластинаның цилиндрлік иілу есебі ретінде белгілі және де оның шешімі арқалық-жолақ шешімі арқылы табылады. Сондықтан пластинаның өлшемсіз майысу функциясы топсалы тірелген арқалықтың (2.57) шешімі мен ені бірге теңестіріліп анықталады:



Кесте 4.2.4 – Біртекті таралған жүктеме әсер еткенде квадрат пластинаның әр түрлі теориялар бойынша алынған максималды майысудың өлшемсіз мәндері.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Теориялар |  | | | |
| *0,01* | *0,05* | *0,10* | *0,20* |
| Ұсынылған теория | 0,01303 | 0,01315 | 0,01355 | 0,01542 |
| Shimpi бойынша классикалық теория [[39]](#лит_37) | 0,01309  *(0,46%)* | 0,01309  *(0,46%)* | 0,01309  *(3,39%)* | 0,01309  *(15,11%)* |
| Mindlin пластина теориясы [[50]](#лит_39) | 0,01310  *(0,54%)* | 0,01319  *(0,30%)* | 0,01346  *(0,66%)* | 0,01454  *(5,71%)* |
| Shimpi бойынша бір айнымалы жаңа бірінші ретті ығысу теориясы [[39]](#лит_37) | 0,01310  *(0,54%)* | 0,01318  *(0,23%)* | 0,01342  *(0,96%)* | 0,01441  *(6,55%)* |
| Pachare бойынша бірінші ретті ығысу теориясы [[41]](#лит_37) | 0,01310  *(0,54%)* | 0,01318  *(0,23%)* | 0,01345  *(0,74%)* | 0,01452  *(5,84%)* |



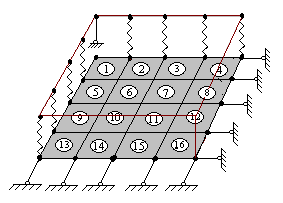
Сурет 4.2.7 –Әр түрлі теориялар бойынша алынған өлшемсіз майысулардың биіктік пен ұзындық қатынасына байланысты өзгеруі

Кесте 4.2.4-де Shimpi және Pachare ұсынған дәлденген теориялардың нәтижелерімен арқалық функцияларымен табылған өлшемсіз максималды майысудың мәндері беріледі, ал сурет 4.2.4 биіктік пен ұзындық қатынасы бойынша өзгеру мәндері график түрінде келтіріледі. Жұқа пластина үшін айырмашылық 1-5% болатынын көреміз.

# 4.3 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

# 4.3.1 Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді бекітілген пластинаны есептеу

Серпімділі тіректі төртбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның ортасына шоғырланған  күші әсер етсін деп алайық. Берілген пластина симметриялы болғандықтан, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.1). Осы бөлікті 4х4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды  түрінде аламыз[.[54]](#лит_45)



Сурет 4.3.1 Есептеу сызбасы

Осы есепті келесі үш жағдайда зерттейік:

1) Пластинаға шоғырланған күш әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалар ескерілмейді  және көлденең ығысуды параметрі .

2) Пластинаға таралған жүктеме әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалар ескеріледі  және көлденең ығысу параметрі .

3) Пластинаға шоғырланған күш әсер етеді, серпімділі қатаң қабырғалары бар  және көлденең ығысу параметрі .

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі пластинаның деформациялық күйін зерттеп, нәтижесін алу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып бағдарлама құрылды. Бағдарламаның нәтижелері 4.3.1-4.3.16 кестелер мен 4.3.2-4.3.4 эпюралар түрінде көрсетілді.

Кесте 4.3.1 – Түйіндік тік жылжулар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0,006325 | 0,011628 | 0,015137 | 0,016328 |
| 6 | 0,006337 | 0,011735 | 0,016502 | 0,019741 | 0,020946 |
| 11 | 0,011634 | 0,016503 | 0,021057 | 0,024373 | 0,025597 |
| 16 | 0,015124 | 0,019784 | 0,024373 | 0,028004 | 0,029493 |
| 21 | 0,016325 | 0,020944 | 0,025595 | 0,029496 | 0,031426 |

Кесте 4.3.2 – Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,051922 | 0,047837 | 0,036039 | 0,019153 | 0 |
| 6 | 0,043257 | 0,041882 | 0,033224 | 0,018390 | 0 |
| 11 | 0,037834 | 0,038836 | 0,032727 | 0,019132 | 0 |
| 16 | 0,035441 | 0,038042 | 0,034243 | 0,022242 | 0 |
| 21 | 0,035014 | 0,038071 | 0,035342 | 0,025874 | 0 |

Кесте 4.3.3 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,051911 | 0,043234 | 0,037857 | 0,035424 | 0,035013 |
| 6 | 0,047824 | 0,041892 | 0,038832 | 0,038041 | 0,038068 |
| 11 | 0,036037 | 0,033223 | 0,032723 | 0,034242 | 0,035336 |
| 16 | 0,019163 | 0,018374 | 0,019132 | 0,022247 | 0,025892 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Кесте 4.3.4 –Түйіндік тік реакциялар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,151121 | -0,003163 | -0,005815 | -0,007564 | -0,016321 |
| 6 | -0,003162 | 0 | -0,000003 | -0,000001 | -0,000001 |
| 11 | -0,005820 | 0 | 0,000003 | 0,000002 | -0,000002 |
| 16 | -0,007523 | 0 | 0 | 0 | 0,000002 |
| 21 | -0,016324 | 0,000001 | -0,000002 | -0,000001 | 0,249999 |

Кесте 4.3.5 –Түйіндік бұралу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,110331 | -0,079361 | -0,041925 | -0,013855 | -0,002154 |
| 6 | -0,079335 | -0,050594 | -0,019452 | -0,001284 | -0,000972 |
| 11 | -0,041932 | -0,019461 | 0,007514 | 0,021149 | -0,001872 |
| 16 | -0,013852 | -0,001284 | 0,021161 | 0,047046 | 0,009394 |
| 21 | -0,002157 | -0,000978 | -0,001877 | 0,009398 | -0,039987 |

Кесте 4.3.6–Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,008291 | -0,065562 | -0,108354 | -0,138049 | -0,140256 |
| 6 | -0,002395 | -0,052941 | -0,103556 | -0,140318 | -0,153822 |
| 11 | -0,000312 | -0,048453 | -0,102566 | -0,156543 | -0,179863 |
| 16 | -0,001232 | -0,044425 | -0,098453 | -0,180825 | -0,242863 |
| 21 | -0,000351 | -0,043836 | -0,097347 | -0,158458 | -0,425867 |

Кесте 4.3.7– Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,008281 | -0,002395 | -0,000359 | -0,001263 | -0,000385 |
| 6 | -0,065565 | -0,052931 | -0,048492 | -0,044419 | -0,043831 |
| 11 | -0,108353 | -0,103554 | -0,102565 | -0,098459 | -0,097346 |
| 16 | -0,138015 | -0,140354 | -0,156543 | -0,180862 | -0,158436 |
| 21 | -0,140231 | -0,153849 | -0,179857 | -0,242854 | -0,425852 |

Кесте 4.3.8– Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,524061 | -0,384591 | -0,206651 | -0,082736 | -0,002791 |
| 6 | -0,231416 | -0,257295 | -0,242907 | -0,141581 | -0,080523 |
| 11 | -0,269323 | -0,299062 | -0,313713 | -0,213533 | -0,128473 |
| 16 | -0,279774 | -0,362568 | -0,549352 | -0,440101 | -0,226826 |
| 21 | -0,346368 | -0,406515 | -0,635664 | -1,817514 | -2,830362 |

Кесте 4.3.9 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,524086 | -0,231430 | -0,269261 | -0,279752 | -0,346288 |
| 6 | -0,384579 | -0,257337 | -0,299049 | -0,362566 | -0,406475 |
| 11 | -0,206661 | -0,242913 | -0,313651 | -0,549354 | -0,635679 |
| 16 | -0,082719 | -0,141567 | -0,213522 | -0,440045 | -1,817511 |
| 21 | 0,002831 | -0,080523 | -0,128521 | -0,226792 | -2,830312 |

Кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.1) пайда болады 

- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 4.3.2) пайда болады 

- вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 4.3.3) пайда болады 

- үлкен тік реакция 25 түйінде (кесте 4.3.4) пайда болады 

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.5) пайда болады 

- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 4.3.6) пайда болады 

- вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 4.3.7) пайда болады 

- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.8) пайда болады

- вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.9) пайда болады

Екінші жағдай бойынша, осы есептің 21-25, 5-25 қималарында (сурет 4.3.1) серпімділі қатаң қабырғаларды ескеріп , пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі және көлденең ығысуды ескермегендегі  шешімін аламыз.

Бұл жағдайда анықталған негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар 1 түйінде 

- үлкен тік реакция 1 түйінде 

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде пайда болады 

- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 5 түйінде  және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 21 түйінде пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 1 түйінде пайда болады , 

Бірінші және екінші жағдайдағы алынған шешімдерді бір-бірімен салыстыра отырып, пластинада серпімділі қатаң қабырға болған жағдайдағы мәндердің кіші болатынын көреміз.

Үшінші жағдай пластинаға шоғырланған күш әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болмаған  кездегі және көлденең ығысуды ескергендегі  шешімін аламыз.

Кесте 4.3.10 – Түйіндік тік жылжулар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0,006952 | 0,012925 | 0,017144 | 0,018895 |
| 6 | 0,006955 | 0,013074 | 0,018471 | 0,022521 | 0,024382 |
| 11 | 0,012903 | 0,018473 | 0,023755 | 0,027903 | 0,000057 |
| 16 | 0,017105 | 0,022520 | 0,027952 | 0,032416 | 0,035145 |
| 21 | 0,018895 | 0,024387 | 0,030087 | 0,035145 | 0,038661 |

Кесте 4.3.11 – Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,049296 | 0,045753 | 0,035051 | 0,019216 | 0 |
| 6 | 0,041469 | 0,040116 | 0,032196 | 0,018394 | 0 |
| 11 | 0,036775 | 0,037420 | 0,031306 | 0,018594 | 0 |
| 16 | 0,035061 | 0,037255 | 0,032731 | 0,020384 | 0 |
| 21 | 0,035452 | 0,038916 | 0,036442 | 0,026056 | 0 |

Кесте 4.3.12 – Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,049892 | 0,041410 | 0,036777 | 0,035080 | 0,035469 |
| 6 | 0,045733 | 0,040151 | 0,037461 | 0,037252 | 0,038908 |
| 11 | 0,035092 | 0,032193 | 0,031317 | 0,032731 | 0,036454 |
| 16 | 0,019218 | 0,018393 | 0,018593 | 0,020381 | 0,026068 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Кесте 4.3.13 –Түйіндік бұралу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,097572 | -0,071314 | -0,038588 | -0,012697 | -0,002079 |
| 6 | -0,071317 | -0,047113 | -0,020872 | -0,002066 | 0,002346 |
| 11 | -0,038583 | -0,020872 | -0,002934 | 0,009898 | 0,002818 |
| 16 | -0,012694 | -0,002054 | 0,009897 | 0,031689 | 0,002017 |
| 21 | -0,002081 | 0,002337 | 0,002818 | 0,002018 | -0,071527 |

Кесте 4.3.14 – Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,009465 | -0,059591 | -0,101126 | -0,134627 | -0,136412 |
| 6 | -0,001428 | -0,049699 | -0,097047 | -0,136115 | -0,152222 |
| 11 | -0,000632 | -0,048349 | -0,099658 | -0,150956 | -0,173883 |
| 16 | -0,000624 | -0,046094 | -0,100825 | -0,175493 | -0,230642 |
| 21 | -0,004097 | -0,040333 | -0,094116 | -0,158443 | -0,430555 |

Кесте 4.3.15 – Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,009462 | -0,001423 | -0,000632 | -0,000626 | -0,004091 |
| 6 | -0,059592 | -0,049700 | -0,048348 | -0,046092 | -0,040333 |
| 11 | -0,101127 | -0,097021 | -0,099693 | -0,100835 | -0,094136 |
| 16 | -0,134671 | -0,136121 | -0,150984 | -0,175494 | -0,158442 |
| 21 | -0,136412 | -0,152235 | -0,173886 | -0,230674 | -0,430510 |

Кесте 4.3.16 – Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -11,854778 | -11,303441 | -10,263144 | -8,613457 | -7,452734 |
| 6 | -11,268552 | -11,056610 | -10,574780 | -9,435701 | -8,566509 |
| 11 | -10,865111 | -11,107020 | -11,634830 | -11,879450 | -11,838215 |
| 16 | -10,407951 | -11,018840 | -12,576672 | -15,135293 | -16,746980 |
| 21 | -10,432080 | -11,425980 | -14,043641 | -19,403737 | -23,140090 |

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.10) пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар 1 түйінде  (кесте 12),  (кесте 4.3.11) пайда болады;

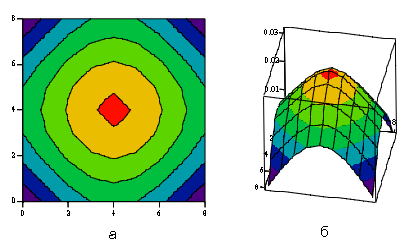
- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.13) пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде  (кесте 4.3.14) және  (кесте 4.3.15) пайда болады;

- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 4.3.16) пайда болады 

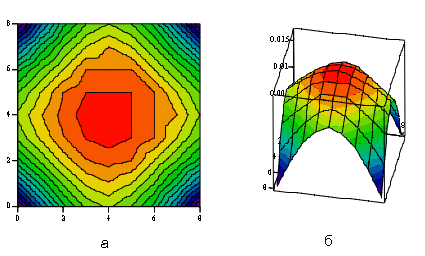
Нәтижесінде алдыңғы екі жағдай мен көлденең ығысуды ескергендегіні салыстырып, майысу функциясының өсетінін көреміз.

Енді осы үш жағдайды Mathcad программасында толық пластинаға салып, майысу функциясын график түрінде көрсетейік:



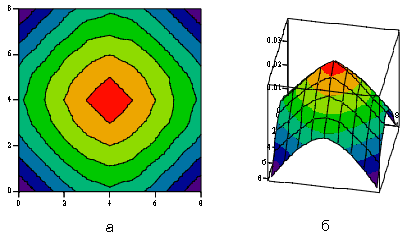
а – изолиния, б – эпюра

Сурет 4.3.2 Бірінші жағдайдағы майысу функциясы 



а – изолиния, б – эпюра

Сурет 4.3.3. Екінші жағдайдағы майысу функциясы 



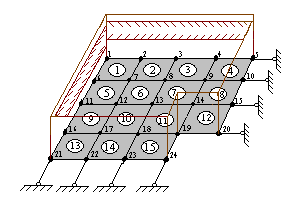
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.4. Үшінші жағдайдағы майысу функциясы 

Алынған нәтижелер арқылы көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі төртбұрышты пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Сонымен қатар, сандық нәтижелерін қолдану арқылы түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

# 4.3.2 Тесік ақауы бар пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Тесікті төртбұрышты пластинаны қарастырайық. Пластинаның ортасына (яғни, 19 түйінге) шоғырланған күш  әсер етсін. Пластинаның симметриясын ескере отырып, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.5). Ширек бөлігін 4х4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды  түрінде аламыз.



Сурет 4.3.5 - Есептеу схемасы

Бұл есептіде үш жағдайда зерттеп, алынған нәтижелерді 4.3.17 - 4.3.26 кестелер және 4.3.6-4.3.7 суреттегі эпюралар түрінде көрсетеміз.

Кесте 4.3.17 –Түйіндік тік жылжулар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,000472 | 0,001675 | 0,002822 | 0,003282 |
| 11 | 0 | 0,001675 | 0,005511 | 0,009246 | 0,010653 |
| 16 | 0 | 0,002823 | 0,009246 | 0,016798 | 0,019713 |
| 21 | 0 | 0,003285 | 0,010653 | 0,019713 | Тесік бар |

Кесте 4.3.18 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,007518 | 0,010586 | 0,007185 | 0 |
| 11 | 0 | 0,024452 | 0,033774 | 0,021845 | 0 |
| 16 | 0 | 0,040546 | 0,059869 | 0,053113 | 0 |
| 21 | 0 | 0,046894 | 0,067276 | 0,081531 | Тесік бар |

Кесте 4.3.19 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,007521 | 0,024454 | 0,040556 | 0,046897 |
| 11 | 0 | 0,010584 | 0,033771 | 0,059867 | 0,067277 |
| 16 | 0 | 0,007175 | 0,021848 | 0,053132 | 0,081531 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | Тесік бар |

Кесте 4.3.20 –Түйіндік тік реакциялар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,060184 | 0,034807 | -0,057781 | -0,148923 | -0,186284 |
| 6 | 0,034817 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | -0,057781 | 0 | 0 | -0,000001 | 0 |
| 16 | -0,148922 | 0 | 0 | 0,333344 | 0,000001 |
| 21 | -0,186287 | 0 | -0,000001 | 0,000001 | Тесік бар |

Кесте 4.3.21 –Түйіндік бұралу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,042191 | 0,009262 | 0,013218 | 0,008235 | -0,041454 |
| 6 | 0,009264 | 0,150672 | 0,204483 | 0,132657 | 0,008068 |
| 11 | 0,013248 | 0,204485 | 0,291594 | 0,246726 | -0,026418 |
| 16 | 0,008235 | 0,132657 | 0,246786 | 0,475921 | 0,183833 |
| 21 | -0,041445 | 0,008065 | -0,026417 | 0,183835 | Тесік бар |

Кесте 4.3.22 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0,018110 | 0,075598 | 0,130483 | 0,153330 |
| 6 | 0,060367 | 0,072978 | 0,034707 | 0,016950 | 0,010794 |
| 11 | 0,251992 | 0,140334 | 0,006946 | -0,144225 | -0,176143 |
| 16 | 0,434943 | 0,198428 | 0,062413 | -0,463172 | -0,202520 |
| 21 | 0,511094 | 0,226538 | -0,010564 | 0,130092 | Тесік бар |

Кесте 4.3.23 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0,060364 | 0,251992 | 0,434946 | 0,511097 |
| 6 | 0,018110 | 0,072977 | 0,140331 | 0,198423 | 0,226534 |
| 11 | 0,075598 | 0,034707 | 0,006944 | 0,062412 | -0,010582 |
| 16 | 0,130481 | 0,016950 | -0,144226 | -0,463172 | 0,130091 |
| 21 | 0,153330 | 0,010792 | -0,176143 | -0,202520 | Тесік бар |

Кесте 4.3.24 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,482932 | 1,007973 | 1,498306 | 1,036421 | 0,609245 |
| 6 | 0,446795 | 0,348095 | 0,288953 | 0,252609 | 0,176651 |
| 11 | -0,966640 | -1,003283 | -0,902955 | -0,784103 | -0,802213 |
| 16 | -2,142227 | -2,051925 | -3,423515 | -1,200941 | 6,167854 |
| 21 | -2,677257 | -2,555297 | -0,752518 | 0,928304 | Тесік бар |

Кесте 4.3.25 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,482924 | 0,446795 | -0,966647 | -2,142214 | -2,677255 |
| 6 | 1,007986 | 0,348097 | -1,003281 | -2,051914 | -2,555348 |
| 11 | 1,498348 | 0,288984 | -0,902964 | -3,423506 | -0,752545 |
| 16 | 1,036424 | 0,252604 | -0,784104 | -1,200984 | 0,928315 |
| 21 | 0,609241 | 0,176644 | -0,802198 | 6,167834 | Тесік бар |

Кесте 4.3.26 –Түйіндік ығысудағы майысу 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0,060362 | 0,251992 | 0,434941 | 0,511098 |
| 6 | 0,060367 | 0,112272 | 0,134637 | 0,165672 | 0,182564 |
| 11 | 0,251995 | 0,134644 | 0,010645 | -0,062930 | -0,143611 |
| 16 | 0,434945 | 0,165671 | -0,062942 | -0,712572 | -0,055712 |
| 21 | 0,511097 | 0,182567 | -0,143611 | -0,055712 | Тесік бар |

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 20 және 24 түйіндерде болады (кесте 4.3.17) 

- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 24 түйінде (кесте 4.3.18)  және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 20 түйінде (кесте 4.3.19) пайда болады 

- үлкен тік реакция 19 түйінде (кесте 4.3.20) пайда болады 

- үлкен бұралу моменті 19 түйінде (кесте 4.3.21) пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері сәйкесінше 21 түйінде (кесте 4.3.22)  және 5 түйінде (кесте 23)  пайда болады;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер сәйкесінше 20 түйінде (кесте 4.3.24)  және 24 түйінде (кесте 4.3.25)  пайда болады;

- ығысудағы үлкен майысу 5 және 21 түйіндерде (кесте 4.3.26) пайда болады 

Енді осы есепті екінші жағдай бойынша 21-24, 24-19, 19-20, 5-20 қималарында (сурет 4.3.5) серпімділі қатаң қабырғалар орналасқанда , көлденең ығысуды ескермегендегі  және пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі шешімін аламыз.

Бұл жағдайда негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 20 түйінде пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар сәйкесінше 18 түйінде  және 15 түйінде болады;

- үлкен тік реакция 19 түйінде пайда болады 

- үлкен бұралу моменті 9 түйінде пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, сәйкесінше 16 түйінде  және 4 түйінде  болады.

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер, сәйкесінше 11 түйінде  және 24 түйінде  пайда болады.

- ығысудағы үлкен майысу 19 түйінде пайда болады

Үшінші жағдай пластинаға таралған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырға орналасқан  жағдайдағы және көлденең ығысуды ескергендегі  шешімін аламыз.

Алынған нәтижелерді 4.3.27-4.3.34 кестелер түрінде көрсетеміз:

Кесте 4.3.27 –Түйіндік тік жылжулар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,000131 | 0,000222 | 0,000247 | 0,000176 |
| 11 | 0 | 0,000226 | 0,000432 | 0,000536 | 0,000491 |
| 16 | 0 | 0,000254 | 0,000534 | 0,000735 | 0,000782 |
| 21 | 0 | 0,000162 | 0,000443 | 0,000695 | Тесік бар |

Кесте 4.3.28 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,000553 | 0,000322 | -0,000093 | 0 |
| 11 | 0 | 0,001094 | 0,000925 | 0,000281 | 0 |
| 16 | 0 | 0,001606 | 0,001694 | 0,000763 | 0 |
| 21 | 0 | 0,001992 | 0,002162 | 0,001902 | Тесік бар |

Кесте 4.3.29 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0,000556 | 0,001087 | 0,001582 | 0,002194 |
| 11 | 0 | 0,000325 | 0,000901 | 0,001667 | 0,002452 |
| 16 | 0 | -0,000102 | 0,000233 | 0,000714 | 0,002203 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Кесте 4.3.30 –Түйіндік бұралу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,011824 | -0,004031 | -0,001535 | 0,001171 | 0,006128 |
| 6 | -0,004022 | 0,002513 | 0,004030 | 0,006521 | 0,008924 |
| 11 | -0,001612 | 0,004059 | 0,006815 | 0,006914 | 0,003862 |
| 16 | 0,001674 | 0,006031 | 0,006482 | 0,009837 | 0,008643 |
| 21 | 0,007563 | 0,008450 | 0,003241 | 0,008185 | Тесік бар |

Кесте 4.3.31 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,021802 | 0,008115 | 0,008881 | 0,013638 | -0,011944 |
| 6 | 0,011681 | -0,000953 | -0,003585 | -0,002822 | 0,011304 |
| 11 | 0,020173 | -0,000127 | -0,007174 | -0,008432 | 0,004585 |
| 16 | 0,027541 | 0,002994 | -0,005553 | -0,011524 | -0,015003 |
| 21 | -0,006601 | 0,014540 | 0,001713 | 0,004954 | Тесік бар |

Кесте 4.3.32 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,021750 | 0,011753 | 0,020051 | 0,026781 | -0,003861 |
| 6 | 0,007991 | -0,000978 | -0,000164 | 0,003324 | 0,015172 |
| 11 | 0,008881 | -0,003618 | -0,007215 | -0,005844 | 0,002143 |
| 16 | 0,015092 | -0,002705 | -0,008402 | -0,013878 | 0,002744 |
| 21 | -0,015047 | 0,010784 | 0,004903 | -0,005650 | Тесік бар |

Кесте 4.3.33 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,065381 | 0,092334 | 0,055395 | -0,053395 | -0,098281 |
| 6 | -1,176932 | -0,834606 | -0,263083 | 0,658165 | 0,750204 |
| 11 | -1,878853 | -1,393404 | -0,601871 | 0,215031 | 0,725854 |
| 16 | -1,776343 | -1,365742 | -0,736743 | -0,197652 | 0,443718 |
| 21 | -0,546888 | -0,441974 | -0,289339 | -0,241565 | Тесік бар |

Кесте 4.3.34 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,066222 | -1,176152 | -1,872191 | -1,748035 | -0,607461 |
| 6 | 0,092522 | -0,842123 | -1,407840 | -1,360042 | -0,528083 |
| 11 | 0,053371 | -0,282135 | -0,638923 | -0,738807 | -0,416230 |
| 16 | -0,045512 | 0,444972 | 0,451215 | 0,091056 | -0,383767 |
| 21 | -0,078932 | 0,946101 | 1,236852 | 1,284295 | Тесік бар |

Бұл жағдайда негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 20 түйінде (кесте 4.3.27) пайда болады 

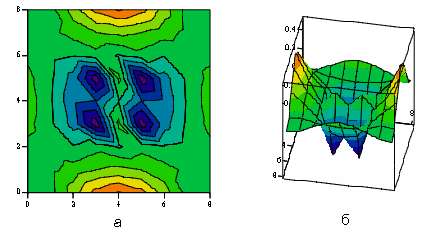
- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар, сәйкесінше 23 түйінде (кесте 4.3.28)  және 15 түйінде (кесте 29)  пайда болады;

- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 4.3.30) пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, сәйкесінше 16 түйінде  (кесте 4.3.31) және 4 түйінде (кесте 4.3.32) болады.

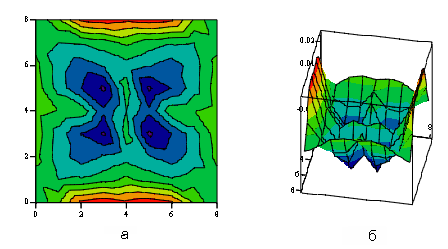
- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер, сәйкесінше 11 түйінде  (кесте 4.3.33) және 3 түйінде  (кесте 4.3.34) пайда болады.

Қарастырылған үш жағдайды Mathcad программасында толық пластина ретінде салып, иілу моментінің эпюралар түрінде көрсетейік:



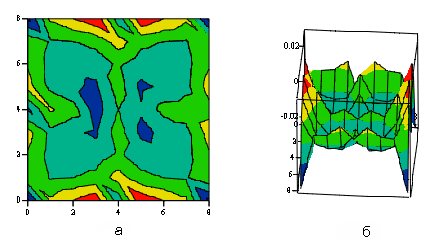
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.6 – Бірінші жағдайдағы иілу моменті



а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.7 – Екінші жағдайдағы иілу моменті



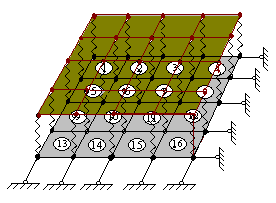
а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4.3.8 – Үшінші жағдайдағы иілу моменті

Сонымен, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі тесік ақауы бар пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Сонымен қатар, программа арқылы табылған нәтижелерді қолдану арқылы майысу функциясы, түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

# 4.3.3 Серпімділі негіздегі пластинаны ақырлы элементтер әдісімен есептеу

Серпімділі негіздегі пластинаны қарастырайық. Осы пластинаның ортасына шоғырланған күш  әсер етсін. Пластинаның симметриясын ескере отырып, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 4.3.9). Осы бөлікті 4х4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды  түрінде аламыз[.[55, 56, 57]](#лит_46)

****

Сурет 4.3.9 - Есептеу схемасы

Қарастырылып отырған пластинаны есептеу үшін құрылған программаға бірінші жағдай бойынша бастапқы берілгендерін былайша енгіземіз:

**Parameter** (N=16,LS=75,JC=25,JT=10,IP=1,JZ=25,NG=16,MU=1,LR=8)

**DATA RM**/0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,

\*1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,

\*0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,

\*0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0.,0.125,0.125,1.,0./,

\***IM**/1,2,7,6,2,3,8,7,3,4,9,8,4,5,10,9,6,7,12,11,7,8,13,12,8,9,14,13,9,10,15,14,

\*11,12,17,16,12,13,18,17,13,14,19,18,14,15,20,19,16,17,22,21,17,18,23,22,

\*18,19,24,23,19,20,25,24/, **RC**/0.25,.5,.5,.5,0.25,.5,1.,1.,1.,.5,.5,1.,1.,1.,.5,.5,

\*1.,1.,1.,.5,0.25,.5,.5,.5,0.25/, **IC**/1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,

\*46,49,52,55,58,61,64,67,70,73/, **IK**/14,29,44,59,74,75,72,69,66,63/, **KP**/73/,

\***PC**/0.25/,**PZ**/1.,2.,2.,2.,1.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,1.,2.,2.,2.,1./,

\***KM**/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16/, **IMR**/21,22,0,22,23,0,23,24,0,

\*24,25,0,5,10,1,10,15,1,15,20,1,20,25,1/, **RMR**/0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,

\*0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0.,0.125,0.,0./

Программа бойынша алынған нәтижелерді 4.3.35-4.3.44 кестелер түрінде көрсетейік:

Кесте 4.3.35 –Түйіндік тік жылжулар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,009384 | 0,011016 | 0,012436 | 0,013467 | 0,013834 |
| 6 | 0,011015 | 0,012730 | 0,014333 | 0,015508 | 0,015945 |
| 11 | 0,012452 | 0,0014334 | 0,016193 | 0,017675 | 0,018252 |
| 16 | 0,013466 | 0,015504 | 0,017674 | 0,019625 | 0,020511 |
| 21 | 0,013833 | 0,015941 | 0,018252 | 0,020526 | 0,021861 |

Кесте 4.3.36 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,013234 | 0,012565 | 0,010153 | 0,005762 | 0 |
| 6 | 0,013772 | 0,013581 | 0,011514 | 0,006761 | 0 |
| 11 | 0,014647 | 0,015251 | 0,014021 | 0,008872 | 0 |
| 16 | 0,015527 | 0,017032 | 0,017234 | 0,012814 | 0 |
| 21 | 0,015893 | 0,017803 | 0,018881 | 0,016734 | 0 |

Кесте 4.3.37 –Түйіндік бұрылу бұрышы 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,013234 | 0,013775 | 0,014645 | 0,015523 | 0,015896 |
| 6 | 0,012565 | 0,013585 | 0,015257 | 0,017031 | 0,017807 |
| 11 | 0,0101521 | 0,011514 | 0,014009 | 0,017233 | 0,018886 |
| 16 | 0,005763 | 0,006762 | 0,008878 | 0,012811 | 0,016733 |
| 21 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Кесте 4.3.38 –Түйіндік тік реакциялар 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,002341 | -0,002753 | -0,003134 | -0,003352 | -0,003481 |
| 6 | -0,002752 | -0,003189 | -0,003583 | -0,003835 | -0,003933 |
| 11 | -0,003122 | -0,003587 | -0,004040 | -0,004407 | -0,004560 |
| 16 | -0,003338 | -0,003875 | -0,004412 | -0,004906 | -0,005127 |
| 21 | -0,003453 | -0,003984 | -0,004560 | -0,005120 | 0,244530 |

Кесте 4.3.39 –Түйіндік бұралу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,003742 | 0,008125 | 0,010902 | 0,008098 | -0,001891 |
| 6 | 0,008120 | 0,015100 | 0,021013 | 0,016523 | -0,000781 |
| 11 | 0,010947 | 0,021013 | 0,033738 | 0,033484 | -0,001793 |
| 16 | 0,008102 | 0,016525 | 0,033484 | 0,053162 | 0,009386 |
| 21 | -0,001860 | -0,000773 | -0,000733 | 0,009383 | -0,041520 |

Кесте 4.3.40 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,001174 | -0,010658 | -0,024902 | -0,038930 | -0,044869 |
| 6 | 0,000064 | -0,008683 | -0,026260 | -0,045616 | -0,054141 |
| 11 | 0,000142 | -0,006438 | -0,028553 | -0,063130 | -0,080011 |
| 16 | -0,000446 | -0,002987 | -0,025232 | -0,087722 | -0,148243 |
| 21 | -0,000703 | -0,001698 | -0,024242 | -0,065265 | -0,325664 |

Кесте 4.3.41 –Түйіндік иілу моменті 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,001176 | 0,000066 | 0,000141 | -0,000449 | -0,000724 |
| 6 | -0,010651 | -0,008682 | -0,006432 | -0,002989 | -0,001703 |
| 11 | -0,024897 | -0,026267 | -0,028553 | -0,025215 | -0,024242 |
| 16 | -0,038925 | -0,045612 | -0,063125 | -0,087717 | -0,065263 |
| 21 | -0,044883 | -0,054155 | -0,079998 | -0,142835 | -0,325657 |

Кесте 4.3.42 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,078359 | -0,079463 | -0,080289 | -0,056761 | -0,033582 |
| 6 | -0,042193 | -0,068002 | -0,094366 | -0,068830 | -0,042754 |
| 11 | -0,051042 | -0,101510 | -0,167666 | -0,136316 | -0,089256 |
| 16 | -0,056737 | -0,156956 | -0,394467 | -0,358071 | -0,184373 |
| 21 | -0,059016 | -0,168076 | -0,479089 | -1,733589 | -2,786137 |

Кесте 4.3.43 –Түйіндік көлденең күш 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | -0,078358 | -0,042227 | -0,051022 | -0,056734 | -0,059050 |
| 6 | -0,079454 | -0,068011 | -0,101485 | -0,156955 | -0,168066 |
| 11 | -0,080233 | -0,094357 | -0,167652 | -0,394435 | -0,479058 |
| 16 | -0,056750 | -0,068812 | -0,136320 | -0,358049 | -1,733578 |
| 21 | -0,033577 | -0,042727 | -0,089284 | -0,184373 | -2,786135 |

Кесте 4.3.44 –Түйіндік ығысудағы майысу 

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Түйін | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0,001824 | -0,008143 | -0,019043 | -0,030295 | -0,035075 |
| 6 | -0,008143 | -0,013364 | -0,025152 | -0,037374 | -0,042965 |
| 11 | -0,019042 | -0,025157 | -0,043931 | -0,067964 | -0,080183 |
| 16 | -0,030281 | -0,037375 | -0,067963 | -0,134955 | -0,160074 |
| 21 | -0,035071 | -0,042959 | -0,080184 | -0,160074 | -0,501014 |

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 4.3.35) пайда болады 

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжулар, сәйкесінше 23 түйінде  (кесте 4.3.36) және 15 түйінде  (кесте 4.3.37) пайда болады;

- үлкен тік реакция 25 түйінде  (кесте 4.3.38) пайда болады;

- үлкен бұралу моменті 19 түйінде  (кесте 4.3.39) болады;

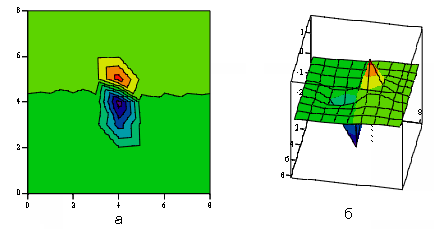
- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменттері, 25 түйінде  (кесте 4.3.40), (кесте 4.3.41) пайда болады;

- горизонталь және вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күштер 25 түйінде  (кесте 42), (кесте 4.3.43) пайда болады;

- ығысудағы үлкен майысу 25 түйінде  (кесте 4.3.44) болады.

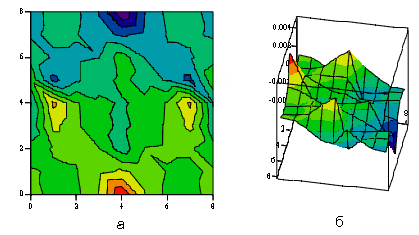
Алынған шешімдерді бір-бірімен салыстыратын болсақ, серпімділі қатаң қабырға болған жағдайдағы мәндердің кіші болатынын көреміз.

Бұл есептеде үш жағдайды пластинаның көлденең күштерін 4.3.10-4.3.11 суреттегі эпюралар түрінде көрсетейік:



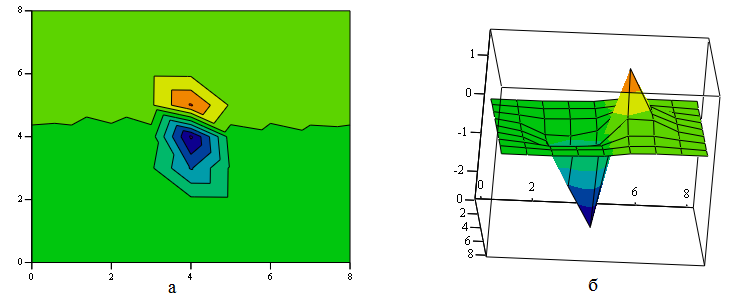
а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.10 – Бірінші жағдайдағы көлденең күш 



а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.11 – Екінші жағдайдағы көлденең күш 



а – изолиния; б - эпюра

Сурет 4.3.12 – Үшінші жағдайдағы көлденең күш

Сөйтіп, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімділі неігздегі пластинаның иілу есебінің шешімі толық түрде анықталады. Программа арқылы табылған нәтижелерді қолдану арқылы майысу функциясы, түйіндік бұрылу бұрыштары мен ішкі күштерінің эпюраларын тұрғызуға болады.

Ұсынылған модель мен ақырлы элементтер әдісі арқылы құрылған есептеу алгоритмдері күрделі пішінді, әртүрлі бекітілген пластиналар үшін жоғары дәлдікпен есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді. Жетілдірілген теория негізінде жасалған модель мен әдістерді қазіргі заманғы механика және автоматтандырылған жобалау жүйелерінде пайдалануға толықтай жарамды деп санауға болады.

# Қорытынды

Диссертация көлденең ығысу деформациясын ескергендегі изотропты жұқа пластинаны есептеудің дәлденген теориясына арналған аяқталған ғылыми зерттеу жұмыс болып табылады. Жұмыста :

1. Тақырып бойынша танымал зерттеулерге шолу жасалды. Рейсснер енгізген болжамдардан бастап Реддидің үшінші ретті ығысу теориясына дейінгі теориялардың негізгі тұжырымдары қарастырылды. Қазіргі уақытта пластиналардың жоғарғы ретті ығысу теориялары құрылғанына қарамастан іс жүзінеде оларды пластинаны есептеу жолдарына қолдану күрделі болатындықтан белгілі дәлденген теорияларды қарапайымдату жолдарын зерттеу өзкеті мәселе болып тұр. Соңғы зерттеулердің ішінде Shimpi-дің жасаған жетілдірілген дәлденген теорияда шешуші теңдеу санын төмендетуге болатыны көрсетіліп кетті.

2. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі дәлденген теорияның жетілдірілген нұсқасы бойынша тікбұрышты пластинаның математикалық моделі құрылды. Негізгі болжам ретінде көлденең ығысу деформациялары қалыңдық бойынша квадраттық заңдылық бойынша өзгеру болжамы алынды. Және де бұл деформация параметр ретінде қабылданды. Пластинаның цилиндрлік қатаңдығын көлденең ығысу деформация параметрімен байланыстырылды. Нәтижесінде негізгі шешуші теңдеуде бір белгісіз айнымалы ғана болады және ол классикалық теорияның шешуші теңдеудің формасына ие. Пластинаның дәлденген теориясының шешімін алу үшін классикалық теорияның әдебиеттерде белгілі шешімдерін қолдануға болады.

3. Құрылған жетілдірілген теория негізінде пластинаның есептеу әдісі құрылды. Оның негізінде айнымалыларды бөлу әдісі жатыр. Пластинаны горизантал және вертикал бағытта шексіз жолақ-арқалықтардан тұратын жүйе ретінде алып, арқалықтардың иілім функциялары анықталды. Пластина жақтары топсалы, қатты, серпімді бекіністерге ие және бос болғанда шекаралық шарттарды ескере отырып, арқалықтың иілім функциясының мүмкін болатын 10 нұсқасының шешімі жалпы түрде алынды. Бұл арқылы 55 түрлі бекітілген пластинаны есептеу мүмкіндігі бар. Осы әдістің тікбұрышты пластинаның есептеу алгоритм жасалды.

5. Геометриясы мен жүктемесі күрделі болатын пластиналарды ақырлы элементтер әдісі арқылы шеші үшін ұсынылған жетілдірілген теория мен әдісті қолдануға болады. Көлденең ығысуды параметр ретінде қолданатындықтан ақырлы элементті еркіндік дәрежесі 12 тең болып сақталады. Есептеу толық автоматтандырылды.

6. Ұсынылған жетілдірілген теория негізінде жасалған модель мен әдістерді қазіргі заманғы механика және автоматтандырылған жобалау жүйелерінде пайдалануға толықтай жарамды деп санауға болады.

# Пайдаланылған Әдебиеттер тізімі

1. Todhunter I., Pearson K. History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1960. V.2. Pt. 1. 762 p.: Pt. 2. 546 p.

2. Timoshenko S.P. History of Strength of Materials. N.-Y.: Dover, 1983. 452 p.

3. Jemielita G. On the winding paths of elastic plates//Mechanika Teoretyczna I Stosoqana. 1993. V.2. No 31. P. 317-327.

4. Kirchhoff GR. Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. 19 1850;40:51-88.

5. Thomson W, Tait P. Treatise on Natural Philosophy. Cambridge: Cambridge University Press, 1883.

6. Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Dover Publ., New York, USA,1944.

7. Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., 1959, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

8. Timoshenko, S. P. and Gere, J., 1961, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York.

9. Тimоshenkо S. P. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Phil. Mag., 1921, vol. 41, 744—746.

10. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates. J. of Math, and Phys., 1944, 23 (184—191).

11. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. Journal of Applied Mechanics 1945;12:69-72.

12. Mindlin RD. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics 1951;18:31-38.

13. Васильев В.В. О теории тонких пластин. // Изв. АН. МТТ. 1992.- №3.- С.26-47.

14. Васильев В.В. К дискуссии по классической теории пластин//Изв.АН.МТТ. -1995.-№4.-С.140-150.

15. Vasiliev V.V. Modern conceptions of plate theory. Composite Structures 48 (2000) 39±48

16. Wang, C.M., Lim, G.T., Reddy, J.N., Lee, K.H., 2001. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. Engineering Structures 23 (7), 838–849.

17. Salerno VL, Goldberg MA. Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates. J Appl Mech 1960;27:54–8.

18. Mansfield EH. The bending and stretching of plates, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1989:33–49.

19. Lee K.H., Lim G.T., Wang C.M. Thick Le´vy plates re-visited. Int J Solids Struct, submitted for publication.

20. Medwadowski, S.J., . A refined theory of elastic, orthotropic plates. ASME Journal of Applied Mechanics 25, 1958. 437–441.

21. Librescu L., 1975. Elastostatics and Kinetics of Anisotropic and Heterogeneous Shell-Type Structures. Noordhoff International, Leyden, The Netherlands.

22. Levinson M., 1980. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. Mechanics Research Communications 7 (6), 343–350.

23. Reissner E., On Transverse Bending of Plates Including the Effects of Transverse Shear Deformation, International Journal of Solids and Structures, vol. 25, pp. 495–502, 1975.

24. Murthy V.V., An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminate Anisotropic Plates, NASA Technical Paper, p. 1903, 1981.

25. Reddy J.N., A Refined Nonlinear Theory of Plates with Transverse Shear Deformation, International Journal of Solids and Structures, vol. 20, pp. 881–896, 1984.

26. J.N. Reddy, A Simple Higher-order Theory for Laminated Composite Plates, Journal of Applied Mechanics, vol. 51, pp. 745–752, 1984.

27. K. Rohwer, Application of Higher Order Theories to the Bending Analysis of Layered Composite Plates, International Journal of Solids and Structures, vol. 29, pp. 105–119, 1992.

28.  Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N., Static and Free Vibration Analysis of Composite Shells by Radial Basic Functions, Engineering Analysis with Boundary Elements, vol. 30, pp. 719–733, 2006.

29. Ambartsumian S.A., On the Theory of Bending Plates, Izv Otd Tech Nauk AN SSSR, vol. 5, pp. 69–77, 1958.

30. Shi G., A New Simple Third-order Shear Deformation Theory of Plates, International Journal of Solids and Structures, vol. 44, pp. 4399–4417, 2007

31. Yucheng Liu A Refined Shear Deformation Plate Theory, International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 12:3, 141-149, 2011 DOI: 10.1080/15502287.2011.564267

32. Touratier M., An Efficient Standard Plate Theory, International Journal of Engineering Science, vol. 29(8), pp. 901–916, 1991.

33. Soldatos K.P., A Transverse Shear Deformation Theory for Homogeneous Monoclinic Plates, Acta Mechanica, vol. 94, pp. 195–200, 1992.

34. Karama M., Afaq K.S., Mistou S., Mechanical Behavior of Laminated Composite Beam by New Multi-layered Laminated Composite Structures Model with Transverse Shear Stress Continuity, International Journal of Solids and Structures, vol. 40, pp. 1525–1546, 2003.

35. Aydogdu M., A New Shear Deformation Theory for Laminated Composite Plates, Composite Structures, vol. 89(1), pp. 94–101, 2008.

36. Shimpi, R.P., Refined plate theory and its variants. AIAA Journal 40 (1), 137–146. 2002.

37. Shimpi R.P., Patel H.G., A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 6783–6799, 2006

38. Shimpi R.P. et al. Single variable new first-order shear deformation theory for isotropic plates. Lat Am J Solids Struct, 2018

39. Shimpi, R.P., Guruprasad, P.J., Pakhare, K.S. Single variable new first order shear deformation theory for isotropic plates. Latin Am. J. Solids Struct. 15, 1–25 (2018).

40. Huu-Tai Thai, Nguyen, Trung-Kien, Vo, Thuc and Ngo, Tuan. A new simple shear deformation plate theory. Composite Structures, 171. 2017. pp. 277-285.

41. Pakhare, K.S., Sawhney, H., Shimpi, R.P. *et al.* Analytical and numerical investigations of the flexure of isotropic plates using the novel first-order shear deformation theory. *Proc.Indian Natl. Sci. Acad.* 87, 379–392 (2021). <https://doi.org/10.1007/s43538-021-00032-7>

42.  Тұрсынов К.А. Ортотроптық пластинаның иілуінің классикалық жəне дəлденген теориялары. Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. №1(37), Б 64-74, 2005

43. Турсунов К.А. Уточненная классическая теория ортотропных пластинок. Қарағанды университетінің хабаршысы. Математика сериясы. №(46), Б 105-111, 2007

44. Тұрсынов К.А., Тұрсынов Д.К. Конструкциялардың кеңістік элементтерін есептеу негіздері. Оқу құралы. -Қарағанды: ҚарМУ баспасы, 2007- 215б.

45. S. Akhazhanov, A. Nurgoziyeva, A. Kassenova. Refined Theories for Beam Bending: A Simplified Approach to Structural Analysis// Engineering, Technology & Applied Science Research Vol. 15, No. 2, 21709-21718. 2025. <https://doi.org/10.48084/etasr.10127>

46. Ахажанов С.Б., Нурланова Б.М., Нургозиева А.Ж., Ахажанов Т.Б. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың ақырлы элементі. КарТУ. Университет еңбектері. – Бөлім 4, Құрылыс, Транспорт. – №4(85). – 2021. –– Б. 197-202. DOI 10.52209/1609-1825\_2021\_4\_197.

47. O. Khabidolda, S. Akhmediyev, N. Vatin, L., Abeuova, A. Nurgoziyeva, Studying dynamics of a cantilever bar with variable bending stiffness. Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2023. - Vol. 119. - No.3, P. 77-90. DOI: 10.34910/MCE.121.7

48. Нургозиева А.Ж. Нақтыланған классикалық теория бойынша топсалы бекітілген пластинаның иілуін есептеу. Студенттер мен жас ғалымдардың «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2022»: XVII Халықаралық ғылыми конференциясының баяндамалар жинағы. Нұр-Сұлтан. Б.1612-1617. 2022.

49.  Reddy J. N., Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd ed., Taylor & Francis (2007) [ISBN](https://en.wikipedia.org/wiki/ISBN_(identifier)) [0-8493-8415-X](https://en.wikipedia.org/wiki/Special:BookSources/0-8493-8415-X)

50. Lee, K.H., Lim, G.T., Wang, C.M.: Thick Lévy plates re-visited. Int. J. Solids Struct. 39, 2002, 127–144

51. Нургозиева А.Ж. Айнымалыларды бөлу әдісімен жақтары қатты бекітілген тікбұрышты пластинаны есептеу. «Фараби әлемі» атты студенттер мен жас ғалымдардың халықаралық ғылыми конференциясының материалдары (6-8 сәуір аралығы). Алматы. Б.69. 2022

52. С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. Пластинки оболочки. Издательство «Наука», Москва, 1966

53. Zenkour A.M. Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates. Appl. Math. Model. 27, 2003, 515–534

54. Ахажанов С.Б., Нургозиева А.Ж. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді пластинаны есептеу әдісі. Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің Хабаршысы. Техникалық ғылымдар және технологиялар сериясы. – №3(140).– 2022. – Б. 16-30. DOI: 10.32523/2616-7263-2022-140-3-16-31.

55. Akhazhanov S.B., Vatin N.I., Akhmediyev S., Akhazhanov T., Khabidolda O. Nurgoziyeva A. Beam on a two-parameter elastic foundation: Simplified finite element model. Magazine of Civil Engineering. 2023. 121(5). Article no. 12107.

56. S. Akhazhanov, A. Kassenova., A. Nurgoziyeva. Examination of a solid stamp on elastic foundation. Д. Серiкбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетiнiң хабаршысы. Сәулет және құрылыс. №1. Б. 295-303. 2025 DOI 10.51885/1561-4212\_2025\_1\_295

57. Sungat Akhazhanov, Bayandy Bostanov, Adilbek Kaliyev, Talgat Akhazhanov, Assel Mergenbekova. Simplified method of calculating a beam on a two-parameter elastic foundation. International Journal of GEOMATE. - 2023.-Vol.25, Issue 111, pp.33-40., https://doi.org/10.21660/2023.111.3898

# Қосымша

**Ақырлы элементтер әдісінің бағдарламасы**

Parameter (N=16,LS=75,JC=25,JT=10,IP=1,JZ=25,NG=16,MU=0,LR=8)

DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),RC(JC),IC(JC),

\*IK(JT),PP(LS),AU(LS),PC(IP),KP(IP),BK(12,12),P(12),W(12),

\*CK(12,12),P2(12),P3(12),PK(LS),JM(4),KM(NG),PZ(JZ),P4(12),

\*DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR),PS(12),PM(LS)

OPEN(3,FILE='Dissert',STATUS='NEW')

DATA RM/0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,

\*1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,

\*1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,

\*1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,

\*1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14,0.125,0.125,

\*1.,1.14,0.125,0.125,1.,1.14/,

\*IM/1,2,7,6,2,3,8,7,3,4,9,8,4,5,10,9,6,7,12,11,7,8,13,

\*12,8,9,14,13,9,10,15,14,11,12,17,16,12,13,18,17,13,14,

\*19,18,14,15,20,19,16,17,22,21,17,18,23,22,18,19,24,23,

\*19,20,25,24/,

\*RC/0.25,.5,.5,.5,0.25,.5,1.,1.,1.,.5,.5,1.,1.,1.,

\*.5,.5,1.,1.,1.,.5,0.25,.5,.5,.5,0.25/,

\*IC/1,4,7,10,13,16,19,22,25,28,31,34,37,40,43,46,49,52,55,

\*58,61,64,67,70,73/

DATA IK/14,29,44,59,74,75,72,69,66,63/,

\*KP/73/,PC/0.25/,

\*PZ/1.,2.,2.,2.,1.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,2.,4.,4.,4.,2.,

\*1.,2.,2.,2.,1./,KM/1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16/,

\*IMR/21,22,0,22,23,0,23,24,0,24,25,0,5,10,1,10,15,1,15,20,1,

\*20,25,1/,

\*RMR/0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,

\*0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2,0.125,0.2,0.2/

AN=.3

CALL EL2A(A,AK,CK,RM,IM,IC,RC,N,LS,JC,JT,IK,JM,AN,P2,P3,

\*DK,RMR,IMR,LR)

CALL SAOBR(A,LS)

CALL EL3A(A,AU,PP,PC,P4,IK,KM,IM,KP,RM,LS,IP,12,LS,JT,NG,N,

\*4,4,MU)

WRITE(3,12)

12 FORMAT(//4X,32H‚…Љ’Ћђ Џ…ђ…Њ…™…Ќ€‰ € “‡‹Ћ‚›• ‘€‹//)

DO 25 I=1,JZ

J=3\*I-2

WRITE(3,15)I,AU(J),AU(J+1),AU(J+2),PP(J),PP(J+1),PP(J+2)

15 FORMAT(I4,6F12.6)

25 CONTINUE

CALL EL5A(A,AK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3,IC,RC,JC,

\*DK,RMR,IMR,LR)

DO 40 I=1,LS

PP(I)=0.

DO 40 J=1,LS

40 PP(I)=PP(I)+A(I,J)\*AU(J)

CALL EL6A(A,BK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3)

DO 50 I=1,LS

PK(I)=0.

DO 50 J=1,LS

50 PK(I)=PK(I)+A(I,J)\*AU(J)

WRITE(3,30)

30 FORMAT(//4X,42H‚…Љ’Ћђ “‡‹Ћ‚›• ђ…ЂЉ–€‰ € ‚Ќ“’ђ…ЌЌ€• “‘€‹€‰//)

DO 28 I=1,JZ

J=3\*I-2

WRITE(3,18)I,PP(J),PP(J+1),PP(J+2),PK(J),PK(J+1),PK(J+2)

18 FORMAT(I4,6F12.6)

28 CONTINUE

CALL EL11(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,PZ,JZ,PP,PK,

\*P2,P3,P4,CK,PS,PM)

DO 47 I=1,JZ

J=3\*I-2

WRITE(3,46)I,PP(J),PP(J+1),PP(J+2),PK(J),PK(J+1),PK(J+2)

46 FORMAT(I4,6F12.6)

47 CONTINUE

WRITE(3,10)

10 FORMAT(//4X,35H‚…Љ’Ћђ› € ЏЋЏ…ђ…—Ќ›• ‘€‹ € ЏђЋѓ€ЃЋ‚)

DO 48 I=1,JZ

J=3\*I-2

WRITE(3,49)I,PM(J),PM(J+1),PM(J+2)

49 FORMAT(I4,3F12.6)

48 CONTINUE

CLOSE (3)

END

SUBROUTINE EL1(AK,RM,N,I,AN)

DIMENSION AK(12,12),RM(4,N)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

AM=(A1/A2)

AK(1,1)=(A2/A1\*\*3)\*(4.+((14.-4.\*AN)/5.)\*AM\*\*2+4.\*AM\*\*4)

AK(4,4)=AK(1,1)

AK(7,7)=AK(1,1)

AK(10,10)=AK(1,1)

AK(2,2)=(4./(3.\*AM))+((4.-4.\*AN)/15.)\*AM

AK(5,5)=AK(2,2)

AK(8,8)=AK(2,2)

AK(11,11)=AK(2,2)

AK(3,3)=((4.\*AM)/3.)+((4.-4.\*AN)/15.\*AM)

AK(6,6)=AK(3,3)

AK(9,9)=AK(3,3)

AK(12,12)=AK(3,3)

AK(1,2)=(A2/A1\*\*2)\*(2.+((1.+4.\*AN)/5.)\*AM\*\*2)

AK(2,1)=AK(1,2)

AK(4,5)=-AK(1,2)

AK(5,4)=-AK(1,2)

AK(7,8)=-AK(1,2)

AK(8,7)=-AK(1,2)

AK(10,11)=AK(1,2)

AK(11,10)=AK(1,2)

AK(1,3)=(A1/A2\*\*2)\*(2.+(1.+4.\*AN)/5.\*AM\*\*2)

AK(3,1)=AK(1,3)

AK(4,6)=AK(1,3)

AK(6,4)=AK(1,3)

AK(7,9)=-AK(1,3)

AK(9,7)=-AK(1,3)

AK(10,12)=-AK(1,3)

AK(12,10)=-AK(1,3)

AK(2,3)=AN

AK(3,2)=AK(2,3)

AK(5,6)=-AK(2,3)

AK(6,5)=-AK(2,3)

AK(8,9)=AK(2,3)

AK(9,8)=AK(2,3)

AK(11,12)=-AK(2,3)

AK(12,11)=-AK(2,3)

AK(1,4)=(A2/A1\*\*3)\*(-4.-((14.-4.\*AN)/5.)\*AM\*\*2+2.\*AM\*\*4)

AK(4,1)=AK(1,4)

AK(7,10)=AK(1,4)

AK(10,7)=AK(1,4)

AK(1,10)=(A2/A1\*\*3)\*(2.+((4.\*AN-14.)/5.)\*AM\*\*2-4.\*AM\*\*4)

AK(10,1)=AK(1,10)

AK(4,7)=AK(1,10)

AK(7,4)=AK(1,10)

AK(1,5)=(A2/A1\*\*2)\*(2.+((1.-AN)/5.)\*AM\*\*2)

AK(5,1)=AK(1,5)

AK(2,4)=-AK(1,5)

AK(4,2)=-AK(1,5)

AK(7,11)=-AK(1,5)

AK(11,7)=-AK(1,5)

AK(8,10)=AK(1,5)

AK(10,8)=AK(1,5)

AK(2,5)=((2./(3.\*AM))-((1.-AN)/15.)\*AM)

AK(5,2)=AK(2,5)

AK(8,11)=AK(2,5)

AK(11,8)=AK(2,5)

AK(1,6)=(A1/A2\*\*2)\*(1.-(1.+4.\*AN)/5.\*AM\*\*2)

AK(6,1)=AK(1,6)

AK(3,4)=AK(1,6)

AK(4,3)=AK(1,6)

AK(7,12)=-AK(1,6)

AK(12,7)=-AK(1,6)

AK(9,10)=-AK(1,6)

AK(10,9)=-AK(1,6)

AK(3,6)=((2.\*AM)/3.)-((4.-4.\*AN)/15.\*AM)

AK(6,3)=AK(3,6)

AK(9,12)=AK(3,6)

AK(12,9)=AK(3,6)

AK(1,11)=(A2/A1\*\*2)\*(1.-((1.+4.\*AN)/5.)\*AM\*\*2)

AK(11,1)=AK(1,11)

AK(2,10)=AK(1,11)

AK(10,2)=AK(1,11)

AK(4,8)=-AK(1,11)

AK(8,4)=-AK(1,11)

AK(5,7)=-AK(1,11)

AK(7,5)=-AK(1,11)

AK(1,12)=(A1/A2\*\*2)\*(2.+(1.-AN)/5.\*AM\*\*2)

AK(12,1)=AK(1,12)

AK(3,10)=-AK(1,12)

AK(10,3)=-AK(1,12)

AK(4,9)=AK(1,12)

AK(9,4)=AK(1,12)

AK(6,7)=-AK(1,12)

AK(7,6)=-AK(1,12)

AK(1,7)=(A2/A1\*\*3)\*(-2.+((14.-4.\*AN)/5.)\*AM\*\*2-2.\*AM\*\*4)

AK(7,1)=AK(1,7)

AK(4,10)=AK(1,7)

AK(10,4)=AK(1,7)

AK(1,8)=(A2/A1\*\*2)\*(1.-((1.-AN)/5.)\*AM\*\*2)

AK(8,1)=AK(1,8)

AK(2,7)=-AK(1,8)

AK(7,2)=-AK(1,8)

AK(4,11)=-AK(1,8)

AK(11,4)=-AK(1,8)

AK(5,10)=AK(1,8)

AK(10,5)=AK(1,8)

AK(1,9)=(A1/A2\*\*2)\*(1.-(1.-AN)/5.\*AM\*\*2)

AK(9,1)=AK(1,9)

AK(3,7)=-AK(1,9)

AK(7,3)=-AK(1,9)

AK(4,12)=AK(1,9)

AK(12,4)=AK(1,9)

AK(6,10)=-AK(1,9)

AK(10,6)=-AK(1,9)

AK(2,11)=(2./(3.\*AM))-(((4.-4.\*AN)/15.)\*AM)

AK(11,2)=AK(2,11)

AK(5,8)=AK(2,11)

AK(8,5)=AK(2,11)

AK(2,8)=(1./(3.\*AM))+(((1.-AN)/15.)\*AM)

AK(8,2)=AK(2,8)

AK(5,11)=AK(2,8)

AK(11,5)=AK(2,8)

AK(3,9)=(AM/3.)+((1.-AN)/15.\*AM)

AK(9,3)=AK(3,9)

AK(6,12)=AK(3,9)

AK(12,6)=AK(3,9)

AK(3,12)=((2.\*AM)/3.)-((1.-AN)/15.\*AM)

AK(12,3)=AK(3,12)

AK(6,9)=AK(3,12)

AK(9,6)=AK(3,12)

AK(2,6)=0.

AK(6,2)=0.

AK(2,9)=0.

AK(9,2)=0.

AK(2,12)=0.

AK(12,2)=0.

AK(3,5)=0.

AK(5,3)=0.

AK(3,8)=0.

AK(8,3)=0.

AK(3,11)=0.

AK(11,3)=0.

AK(5,9)=0.

AK(9,5)=0.

AK(5,12)=0.

AK(12,5)=0.

AK(6,8)=0.

AK(8,6)=0.

AK(6,11)=0.

AK(11,6)=0.

AK(8,12)=0.

AK(12,8)=0.

AK(9,11)=0.

AK(11,9)=0.

DO 10 K=1,12

DO 10 J=1,12

10 AK(K,J)=RM(3,I)\*AK(K,J)

RETURN

END

SUBROUTINE EL2A(A,AK,CK,RM,IM,IC,RC,N,LS,JC,JT,IK,JM,AN,

\*P2,P3,DK,RMR,IMR,LR)

DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),CK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),RC(JC),

\*IC(JC),IK(JT),JM(4),P2(12),P3(12),DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)

DO 1 I=1,LS

DO 1 J=1,LS

1 A(I,J)=0.

DO 2 M=1,N

CALL EL8(AK,RM,N,M,AN,CK,P2,P3)

DO 10 I=1,12

DO 10 J=1,12

10 AK(I,J)=CK(I,J)

IA=-3

JM(1)=IM(1,M)

JM(2)=IM(2,M)

JM(3)=IM(3,M)

JM(4)=IM(4,M)

DO 3 I=1,4

IA=IA+3

DO 3 IX=1,3

MX=3\*IM(I,M)-3+IX

JX=IX+IA

DO 3 MT=1,3

J1=3\*JM(1)-3+MT

J2=3\*JM(2)-3+MT

J3=3\*JM(3)-3+MT

J4=3\*JM(4)-3+MT

A(MX,J1)=A(MX,J1)+AK(JX,MT)

A(MX,J2)=A(MX,J2)+AK(JX,MT+3)

A(MX,J3)=A(MX,J3)+AK(JX,MT+6)

3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+AK(JX,MT+9)

2 CONTINUE

CALL EL3(A,DK,IMR,RMR,LS,LR)

DO 5 I=1,JC

M=IC(I)

5 A(M,M)=A(M,M)+RC(I)

DO 6 I=1,JT

M=IK(I)

DO 6 J=1,LS

IF (J-M)6,8,6

8 DO 9 K=1,LS

A(M,K)=0.

9 A(K,M)=0.

A(M,M)=1.

6 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE EL2(DK,RMR,IMR,LR,I)

DIMENSION DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)

DO 100 J=1,6

DO 100 K=1,6

100 DK(J,K)=0.

B3=1./RMR(1,I)\*\*3

B2=1./RMR(1,I)\*\*2

B1=1./RMR(1,I)

IF(IMR(3,I)-1)103,104,104

103 DK(1,1)=12.\*B3

DK(1,2)=6.\*B2

DK(1,4)=-DK(1,1)

DK(1,5)=DK(1,2)

DK(2,2)=4.\*B1

DK(2,4)=-DK(1,2)

DK(2,5)=2.\*B1

DK(3,3)=RMR(3,I)\*B1

DK(3,6)=-DK(3,3)

DK(4,4)=DK(1,1)

DK(4,5)=-DK(1,2)

DK(5,5)=DK(2,2)

DK(6,6)=DK(3,3)

GO TO 105

104 DK(1,1)=12.\*B3

DK(1,3)=6.\*B2

DK(1,4)=-DK(1,1)

DK(1,6)=DK(1,3)

DK(2,2)=RMR(3,I)\*B1

DK(2,5)=-DK(2,2)

DK(3,3)=4.\*B1

DK(3,4)=-DK(1,3)

DK(3,6)=2.\*B1

DK(4,4)=DK(1,1)

DK(4,6)=-DK(1,3)

DK(5,5)=DK(2,2)

DK(6,6)=DK(3,3)

105 L=0

DO 101 J=2,6

L=L+1

DO 101 K=1,L

101 DK(J,K)=DK(K,J)

DO 102 J=1,6

DO 102 K=1,6

102 DK(J,K)=DK(J,K)\*RMR(2,I)

RETURN

END

SUBROUTINE EL3(A,DK,IMR,RMR,LS,LR)

DIMENSION A(LS,LS),DK(6,6),IMR(3,LR),RMR(3,LR)

DO 104 M=1,LR

CALL EL2(DK,RMR,IMR,LR,M)

IA=-3

DO 105 I=1,2

IA=IA+3

DO 105 IX=1,3

MX=3\*IMR(I,M)-3+IX

JX=IX+IA

DO 105 MT=1,3

J1=3\*IMR(1,M)-3+MT

J2=3\*IMR(2,M)-3+MT

A(MX,J1)=A(MX,J1)+DK(JX,MT)

105 A(MX,J2)=A(MX,J2)+DK(JX,MT+3)

104 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE SAOBR(A,N)

DIMENSION A(N,N)

C Џђ€‚…„…Ќ€… Љ ’ђ…“ѓЋ‹њЌ›Њ ЊЂ’ђ€–ЂЊ

DO 1 J=1,N

IM=J-1

DO 1 I=J,N

X=0.

Y=0.

DO 2 K=1,IM

IF (IM-1) 4,3,3

4 RKJ=0.

TIK=0.

RKI=0.

TJK=0.

GO TO 5

3 RKJ=A(K,J)

TIK=A(I,K)

RKI=A(K,I)

TJK=A(J,K)

5 X=X+TIK\*RKJ

2 Y=Y+TJK\*RKI

IF (I-J) 6,7,6

7 A(I,J)=A(I,J)-X

GO TO 1

6 A(I,J)=A(I,J)-X

A(J,I)=(A(J,I)-Y)/A(J,J)

1 CONTINUE

C ЋЃђЂ™…Ќ€… ’ђ…“ѓЋ‹њЌ›• ЊЂ’ђ€–

IM=N-1

DO 12 I=1,IM

IS=I+1

DO 12 J=IS,N

L=J-1

X=0.

DO 13 K=I,L

IF (K-I) 15,14,15

14 CIK=1.

RKJ=A(K,J)

GO TO 13

15 CIK=A(I,K)

RKJ=A(K,J)

13 X=X+CIK\*RKJ

12 A(I,J)=-X

DO 16 I=1,N

16 A(I,I)=1./A(I,I)

DO 20 LI=1,IM

I=N+1-LI

IS=I-1

DO 20 JM=1,IS

J=IS+1-JM

IX=J+1

X=0.

DO 22 K=IX,I

SIK=A(I,K)

TKJ=A(K,J)

22 X=X+SIK\*TKJ

20 A(I,J)=-X\*A(J,J)

C ЌЂ•Ћ†„…Ќ€… ЋЃђЂ’ЌЋ‰ ЊЂ’ђ€–›

DO 40 I=1,N

DO 40 J=1,N

X=0.

DO 41 L=J,N

IF (I-L) 42,43,45

45 CIL=0.

SLJ=0.

GO TO 41

43 CIL=1.

SLJ=A(L,J)

GOTO 41

42 CIL=A(I,L)

SLJ=A(L,J)

41 X=X+CIL\*SLJ

40 A(I,J)=X

RETURN

END

SUBROUTINE EL3A(A,AU,RA,PC,RB,IK,KM,IM,KP,RM,LS,IP,N1,N2,

\*JT,NG,N,K1,K2,MU)

DIMENSION A(LS,LS),RA(LS),PC(IP),RB(N1),IK(JT),KM(NG),

\*IM(K1,N),RM(K2,N),AU(LS),KP(IP)

DO 15 I=1,LS

15 RA(I)=0.

IF(MU-1)81,84,84

81 CALL SAP07(RB,RA,IM,RM,KM,N,NG,N1,N2,K1,K2)

DO 82 I=1,JT

M=IK(I)

DO 82 J=1,LS

IF(J-M)82,83,82

83 RA(M)=0.

82 CONTINUE

GO TO 85

84 DO 16 I=1,IP

M=KP(I)

16 RA(M)=PC(I)

85 DO 17 I=1,LS

AU(I)=0.

DO 17 J=1,LS

17 AU(I)=AU(I)+A(I,J)\*RA(J)

RETURN

END

SUBROUTINE SAP07(RB,RA,IM,RM,KM,N,NG,N1,N2,K1,K2)

DIMENSION KM(NG),RB(N1),RA(N2),IM(K1,N),RM(K2,N)

DO 6 I=1,N2

6 RA(I)=0.

DO 4 M=1,NG

M1=KM(M)

X=RM(1,M1)

Y=RM(2,M1)

DO 1 I=1,10,3

1 RB(I)=X\*Y/4.

DO 2 I=2,11,9

2 RB(I)=Y\*X\*\*2/24.

DO 3 I=1,4,3

RB(I+4)=-Y\*X\*\*2/24.

RB(I+2)=X\*Y\*\*2/24.

3 RB(I+8)=-X\*Y\*\*2/24.

IA=-3

DO 5 I=1,4

IA=IA+3

DO 5 IX=1,3

MX=3\*IM(I,M1)-3+IX

JX=IX+IA

5 RA(MX)=RA(MX)+RB(JX)

4 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE EL4(BK,RM,N,I,AN)

DIMENSION BK(12,12),RM(4,N)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

DO 29 L=1,12

DO 29 M=1,12

BK(L,M)=0.

29 BK(M,L)=0.

BK(1,1)=-(1.-AN)/(A1\*A2)

BK(1,2)=-(1.-AN)/A2

BK(1,3)=-(1.-AN)/A1

BK(1,4)=-BK(1,1)

BK(1,6)=-BK(1,3)

BK(1,7)=BK(1,1)

BK(1,10)=-BK(1,1)

BK(1,11)=-BK(1,2)

BK(2,1)=(-6./(A1\*\*2))-((6.\*AN)/(A2\*\*2))

BK(2,2)=-4./A1

BK(2,3)=(-4.\*AN)/A2

BK(2,4)=6./(A1\*\*2)

BK(2,5)=-2./A1

BK(2,10)=(6.\*AN)/(A2\*\*2)

BK(2,12)=(-2.\*AN)/A2

BK(3,1)=(-6./(A2\*\*2))-((6.\*AN)/(A1\*\*2))

BK(3,2)=(-4.\*AN)/A1

BK(3,3)=-4./A2

BK(3,4)=(6.\*AN)/(A1\*\*2)

BK(3,5)=(-2.\*AN)/A1

BK(3,10)=6./(A2\*\*2)

BK(3,12)=-2./A2

BK(4,1)=BK(1,1)

BK(4,3)=BK(1,3)

BK(4,4)=BK(1,4)

BK(4,5)=BK(1,2)

BK(4,6)=-BK(1,3)

BK(4,7)=BK(1,1)

BK(4,8)=-BK(1,2)

BK(4,10)=BK(1,4)

BK(5,1)=BK(2,4)

BK(5,2)=-BK(2,5)

BK(5,4)=BK(2,1)

BK(5,5)=-BK(2,2)

BK(5,6)=BK(2,3)

BK(5,7)=BK(2,10)

BK(5,9)=BK(2,12)

BK(6,1)=BK(3,4)

BK(6,2)=-BK(3,5)

BK(6,4)=BK(3,1)

BK(6,5)=-BK(3,2)

BK(6,6)=BK(3,3)

BK(6,7)=BK(3,10)

BK(6,9)=BK(3,12)

BK(7,1)=BK(4,1)

BK(7,4)=BK(4,4)

BK(7,5)=BK(4,5)

BK(7,7)=BK(4,1)

BK(7,8)=BK(4,8)

BK(7,9)=BK(4,6)

BK(7,10)=BK(4,10)

BK(7,12)=BK(4,3)

BK(8,4)=BK(5,7)

BK(8,6)=-BK(5,9)

BK(8,7)=BK(5,4)

BK(8,8)=BK(5,5)

BK(8,9)=-BK(5,6)

BK(8,10)=BK(5,1)

BK(8,11)=BK(5,2)

BK(9,4)=BK(6,7)

BK(9,6)=-BK(6,9)

BK(9,7)=BK(6,4)

BK(9,8)=BK(6,5)

BK(9,9)=-BK(6,6)

BK(9,10)=BK(6,1)

BK(9,11)=BK(6,2)

BK(10,1)=BK(7,1)

BK(10,2)=BK(7,5)

BK(10,4)=-BK(7,1)

BK(10,7)=BK(7,1)

BK(10,9)=BK(7,9)

BK(10,10)=BK(7,10)

BK(10,11)=BK(7,8)

BK(10,12)=BK(7,12)

BK(11,1)=BK(8,4)

BK(11,3)=BK(8,6)

BK(11,7)=BK(8,10)

BK(11,8)=-BK(8,11)

BK(11,10)=BK(8,7)

BK(11,11)=-BK(8,8)

BK(11,12)=BK(8,9)

BK(12,1)=BK(9,4)

BK(12,3)=BK(9,6)

BK(12,7)=BK(9,10)

BK(12,8)=-BK(9,11)

BK(12,10)=BK(9,7)

BK(12,11)=-BK(9,8)

BK(12,12)=BK(9,9)

DO 44 L=1,10,3

DO 44 J=1,12

44 BK(L,J)=2.\*BK(L,J)

DO 45 L=1,12

DO 45 M=1,12

45 BK(L,M)=BK(L,M)\*RM(3,I)

RETURN

END

SUBROUTINE EL5A(A,AK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3,IC,RC,JC,

\*DK,RMR,IMR,LR)

DIMENSION A(LS,LS),AK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),JM(4),CK(12,12),

\*P2(12),P3(12),IC(JC),RC(JC),DK(6,6),RMR(3,LR),IMR(3,LR)

DO 1 I=1,LS

DO 1 J=1,LS

1 A(I,J)=0.

DO 2 M=1,N

CALL EL8(AK,RM,N,M,AN,CK,P2,P3)

DO 5 I=1,12

DO 5 J=1,12

5 AK(I,J)=CK(I,J)

IA=-3

JM(1)=IM(1,M)

JM(2)=IM(2,M)

JM(3)=IM(3,M)

JM(4)=IM(4,M)

DO 3 I=1,4

IA=IA+3

DO 3 IX=1,3

MX=3\*IM(I,M)-3+IX

JX=IX+IA

DO 3 MT=1,3

J1=3\*JM(1)-3+MT

J2=3\*JM(2)-3+MT

J3=3\*JM(3)-3+MT

J4=3\*JM(4)-3+MT

A(MX,J1)=A(MX,J1)+AK(JX,MT)

A(MX,J2)=A(MX,J2)+AK(JX,MT+3)

A(MX,J3)=A(MX,J3)+AK(JX,MT+6)

3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+AK(JX,MT+9)

2 CONTINUE

CALL EL3(A,DK,IMR,RMR,LS,LR)

DO 6 I=1,JC

M=IC(I)

6 A(M,M)=A(M,M)+RC(I)

RETURN

END

SUBROUTINE EL6A(A,BK,RM,IM,N,LS,JM,AN,CK,P2,P3)

DIMENSION A(LS,LS),BK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),JM(4),

\*CK(12,12),P2(12),P3(12)

DO 1 I=1,LS

DO 1 J=1,LS

1 A(I,J)=0.

DO 2 M=1,N

CALL EL9(BK,RM,N,M,AN,CK,P2,P3)

DO 6 I=1,12

DO 6 J=1,12

6 BK(I,J)=CK(I,J)

IA=-3

JM(1)=IM(1,M)

JM(2)=IM(2,M)

JM(3)=IM(3,M)

JM(4)=IM(4,M)

DO 3 I=1,4

IA=IA+3

DO 3 IX=1,3

MX=3\*IM(I,M)-3+IX

JX=IX+IA

DO 3 MT=1,3

J1=3\*JM(1)-3+MT

J2=3\*JM(2)-3+MT

J3=3\*JM(3)-3+MT

J4=3\*JM(4)-3+MT

A(MX,J1)=A(MX,J1)+BK(JX,MT)

A(MX,J2)=A(MX,J2)+BK(JX,MT+3)

A(MX,J3)=A(MX,J3)+BK(JX,MT+6)

3 A(MX,J4)=A(MX,J4)+BK(JX,MT+9)

2 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE EL7(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,I,K1,CK,P2,P3)

DIMENSION AK(12,12),IM(4,N),RM(4,N),P(12),W(12),AU(LS),

\*CK(12,12),P2(12),P3(12)

I1=3\*IM(1,I)-2

I2=3\*IM(2,I)-2

I3=3\*IM(3,I)-2

I4=3\*IM(4,I)-2

IA=-1

DO 40 K=1,3

IA=IA+1

W(1+IA)=AU(I1+IA)

W(4+IA)=AU(I2+IA)

W(7+IA)=AU(I3+IA)

40 W(10+IA)=AU(I4+IA)

IF(K1-2)80,81,83

80 CALL EL8(AK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

GO TO 82

81 CALL EL9(AK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

GO TO 82

83 CALL EL6(AK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

82 DO 42 K=1,12

P(K)=0.

DO 42 L=1,12

42 P(K)=P(K)+CK(K,L)\*W(L)

RETURN

END

SUBROUTINE EL11(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,PZ,JZ,PP,PK,P2,P3,P4,

\*CK,PS,PM)

DIMENSION AK(12,12),RM(4,N),IM(4,N),W(12),AU(LS),PZ(JZ),

\*PP(LS),P(12),CK(12,12),P2(12),P3(12),P4(12),PK(LS),

\*PS(12),PM(LS)

DO 102 J=1,LS

PP(J)=0.

PM(J)=0.

102 PK(J)=0.

DO 100 I=1,N

J1=3\*IM(1,I)-2

J2=3\*IM(2,I)-2

J3=3\*IM(3,I)-2

J4=3\*IM(4,I)-2

CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,P,N,AN,LS,I,1,CK,P2,P3)

CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,P4,N,AN,LS,I,2,CK,P2,P3)

CALL EL7(AK,RM,IM,AU,W,PS,N,AN,LS,I,3,CK,P2,P3)

IA=-1

DO 101 K=1,3

IA=IA+1

PP(J1+IA)=PP(J1+IA)+P(1+IA)

PP(J2+IA)=PP(J2+IA)+P(4+IA)

PP(J3+IA)=PP(J3+IA)+P(7+IA)

PP(J4+IA)=PP(J4+IA)+P(10+IA)

PM(J1+IA)=PM(J1+IA)+PS(1+IA)

PM(J2+IA)=PM(J2+IA)+PS(4+IA)

PM(J3+IA)=PM(J3+IA)+PS(7+IA)

PM(J4+IA)=PM(J4+IA)+PS(10+IA)

PK(J1+IA)=PK(J1+IA)+P4(1+IA)

PK(J2+IA)=PK(J2+IA)+P4(4+IA)

PK(J3+IA)=PK(J3+IA)+P4(7+IA)

101 PK(J4+IA)=PK(J4+IA)+P4(10+IA)

100 CONTINUE

DO 103 M=1,JZ

IA=-1

DO 103 K=1,3

IA=IA+1

J=3\*M-2

PM(J+IA)=PM(J+IA)/PZ(M)

PP(J+IA)=PP(J+IA)/PZ(M)

103 PK(J+IA)=PK(J+IA)/PZ(M)

RETURN

END

SUBROUTINE EL9(AK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

DIMENSION AK(12,12),RM(4,N),CK(12,12),P2(12),P3(12)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

AM=A2/A1

T1=RM(4,I)

G1=-(T1/(1+12.\*T1))

T2=RM(4,I)/(AM\*\*2)

G2=-(T2/(1+12.\*T2))

CALL EL4(AK,RM,N,I,AN)

DO 60 M1=1,12

P2(M1)=(AK(M1,2)+AK(M1,5)+AK(M1,8)+AK(M1,11))\*G1

60 P3(M1)=(AK(M1,3)+AK(M1,6)+AK(M1,9)+AK(M1,12))\*G2

AZ=AN\*AM

DO 85 M1=1,12

CK(M1,1)=AK(M1,1)+(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,2)=AK(M1,2)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,3)=AK(M1,3)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,4)=AK(M1,4)+(6./A1)\*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,5)=AK(M1,5)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

CK(M1,6)=AK(M1,6)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,7)=AK(M1,7)-(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,8)=AK(M1,8)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,9)=AK(M1,9)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,10)=AK(M1,10)+(6./A1)\*(P2(M1)-P3(M1)/AM)

CK(M1,11)=AK(M1,11)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

85 CK(M1,12)=AK(M1,12)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

RETURN

END

SUBROUTINE EL8(AK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

DIMENSION AK(12,12),RM(4,N),CK(12,12),P2(12),P3(12)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

AM=A2/A1

T1=RM(4,I)

G1=-(T1/(1+12.\*T1))

T2=RM(4,I)/(AM\*\*2)

G2=-(T2/(1+12.\*T2))

CALL EL1(AK,RM,N,I,AN)

DO 60 M1=1,12

P2(M1)=(AK(M1,2)+AK(M1,5)+AK(M1,8)+AK(M1,11))\*G1

60 P3(M1)=(AK(M1,3)+AK(M1,6)+AK(M1,9)+AK(M1,12))\*G2

AZ=AN\*AM

DO 85 M1=1,12

CK(M1,1)=AK(M1,1)+(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,2)=AK(M1,2)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,3)=AK(M1,3)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,4)=AK(M1,4)+(6./A1)\*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,5)=AK(M1,5)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

CK(M1,6)=AK(M1,6)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,7)=AK(M1,7)-(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,8)=AK(M1,8)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,9)=AK(M1,9)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,10)=AK(M1,10)+(6./A1)\*(P2(M1)-P3(M1)/AM)

CK(M1,11)=AK(M1,11)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

85 CK(M1,12)=AK(M1,12)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

RETURN

END

SUBROUTINE EL6(TK,RM,N,I,AN,CK,P2,P3)

DIMENSION TK(12,12),RM(4,N),CK(12,12),P2(12),P3(12)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

AM=A2/A1

T1=RM(4,I)

G1=T1/(1+12.\*T1)

T2=RM(4,I)/(AM\*\*2)

G2=T2/(1+12.\*T2)

CALL EL5(TK,RM,N,I)

DO 60 M1=1,12

P2(M1)=(TK(M1,2)+TK(M1,5)+TK(M1,8)+TK(M1,11))\*G1

60 P3(M1)=(TK(M1,3)+TK(M1,6)+TK(M1,9)+TK(M1,12))\*G2

AZ=AN\*AM

DO 85 M1=1,12

CK(M1,1)=TK(M1,1)+(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,2)=TK(M1,2)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,3)=TK(M1,3)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,4)=TK(M1,4)+(6./A1)\*(-P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,5)=TK(M1,5)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

CK(M1,6)=TK(M1,6)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,7)=TK(M1,7)-(6./A1)\*(P2(M1)+P3(M1)/AM)

CK(M1,8)=TK(M1,8)+3.\*P2(M1)+AZ\*P3(M1)

CK(M1,9)=TK(M1,9)+AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

CK(M1,10)=TK(M1,10)+(6./A1)\*(P2(M1)-P3(M1)/AM)

CK(M1,11)=TK(M1,11)+3.\*P2(M1)-AZ\*P3(M1)

85 CK(M1,12)=TK(M1,12)-AN\*P2(M1)/AM+3.\*P3(M1)

RETURN

END

SUBROUTINE EL5(TK,RM,N,I)

DIMENSION TK(12,12),RM(4,N)

A1=RM(1,I)

A2=RM(2,I)

DO 90 L=1,12

DO 90 M=1,12

TK(L,M)=0.

90 TK(M,L)=0.

TK(1,1)=12./A1\*\*3+6./(A1\*A2\*\*2)

TK(1,2)=6./A1\*\*2

TK(1,3)=4./(A1\*A2)

TK(1,7)=6./(A1\*A2\*\*2)

TK(1,12)=2./(A1\*A2)

TK(1,4)=-TK(1,1)

TK(1,5)=TK(1,2)

TK(1,6)=-TK(1,3)

TK(1,9)=-TK(1,12)

TK(1,10)=-TK(1,7)

DO 91 L=1,12

91 TK(4,L)=TK(1,L)

TK(7,1)=-TK(1,7)

TK(7,3)=-TK(1,12)

TK(7,4)=TK(1,7)

TK(7,6)=TK(1,12)

TK(7,7)=-TK(1,1)

TK(7,8)=TK(1,2)

TK(7,9)=TK(1,3)

TK(7,10)=TK(1,1)

TK(7,11)=TK(1,2)

TK(7,12)=-TK(1,3)

DO 92 L=1,12

92 TK(10,L)=TK(7,L)

TK(2,1)=12./A2\*\*3+6./(A1\*\*2\*A2)

TK(2,2)=TK(1,3)

TK(2,3)=6./A2\*\*2

TK(2,7)=6./(A1\*\*2\*A2)

TK(2,5)=TK(1,12)

TK(2,4)=-TK(2,7)

TK(2,8)=-TK(1,12)

TK(2,10)=-TK(2,1)

TK(2,11)=-TK(1,3)

TK(2,12)=TK(2,3)

DO 93 L=1,12

93 TK(11,L)=TK(2,L)

TK(5,1)=-TK(2,7)

TK(5,2)=-TK(1,12)

TK(5,4)=TK(2,1)

TK(5,5)=-TK(1,3)

TK(5,6)=TK(2,3)

TK(5,7)=-TK(2,1)

TK(5,8)=TK(1,3)

TK(5,9)=TK(2,3)

TK(5,10)=TK(2,7)

TK(5,11)=TK(1,12)

DO 94 L=1,12

94 TK(8,L)=TK(5,L)

TK(3,1)=-6.\*(1./A1\*\*2+1./A2\*\*2)

TK(3,2)=-4./A1

TK(3,3)=-4./A2

TK(3,4)=6./A1\*\*2

TK(3,5)=-2./A1

TK(3,10)=6./A2\*\*2

TK(3,12)=-2./A2

TK(6,1)=TK(3,4)

TK(6,2)=-TK(3,5)

TK(6,4)=TK(3,1)

TK(6,5)=-TK(3,2)

TK(6,6)=TK(3,3)

TK(6,7)=TK(3,10)

TK(6,9)=TK(3,12)

TK(9,4)=TK(3,10)

TK(9,6)=-TK(3,12)

TK(9,7)=TK(3,1)

TK(9,8)=-TK(3,2)

TK(9,9)=-TK(3,3)

TK(9,10)=TK(3,4)

TK(9,11)=-TK(3,5)

TK(12,1)=TK(3,10)

TK(12,3)=-TK(3,12)

TK(12,7)=TK(3,4)

TK(12,8)=TK(3,5)

TK(12,10)=TK(3,1)

TK(12,11)=TK(3,2)

TK(12,12)=-TK(3,3)

DO 95 L=1,12

DO 95 M=1,12

95 TK(L,M)=TK(L,M)\*RM(3,I)

RETURN

END