Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті

ӘОЖ 510.67 Қолжазба құқығында

**МУСИНА НАЗЕРКЕ МУХТАРАМКЫЗЫ**

**Йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттері**

6D060100-Математика

Философия докторы (PhD)

ғылыми дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Отандық ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Ешкеев А.Р.

Шетелдік ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Судоплатов С.В. (Ресей)

Қазақстан Республикасы

Қарағанды, 2024

**МАЗМҰНЫ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР** | 3 |
|  | **КІРІСПЕ**................................................................................................. | 4 |
| **1** | **ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІНІҢ КЛАСТАРЫ**………………………………….. | 30 |
| 1.1 | Йонсондық теориялар туралы жалпы мағлұматтар............................. | 30 |
| 1.2 | Йонсондық спектр және оның қасиеттері............................................ | 33 |
| 1.3 | Толық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктер................................................................................... | 41 |
| 1.4 | Йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктер................................................................. | 44 |
| **2** | **ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ГИБРИДТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДІ-ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ** ..... | 47 |
| 2.1 | Йонсондық теориялардың гибридтерiнiң қасиеттері........................ | 47 |
| 2.2 | Йонсондық теориялардың арнайы iшкi кластары гибридтерiнiң кiшiгiрiм модельдерi.............................................................................. | 52 |
| 2.3 | ∆-*PJ* теориялардың гибридтерi............................................................ | 56 |
| 2.4 | Өзара модельді-үйлесімді фрагменттерінің централдық типтерінің алгебрасы................................................................................................................. | 60 |
| 2.5 | Гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары......... | 68 |
| 2.6 | Қатты минималды гибридтерiнiң фрагменттерiнiң теоретикалық  жиындарының геометриясы............................................................................. | 72 |
|  | **ҚОРЫТЫНДЫ**..................................................................................... | 77 |
|  | **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**................................. | 79 |

**БЕЛГІЛЕУЛЕР ЖӘНЕ ҚЫСҚАРТУЛАР**

-сигнатура

-тіл

-теория

-модельдер

*-*семантикалық модель

*-*йонсондық теорияның центрі

- теорияның барлық экзистенциалды тұйық модельдері

-косеманттылық қатынасы

-моделінің йонсондық спектрі

бойынша моделінің йонсондық спектрінің фактор жиыны

моделінің робинсондық спектрі

теориялар класы

-үйлесімді енгізілу қасиеті

-амальгама қасиеті

-йонсондық теорияның гибриді

йонсондық жиындар

–йонсондық теорияның фрагменттері

полигондар теориясы

**КІРІСПЕ**

**Жұмыстың жалпы сипаттамасы**. Диссертациялық жұмыс өз мазмұны бойынша бірінші ретті тілдің толық емес теорияларын және олардың саналымды модельдерін сипаттауды зерттеумен байланысты классикалық модельдер теориясының бөліміне жатады. Модельдер теориясының осы бағытының барлық мәселелері шартты түрде «шығыс» модельдер теориясы деп аталады. Бұл белгілеудің шарттылығы модельдер теориясының негізін салушылардың бірі, атап айтқанда, АҚШ-тың шығыс жағалауында өмір сүрген А.Робинсонның географиялық орналасуымен байланысты, сәйкесінше А.Тарский АҚШ-тың батыс жағалауында өмір сүрген. Осы екі бағыттардың арасындағы айырмашылығы шартты түрде жеткілікті екенін ескере отырып, әдетте, толық теорияларды зерттеумен байланысты классикалық мәселелер «батыс» модельдер теориясы мәселелеріне қатысты. Индуктивті теориялар класында ерекше орынды йонсондық теориялар алады, яғни амальгама және үйлесімді енгізілу қасиетіне ие теориялар. Сол йонсондық теорияны оқыту өзінің мазмұны бойынша «шығыс» модельдер теориясының мәселесіне жатады.

Йонсондық теорияның көптеген алгебралық мысалдары бар екені белгілі. Мысалы, бекітілген сипаттамамен өрістер, буль алгебрасы, группалар, абельдік группалар, сақинаның әртүрлі түрлері, торлың әртүрлі түрлері және реттер. Йонсондық теориясы оқу барысында прогреске кемел йонсондық теориялар жағдайында қол жеткізілді. Мұндай теориялардың центрі ретінде модельді компаньон болатыны белгілі болды. Мысалы, бекітілген сипаттамамен өрістің центрі бірдей сипаттамамен алгебралық тұйық өріс болып табылады. Сонымен қатар, келесі семантикалық фактіні атап өткен жөн: кемел йонсондық теорияда экзистенциалды тұйық модельдер класы оның центрінің барлық модельдерінің класымен сәйкес келеді.

Йонсондық теорияларды зерттеу аясында «шығыс» модельдер теориясының концептуалды-техникалық аппаратының дамуында белгілі бір динамикасын атап өтуге болады. Кемел дөңес йонсондық теорияларды зерттеу кезінде, жалпы айтқанда, толық емес йонсондық теориялардың арнайы класы ерекшеленеді. Осы уақытқа дейін мұндай алгебра кластарында «батыс» бағытындағы есептердің оң шешімін тапқан жағдайда да, «шығыс» бағытында шешілмеген мәселелер көп.

Бұл диссертациялық жүмыстың айрықша ерекшелігі – «Батыс» нұсқасында, бірақ «Шығыс» нұсқасында шешім табатын, біріншіден, біз оларды бұрын сипатталмаған йонсондық теориялардың гибридтері түріндегі жаңа объектілер үшін қарастырамыз. Екіншіден, бұл жаңа объектілер мен олармен байланысты синтаксистік және семантикалық ұғымдар олардың «батыс» мағынасында «толық» ұғымдарымен біршама анық емес түрде байланысты. Мұның бәрі, бір жағынан, қосымша техникалық қиындықтар туғызса, екінші жағынан, белгілі «батыс» аналогтарын сәйкес «шығыс» жаңа ұғымдарына көшірудің тривиалды еместігін және анық емес екенін көрсетеді.

Диссертациялық жұмыс екі тараудан тұрады және олар бір-бірімен тығыз байланысты. Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында йонсондық теориялардың модельді-теоретикалық қасиеттерін сипаттауға қажетті модельдер теориясының негізгі ұғымдарының анықтамалары мен теоремалары көрсетілген. Бұл тарауда йонсондық теорияның, жалпы айтқанда, толық емес теорияларды зерттеу аясында категорлылық, толықтық, синтаксистік және семантикалық ұқсастық сияқты модельдер теориясының классикалық мәселелері қарастырылды. Атап айтқанда, бұл тарауда қарастырылатын сигнатураның кез келген моделінің йонсондық спектрінің косемантылық класының саналымды және саналымды емес категорлылық мәселелері сипатталды. Сонымен бірге, жалпы айтқанда, толық емес теорияның бекітілген модельдер класына бір ғана теорияны емес, тұтас теориялар класы байланыстырылды, ол осы класстың йонсондық спектрі деп аталады. Бұл теориялар бір-бірінен белгілі бинарлық қатынасқа дейін ерекшеленеді, бұл модельдер арасындағы эквиваленттік қатынастың классикалық тұжырымдамасын жалпылау және кейбір жағдайларда тіпті нақтылау болып табылады. Және де, структуралардың ерекше кластарының йонсондық спектрлерін зерттеу аясында модельдер теориясының классикалық теоремаларына (М. Морли, Д. Сарачино және П. Линдстрем) қатысты теоремалар берілген. Йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа және өзекті әдісі теорияларды синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарды қолдана отырып зерттеу болғандықтан осы тарауда синтаксистік және семантикалық ұқсастықтар толық теориялар үшін және йонсондық теориялар үшін қарастырылды.

Диссертациялық жұмыстың екінші тарауы негізгі тарау болып табылады. Бұл тарауда йонсондық теориялардың гибридтерiнiң модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылған. Яғни, йонсондық теориялардың арнайы iшкi кластары гибридтерiнiң кiшiгiрiм модельдерi, позитивті йонсондық теориялардың гибридтері, гибридтердiң фрагменттерiнiң теоретикалық жиындарының геометриясы мен гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары сипатталған. Сонымен бірге өзара модельді-үйлесімді фрагменттердің централдық типтерінің алгебрасының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылған. Бұл параграфта йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық моделінің сыртқы және ішкі әлемдері, екі экзистенциалды тұйық модельдердің -салыстыруы, централдық типтің алгебрасы сипатталған.

**Тақырыптың қазіргі жағдайы және өзектілігі.** Бұл жұмыс кейінгі кезде пайда болған модельдер теориясының негізгі бір бағыты болып есептелінеді. Модельдер теориясы бүгінгі таңда математика ғылымының жеке бөлімі. Кез келген ғылым секілді моделдер теориясы да өзінің зерттеу өрісі бар. Зерттеудің негізгі объектілері модельдер (структуралар, алгебралық жүйелер). Ең негізгі зерттеу құралы болып математикалық логиканың тілі саналады, нақтырақ айтсақ бірінші реттегі предикаттық есептеу. Бұл жұмыста біздің бір келісім шартты – қарастырылған нәтижелер саналымды тілдің аясында алынған.

Йонсондық теорияларды зерттеудегі жаңа бағыттардың бірі - йонсондық теориялардың гибридтері тақырыбы. Бұл жұмыста йонсондық теориялардың жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері, атап айтқанда бір тілдің екі мүлдем басқа йонсондық теорияларының семантикалық модельдерінің әртүрлі алгебралық құрылымларының көмегімен алынған теориялар қарастырылады. Мұндай теориялар гибридтер деп аталды.

Диссертациялық жұмыста бекітілген гибридтердің әртүрлі компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттері зерттеледі. Теориялардың мұндай қасиеттеріне қазіргі модельдер теориясының барлық дерлік классикалық атрибуттары жатады, мысалы, тұрақтылық, категорлылық, қатты минималдылық, модельді толықтық, аксиоматизациялау, интерпретациялау, спектрлік мәселелер және т.б. Семантикалық аспектіге келетін болсақ, бізді келесі ұғымдарға қатысты гибридтің семантикалық моделінің анықталатын формулалық ішкі жиындары тұжырымдамасымен байланысты әртүрлі қасиеттер қызықтырады: атомдық, алгебралық жайлылық, экзистенциалдық тұйықтық, дөңестік. Теориялардың тағы да дербес қасиеті ол - экзистенциалды жайлылық. Бұл жұмыс бойынша әрқашанда осы айтылған шарттар қарастырылып отырған объектілерге орындалады.

Жоғарыда айтылғандарды ескере отырып, бұл тақырыптың өзектілігі мен жаңалығы күмән тудырмайды.

**Жұмыстың негізгі мақсаты және ғылыми жаңалығы.**

**Зерттеудің негізгі мақсаты.** Диссертацияның негізгі мақсаты йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу болып табылады. Сонымен бірге гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары, позитивті йонсондық теориялардың гибридтері, йонсондық теориялардың гибридтерiнiң кiшiгiрiм модельдерiнің арнайы iшкi кластары зерттеледі.

**Зерттеу міндеттері:**

Йонсондық теориялардың гибридтері жаңа ұғым болғаннан кейін көп жағынан әлі зерттелмеген объекттер. Біздің негізгі мақсатымыз осы жаңа объекті қолымыздан келгенше неғұрлым модельді-теоретикалық қасиеттер бойынша зерттеу. Осы бағыт бойынша біз йонсондық теориялардың гибридтерін келесі белгілі модельді-теоретикалық ұғымдар аясында зерттеуге тырыстық. Егер осы қасиеттерді тізімдесек, олар алдыңғы пункте айтылған. Дегенмен, біз осы диссертациялық жұмыста келесі нәтижелерді қарастырдық:

1. Экзистенциалды жай дөңес ∀∃-толық йонсондық теориялардың класындағы модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылады.
2. Кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының модельді-теоретикалық қасиеттеріне байланысты нәтиже алынады. Қарастырылып отырған фрагменттердің гибридінің құрамында арнайы ядролық ішкі жиын, анықталған тұйықталу бар, ол қарастырылып отырған теорияның алгебралық жай моделі болып табылатын кейбір экзистенциалды тұйық модельмен беріледі.
3. Йонсондық позитивті теориялардың фрагменттерінің гибридтерінің модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылады.
4. Йонсондық теорияның екі экзистенциалды тұйық модельдері үшін сыртқы және ішкі дүниелер арасындағы байланыстың ерекшелігі қарастырылады.
5. Бекітілген Робинсон спектрінің мұрагер косемантылық класының централдық типінің қатты минималдылығы тілінде саналымсыз категорлылықтың критерийі алынады.
6. Бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық компаньонының косеманттылық кластарының гибридтерінің синтаксистік ұқсастығының критерийі алынады.
7. Кез келген кемел йонсондық гибрид үшін кейбір синтаксистік ұқсас полигон теорияларының табылуы зерттеледі.

**Зерттеу объектісі.** Зерттеу обьектісі – йонсондық теориялар және оларға тиісті модельдердің кластары.

**Зерттеу нысаны.** Зерттеу нысаны болып йонсондық теориялардың гибридтері мен олардың модельдер кластары болып табылады. Атап айтқанда, йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттері.

**Зерттеу әдістемесі.** Диссертацияның зерттеу әдістеріне модельдер теориясының барлық классикалық әдістері және сондай ақ соңғы уақытта белсенді түрде қолданып жатқан семантикалық әдісі жатады. Бұл әдістің мағынасы бірінші ретті предикаттар есептеуінің қасиеттерін қарастырылып отырған йонсондық теорияның осы теорияның өзіне көшіру болып табылады. Сонымен қатар, йонсондық теориялардың гибридтерінің компаньондарын оқып-зерттеудің семантикалық әдістері қолданылады.

**Ғылыми жаңалығы.** Бұл тақырыпқа сайбарлық ұғымдар жаңадан анықталған ұғымдар болып табылғаннан кейін, алынған және жарияланған барлық нәтижелер осы диссертацияның мақсаттарының жалпылығына байланысты аналогтары жоқ.

**Зерттеу жұмысының теориялық және практикалық маңыздылығы.** Біріншіден,алынған тұжырымдар өзінің сипаты бойыншатеоретикалыққұндылығын атқарады.Екіншіден, диссертациялық жұмыстағы алынған нәтижелер өзінің негізгісі бойынша модельдер теориясының іргетас тұғырын дамытуға өз үлесін қосуға әбден ықтимал. Өйткені, бұл диссертациялық жұмыстағы барлық есептердің ұстамалары, «шығыс» бағытқа ие болғаннан кейін көп жағынан жалпылама және нақтылаулықты білдіреді.

**Қорғауға шығарылатын негізгі нәтижелер:**

Қорғауға шығарылады:

1. Экзистенциалды жай дөңес ∀∃-толық йонсондық теориялардың класындағы модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылды.
2. Кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының модельді-теоретикалық қасиеттеріне байланысты нәтиже алынады. Қарастырылып отырған фрагменттердің гибридінің құрамында арнайы ядролық ішкі жиын, анықталған тұйықталу бар, ол қарастырылып отырған теорияның алгебралық жай моделі болып табылатын кейбір экзистенциалды тұйық модельмен беріеді.
3. Йонсондық позитивті теориялардың фрагменттерінің гибридтерінің модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылды.
4. Йонсондық теориясының екі экзистенциалды тұйық модельдері үшін сыртқы және ішкі дүниелер арасындағы байланыстың ерекшелігі қарастырылды.
5. Бекітілген Робинсон спектрінің мұрагер косемантылық класының централдық типінің қатты минималдылығы тілінде саналымсыз категорлылықтың критерийі алынды.
6. Бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық компаньонының косеманттылық кластарының гибридтерінің синтаксистік ұқсастығының критерийі алынды.
7. Кез келген кемел йонсондық гибрид үшін кейбір синтаксистік ұқсас полигон теорияларының табылуы зерттелді.

**Сенімділік және негізділік.** Жұмыста қолданылған әдістердің конструктивтілігі зерттеудің сенімділігі мен негізділігін қамтамасыз етеді. Жалпы тұжырымдар теоремалар түрінде құрылған және олардың дәлелдеулері берілген.

**Жұмысты апробациялау.**

Диссертацияның негізгі нәтижелері келесі конференциялар мен семинарларда дәлелденді және талқыланды:

* VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory (Лион: Клод Бернард Лион 1 университеті, Камилла Джордан институты, 2022 – 14-18 қараша);
* Logic Colloquium 2019: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (Прага, 2019 – 11-16 тамыз);
* Logic Colloquium 2021: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL)(Познань, 2021 – 19-24 шілде);
* Logic Colloquium 2022: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) Рейкьявик: Рейкьявик университеті, 2022 − 27 маусым - 1 шілде);
* 16th Asian Logic Conference ((Нұр-Сұлтан: Назарбаев университеті, – 2019. – 17-21 маусым);
* Мальцев оқулары халықаралық конференция (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2018. –19-22 қараша);
* Мальцев оқулары халықаралық конференция (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2020. – 16-20 қараша);
* Мальцев оқулары халықаралық конференция (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2021. – 20-24 қараша);
* Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2019 – 3-5 сәуір);
* Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2020 – сәуір);
* Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2021 – сәуір);
* «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференция (Нұр-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2019 – 16-19 қазан);
* «Математикалық логика және компьютерлік ғылымдар» халықаралық ғылыми конференция (Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2022 – 7-8 қазан);
* «Тайманов оқулары – 2022»: халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция (Орал: М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, 2022 – 30 қараша);
* IX халықаралық ғылыми конференция (Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 2022 – 24-28 мамыр);
* Профессор Т.Ғ. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференция (Қарағанды: академик Е.А. Бөкетов ат. Қарағанды Университеті, 2022 – 8-9 қыркүйек);
* Студенттер мен жас ғылымдардың «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2020» XV халықаралық ғылыми конференция (Нур-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2020. – 10 сәуір);
* Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университетінің Қолданбалы математика институтының семинарында ішіндегі «Математикалық логика» лабораториясында.

**Жарияланымдар.**

*Scopus деректер қорына енетін басылымдардағы жарияланым:*

1. Geometry of strongly minimal hybrids of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2023. - №3(111). – P. 47-58.

*Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдардағы жарияланымдар:*

1. Properties of hybrids of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2018. - №4(92). – P. 99-104.

2. The atomic definable subsets of semantic model // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. - №2(94). – P. 84-91.

3. Small models of hybrids for special subclasses of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. - №3(95).– P. 68-73.

4. Йонсондық теориялардың гибридтерiнiң кейбір мысалдары және қасиеттері // Абай атындағы ҚазҰПУ хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. – 2019. - №2(66). – С. 72-77.

5. The hybrids of - P J theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2020. - №2(98).– P. 174-180.

6. An algebra of the central types of the mutually model-consistent fragments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2021. - №1(101). – P. 111-118.

*Халықаралық конференциялар материалдарындағы жарияланымдар:*

1. Гибриды йонсоновских теорий // Мальцев оқулары халықаралық конференциясы (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2018. –Б. 195).

2. Enrichment of hybrids // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2019. – Б. 25-26).

3. Syntactic and semantic similarity of hybrids // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2019. – Б. 24-25).

4. Экзистенциалды ядролық теориялардың саналымды модельдерінің қасиеттері // Профессор Рамазанов Мұрат Ыбырайұлының 70 жылдық мерейтойына орайластырылған «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды: академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті, – 2019. – Б. 8-9).

5. Hybrid’s core models of Jonsson theories // 16th Asian Logic Conference (Нұр-Сұлтан: Назарбаев университеті, – 2019. – Б. 43-44).

6. Hybrids of classes from Jonsson spectrum // Logic Colloquium 2019: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (Прага, 2019. – Б. 90-91).

7. Свойства категоричности и стабильности гибридов для наследственных теорий // «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференциясы (Нұр-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, – 2019. – Б. 175-176).

8. Свойства атомности модели для гибрида замыканий атомных множеств // «Анализдің, дифференциалдық теңдеулердің және алгебраның өзекті мәселелері» (EMJ-2019) халықаралық конференциясы (Нұр-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, – 2019. – Б. 176-177).

9. Свойства совершенных гибридов фрагментов ∇-cl- множеств // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2020. – 28 б).

10. Свойства гибридов Δ-PJ фрагментов // Студенттер мен жас ғылымдардың «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2020» XV халықаралық ғылыми конференциясы (Нур-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2020. – Б.1288-1292).

11. Не конечно – аксиоматизируемый центр универсального фрагментаΔ- PJ // Студенттер мен жас ғылымдардың «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2020» XV халықаралық ғылыми конференциясы (Нур-Султан: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2020. – Б. 1292-1295).

12. Свойство категоричности гибридов ∆-PJ фрагментов // Мальцев оқулары халықаралық конференциясы (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2020. –Б. 225).

13. Минимальные алгебраически простые модели универсального гибрида фрагментов йонсоновских множеств // Дәстүрлі халықаралық сәуір конференциясы (Алматы: ҚР ҒЖБМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, 2021. – 121 б).

14. On the categoricity of the class of the Jonsson spectrum // Logic Colloquium 2021: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (Познань, 2021. – Б. 151).

15. Companions of hybrids of fragments of theoretical subsets // Мальцев оқулары халықаралық конференциясы (Новосибирск: Новосибирск мемлекеттік университеті, 2021. – Б.167).

16. Syntactic and semantic similarities of hybrids of classes of the Jonsson spectrum of Jonsson quasivariety of the class *K //* Logic Colloquium: Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL) (Рейкьявик: Рейкьявик университеті, 2022. − Б. 51).

17. Jonsson hybrids and their similarities // VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory (Лион: Клод Бернард Лион 1 университеті, Камилла Джордан институты, 2022. − Б. 8).

18. Perfect Jonsson varieties of algebras // 9-шы харықаралық ғылыми конференциясы (Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 2022, − Б.318-320).

19. Perfect Jonsson varieties and quasivarieties // Актуальные задачи математики, механики и информатики: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию Профессор Т.Г. Мұстафиннің 80 жылдығына арналған «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» халықаралық ғылыми конференциясы (Қарағанды, академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды Университеті, 2022. − Б.37-38).

20. Similarities of hybrids of Jonsson quasivarieties // «Математикалық логика және компьютерлік ғылымдар» халықаралық ғылыми конференциясы (Астана: Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, 2022. – Б. 27-28).

21. Cинтаксическое подобие гибридов классов йонсоновского спектра семантического йонсоновского квазимногообразия // «Тайманов оқулары – 2022»: халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясы (Орал: М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, 2022. – Б. 24-26).

Диссертацияның негізгі нәтижелері 28 жұмыста жарияланды: 1 мақала – Scopus базасында енетін журналда [67], 6 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны қамтамасыз ету комитеті ұсынған басылымдарда [23,38-41,45] және 21 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялар материалдарында жарияланды [46-66].

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда бірлескен авторлардың әрқайсысының үлесі тең болып табылады.

**Диссертация құрылымы.** 83 беттік диссертациялық жұмыс келесі құрылымдық элементтерден тұрады: кіріспе, екі бөлім, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тізімі.

**Жұмыстың қысқаша мазмұны.** Диссертациялық жұмыстың бірінші тарауында йонсондық теориялар және олардың модельдер кластары бойынша алғашқы ұғымдардың анықтамалары мен негізгі теоремалар қарастырылды. Сонымен бірге йонсондық спектр және оның модельді-теоретикалық қасиеттері, тоолық теориялар мен йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктері атап өтілді.

Бірінші тараудың алғашқы параграфы «Йонсондық теориялар туралы жалпы мағлұматтар» деп аталады және бұл параграфта зерттеу нәтижелерді алу үшін қажетті ең негізгі анықтамалар мен теоремалар көрсетілген.

*Анықтама 1.1.1* [1; 80]. теориясы йонсондық деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

1. теориясы ең құрығанда бір шексіз модельге ие;
2. теориясы индуктивті;
3. теориясы үйлесімді енгізілу қасиетіне (JEP) ие;
4. теориясы амальгама қасиетіне (AP) ие.

*Анықтама 1.1.2* [2; 529]*.* Айтарлық болсын. теориясының моделі үшін -әмбебап деп аталады, егер қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның әрбір моделі -ге изоморфты енгізілсе; үшін -біртекті деп аталады, егер теориясының -нің ішкі модельдері болатын қуаттары қатаң түрде -дан кіші және кез келген екі моделі үшін және изоморфизмі үшін әрбір -ның моделіне дейін кеңейтілуі, -ның ішкі моделі және қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның моделі табылса, моделі -ді кеңейтсе және изоморфизмі -ті кеңейтсе. -ның біртекті-әмбебап моделі – қуатты -ның – біртекті-әмбебап моделі деп аталады, мұндағы .

*Анықтама 1.1.3*[2; 529]. йонсондық теориясының моделі семантикалық модель деп аталады, егер ол –біртекті-әмбебап болса.

*Анықтама 1.1.4.* йонсондық теориясының центрі деп оның семантикалық моделінің элементарлы теориясын айтамыз және оны деп белгілейміз, яғни

*Факт 1.1.1* [2; 529]. Әрбір йонсондық теориясы қуаты болатын -біртекті-әмбебап модельге ие. Керісінше, егер теориясы индуктивті болса және - біртекті-әмбебап модель болса, онда теориясы йонсондық теория деп аталады.

*Факт 1.1.2* [2; 529]. Айтарлық -йонсондық теория болсын. теориясының екі -біртекті-әмбебап және модельдері элементарлы эквивалент болады.

*Сөйлем 1.1.1* [4; 529]. йонсондық теорияның кез келген екі семантикалық модельдері өзара элементарлы эквивалентті болады.

*Лемма 1.1.1* [4; 25]. йонсондық теорияның семантикалық моделі экзистенциалды тұйық болады.

*Анықтама 1.1.5* [4; 25]. йонсондық теорияның семантикалық толықтыруы (центрі) деп теорияның семантикалық моделінің элементарлы теориясын айтамыз, яғни .

*Анықтама 1.1.6* [4; 18]. йонсондық теориясы кемел теория деп аталады, егер теориясының әрбір семантикалық моделі семантикалық модель болса.

*Теорема 1.1.1* [4; 26]. Айтарлық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы – кемел;

2) теориясы – теориясының модельді компаньоны.

*Теорема 1.1.2* [1; 164]. Егер -саналымды тіл және -толық ω-категорлы теория болса, онда -ның ω-категорлы модельді компаньоны бар.

*Теорема 1.1.3* [1; 160]. теориясының модельді компаньоны бар, егер және тек қана егер -элементарлы класс болса.

*Теорема 1.1.4* [4; 26]. Егер кемел йонсондық теория болса, онда , мұндағы .

*Анықтама 1.1.7* [4; 40]. йонсондық теория йонсондық теорияға косемантты деп айтамыз, егер , мұндағы -дің семантикалық моделі,

*Сөйлем 1.1.2* ([1; 97]. Егер теориясы индуктивті болса, онда теориясының кез келген моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделіне енгізіледі.

*Теорема 1.1.5* [10; 363]. Айтарлық бірінші ретті тіл болсын және тілінің теориясы. Айтарлық -ке ие және теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын. Онда -дің әрбір -сөйлемі -да ақиқат, сонымен бірге -да да ақиқат болады.

*Лемма 1.1.2.* Айтарлық йонсондық теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделі болсын. Онда йонсондық теория болады.

*Анықтама 1.1.8.* Айтарлық болсын. Біз жиынын ның -йонсондық ішкі жиыны деп айтамыз, егер келесі шарттар орындалса:

1) анықталған жиын (ол -дан формула табылады, моделінде шешімі жиыны болатын, мұндағы , яғни формуланың түрі, мысалы және т.б.);

2)  мұндағы арқылы алғашқы геометрияны беретін [5; 289] тұйықталу операторы (мысалы немесе ).

*Лемма 1.1.3.* Айтарлық йонсондық теория болсын, оның экзистенциалды тұйық модельдер класы. Онда теориясы кез келген моделі үшін йонсондық теория болып табылады.

Осы тараудың келесі параграфы йонсондық спекр ұғымына арналған.

Айтарлық кейбір сигнатура, сигнатурасының барлық формулаларының жиыны, басқаша айтқанда осы тілдің сигнатурасы болсын. Айтарлық сигнатураның кез келген моделі болсын, яғни . моделінің йонсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

тіліндегі йонсондық теория және

тіліндегі - толық йонсондық теория және мұндағы сигнатураның барлық сөйлемдер жиынын пренекс нормальді түрге келтіргеннен кейінгі пренекстің түрі.

*Анықтама 1.2.1.* Біз моделі моделіне йонсондық элементарлы эквивалентті деп айтамыз, егер болса.

*Анықтама 1.2.2.* Біз моделі моделіне -косемантты деп айтамыз, егер болса. Сәйкесінше, моделі моделіне -ға қатысты -косемантты деп айтамыз, егер болса.

*Лемма 1.2.1.* Айтарлық және кез келген сигнатураның кейбір модельдері болсын, онда

.

Айтарлық сигнатурасының кез келген моделі болсын. моделінің кемел йонсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

тіліндегі кемел йонсондық теория және

*Лемма 1.2.2.* Айтарлық сигнатурасының кез келген моделі болсын, , онда .

*Лемма 1.2.3.* Айтарлық болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) – кемел;

2) класы элементарлық болып табылады.

*Анықтама 1.2.3* [12; 293]. формуласы Γ формула (-ға қатысты) үшін толық деп аталады, егер – -мен үйлесімді болса және бос айнымалылар саны -дан аспайтын әрбір Γ-формула үшін , немесе немесе .

*Анықтама 1.2.4* [12; 293]. – теориясының ()-атомдық моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және әрбір үшін, -дан алынған әрбір элементтер -формула үшін толық болатын кейбір формуланы қанағаттандырады.

*Анықтама 1.2.5* [12; 293].

1) -ның әрбір формула үшін егер болса, онда ) болатынын білдіреді.

2) болса, онда болатынын білдіреді.

*Анықтама 1.2.6* [12; 293]. 1) – теориясының Σ-nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

2) – теориясының -nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

*Теорема 1.2.1* [12; 305]. Айтарлық экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын, және – теориясының саналымды моделі болсын. Онда (1) ⇒(2) және (2) ⇔ (3), мұндағы:

(1) – ()-атомдық,

(2) – -nice,

(3) – экзистенциалды тұйық және -nice.

*Теорема 1.2.2* [12; 302]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық теория болсын. Онда теориясының екі саналымды -атомдық модельдері изоморфты.

*Лемма 1.2.3.* Айтарлық болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) – кемел;

2) класы элементарлық болып табылады.

*Анықтама 1.2.3* [12; 293]. формуласы Γ формула (-ға қатысты) үшін толық деп аталады, егер – -мен үйлесімді болса және бос айнымалылар саны -дан аспайтын әрбір Γ-формула үшін , немесе немесе .

*Анықтама 1.2.4* [12; 293]. – теориясының ()-атомдық моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және әрбір үшін, -дан алынған әрбір элементтер -формула үшін толық болатын кейбір формуланы қанағаттандырады.

*Анықтама 1.2.5* [12; 293].

1) -ның әрбір формула үшін егер болса, онда ) болатынын білдіреді.

2) болса, онда болатынын білдіреді.

*Анықтама 1.2.6* [12; 293]. 1) – теориясының Σ-nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

2) – теориясының -nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

*Теорема 1.2.1* [12; 305]. Айтарлық экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын, және – теориясының саналымды моделі болсын. Онда (1) ⇒(2) және (2) ⇔ (3), мұндағы:

(1) – ()-атомдық,

(2) – -nice,

(3) – экзистенциалды тұйық және -nice.

*Теорема 1.2.2* [12; 302]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық теория болсын. Онда теориясының екі саналымды -атомдық модельдері изоморфты.

*Теорема 1.2.3* Айтарлық – сигнатураның кез келген моделі, және – -толық класс. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) класы -категорлы;

2) теориясы -категорлы.

*Анықтама 1.2.7* [12; 292]. формуласы теориясына қатысты -формула деп аталады, егер және орындалатындай және экзистенциалды формулалар табылса.

*Анықтама 1.2.8* [12; 307]. теориясы -ге ие деп айтамыз, егер -мен үйлесімді кез келген экзистенциалды формула үшін орындалатындай -мен үйлесімді формуласы табылса.

*Анықтама 1.2.9* [12; 312]. теориясының саналымды моделі саналымды алгебралық универсалды модель деп аталады, егер оған осы тоерияның барлық саналымды модельдері изоморфты енгізілсе.

*Теорема 1.2.4* [12; 315]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық, саналымды алгебралық универсалды модельге ие универсал теория болсын. Онда -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 1.2.5* [12; 309]. Айтарлық – -ге ие, экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

(1) алгебралық жай модельге ие,

(2) (Σ, ∆)-атомдық модельге ие,

(3) (∆, Σ)-атомдық модельге ие,

(4) ∆-nice алгебралық жай модельге ие,

(5) жалғыз алгебралық жай модельге ие.

*Анықтама 1.2.10* [13; 151]. Модель моделі -ның жай меншікті элементарлы кеңейтілуі деп аталады, егер және  орындалатындай кез келген моделі үшін, – бойынша -ға элементарлы енгізіледі.

*Лемма 1.2.4* [13; 151]. толық теория -категорлы сонда және тек қана сонда, егер оның саналымды моделі жай өзіндік элементарлы кеңейтілуге ие болсын.

## *Анықтама 1.2.7* [12; 292]. формуласы теориясына қатысты -формула деп аталады, егер және орындалатындай және экзистенциалды формулалар табылса.

*Анықтама 1.2.8* [12; 307]. теориясы -ге ие деп айтамыз, егер -мен үйлесімді кез келген экзистенциалды формула үшін орындалатындай -мен үйлесімді формуласы табылса.

*Анықтама 1.2.9* [12; 312]. теориясының саналымды моделі саналымды алгебралық универсалды модель деп аталады, егер оған осы тоерияның барлық саналымды модельдері изоморфты енгізілсе.

*Теорема 1.2.4* [12; 315]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық, саналымды алгебралық универсалды модельге ие универсал теория болсын. Онда -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 1.2.5* [12; 309]. Айтарлық – -ге ие, экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

(1) алгебралық жай модельге ие,

(2) (Σ, ∆)-атомдық модельге ие,

(3) (∆, Σ)-атомдық модельге ие,

(4) ∆-nice алгебралық жай модельге ие,

(5) жалғыз алгебралық жай модельге ие.

*Анықтама 1.2.10* [13; 151]. Модель моделі -ның жай меншікті элементарлы кеңейтілуі деп аталады, егер және  орындалатындай кез келген моделі үшін, – бойынша -ға элементарлы енгізіледі.

*Лемма 1.2.4* [13; 151]. толық теория -категорлы сонда және тек қана сонда, егер оның саналымды моделі жай өзіндік элементарлы кеңейтілуге ие болсын.

*Анықтама 1.2.11* [4; 54]. Айтарлық және болсын. Онда – -ның -да алгебралық жай модельді кеңейтілуі деп аталады, егер кез келген ∈ моделі үшін – -ға изоморфты енгізілетіндігінен, – -ға изоморфты енгізілетіндігі шығады.

*Теорема 1.2.6.* Айтарлық – сигнатураның кез келген моделі болсын, және – орындалатын -сөйлемдер үшін толық универсалды теориялар класы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -категорлы,

2) -нің кез келген саналымды моделі -да алгебралық жай модельді кеңейтілуі бар.

*Теорема 1.2.7.* Айтарлық – сигнатурасының кез келген моделі болсын, және – Γ-толық класс, мұндағы Онда, егер -категорлы болса, мұндағы , онда .

*Теорема 1.2.8*. Айтарлық – саналымды тіл, – тілінің кез келген моделі болсын, . Егер [-толық -категорлы класс болса, онда -категорлы модельді компаньонға ие.

*Теорема 1.2.9* [1; 164]. Егер – толық -теория және -категорлы болсын, мұндағы , онда – модельді толық.

*Теорема 1.2.10.* Айтарлық – саналымды тіл, – тілінің кез келген моделі болсын, . Егер толық -категорлы класс болса, онда модельді толық.

Келесі параграф толық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктеріне арналған.

*Анықтама 1.3.1* [14; 137]. Айтарлық болсын. Онда:

1) жазуы барлық үшін екенін білдіреді;

2) егер болса, онда - ақиқат тілінің барлық -сөйлемдер жиыны екенін білдіреді;

3) бейнелеуі -енгізілу деп аталады, егер кез келген үшін және -дан Γ үшін орындалса;

4) егер болса, онда жазуы орындалатынын білдіреді;

5) модельдер тізбесі Γ-тізбе деп аталады, егер үшін орындалса.

*Анықтама 1.3.2* [14; 138]. 1) теориясы -тізбелерге (немесе -индуктивті) бірігуіне қатысты тұрақты, егер кез келген моделінің -тізбелері -нің моделі болса.

2) теориясы -енгізілу (қысқаша, -) қасиетіне ие, егер кез келген үшін және -енгізілулер және табылса.

3) теориясы α-амальгама (қысқаша, -) қасиетіне ие, егер кез келген және -енгізулер мен үшін табылса және -енгізулер және табылса, орындалатындай.

*Анықтама 1.3.3* [14; 138]. теориясы -йонсондық () деп аталады, егер:

1) теориясы шексіз бір модельге ие болса;

2) теориясы -индуктивті болса;

3) теориясы -JEP қасиетіне ие болса;

4) теориясы -AP қасиетіне ие болса.

*Сөйлем 1.3.1* [14; 138]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -JEP қасиетіне ие;

2) теориясы толық модельдер үшін -JEP қасиетіне ие;

3) егер болса, онда және – -формуланың кез келген жиындары, және қарама-қайшылықсыз, онда және қарама-қайшылықсыз.

*Сөйлем 1.3.2* [14; 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -JEP қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін -AP қасиетіне ие;

3) егер және – -формуланың жиындары болса, және , қарама-қайшылықсыз жиындар болады, онда жиыны қарама-қайшылықсыз;

4) кез келген және үшін жиыны -мен жалғыз максималды үйлесімді тілінің -сөйлемдері жиынында жатады.

*Анықтама 1.3.4* [15; 259]. Айтарлық және – толық теориялар болсын. және синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ға дейін шектеуі және бульдік алгебраларының изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

*Анықтама 1.3.5* [15; 260].

1. таза үштік деп аталады, мұндағы құр емес жиын, – -ның ауыстырулар группасы және –-ның ішкі жиындарының жиынтығы, барлық үшін болғанынан орындалады.
2. Егер және ⟨⟩ таза үштіктер болса, және – биекция болса, онда изоморфизм болады, егер:

(a)

(b) .

*Анықтама 1.3.6* [15; 260]. Таза үштік ⟨⟩ теориясының семантикалық таза үштік деп аталады, мұндағы – теориясының монстр-моделінің жасаушысы– -ның автоморфизмдер группасы, –-ның барлық ішкі жиындар класы, әрқайсысы -ның сәйкес элементарлы ішкі моделінің жасаушысы болса.

*Анықтама 1.3.7* [15; 260]. және толық теориялар семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың семантикалық үштіктері өзара изоморфты болса.

*Сөйлем 1.3.3* [15; 261]. Егер және теориялар синтаксистік ұқсас болса, онда және семантикалық ұқсас, керісінше дұрыс емес.

Келесі анықтама семантикалық қасиеттің анықтамасын береді.

*Анықтама 1.3.8* [15; 261]. Теориялардың (немесе модельдердің немесе модельдердің элементтерінің) қасиеті (немесе ұғымы) семантикалық деп аталады, егер ол семантикалық ұқсастыққа қатысты инвариантты болса ғана.

*Сөйлем 1.3.4* [15; 261]. Келесі қасиеттер мен ұғымдар семантикалық болып табылады:

1. тип;

2. форкинг;

3. -стабильділік;

4. Ласкар рангі;

5. қатты тип;

6. Морли тізбегі;

7. ортогоналдылық, типтердің заңдылығы;

8. – спектральді функция.

*Анықтама 1.3.9* [15; 263]. моноиды арқылы полигон деп (немесе оны S-act деп атаймыз) тек унарлы функцияларды қамтитын структураны айтамыз, ⟨⟩:

1. мұндағы – -тің бірлік элементі

2.

*Теорема 1.3.1* [15; 264]. Шекті сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы дерлік болады.

*Теорема 1.3.2* [15; 263]. Шексіз сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы болады.

Осы бөлімнің соңғы тарауында йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктері қарастырылды.

*Анықтама 1.4.1* [4; 46]. Айтарлық және – йонсондық теориялар болсын. және йонсондық синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ғе дейін шектеуі және торлардың изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

*Лемма 1.4.1* [22; 80]. Әрбір бульдік сақина нақты буль алгебраны интерпретациялай алады.

*Анықтама 1.4.2* [4; 47]. таза үштігі йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы – теориясының семантикалық моделінің жасаушысы , – автоморфизмдер группасы, – барлық ішкі жиындарының класы, сәйкесінше экзистенциалды тұйық ішкі модельдердің жасаушысы болып табылады.

*Анықтама 1.4.3* [4; 47]. және екі йонсондық теория йонсондық семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың йонсондық семантикалық үштіктері таза үштіктер сияқты изоморфты болса.

*Лемма 1.4.2.* Кез келген екі косемантты йонсондық теориялар йонсондық семантикалық ұқсас болып табылады.

Диссертациялық жұмыстың екінші тарауы негізгі бөлім болып табылады. Бұл тарауда жаңа ұғым йонсондық теориялардың гибридтері сипатталған. Бұл тараудың бірінші параграфы осы гибридтердің модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылады.

*Анықтама 2.1.1.* йонсондық теорияларының гибриді деп теориясын айтамыз, егер ол теория йонсондық болса. Сонымен қатар, алгебралық құрылымы теорияларының семантикалық гибриді деп аталады.

*Факт 2.1.1.* теориясы йонсондық болуы үшінболуы жеткілікті.

*Анықтама 2.1.2.* индуктивті теориясы экзистенциалды жай деп аталады, егер оның алгебралық жай моделі болса, оның алгебралық жай модельдер класы деп белгіленеді және – класымен қиылыспаса, яғни .

*Анықтама 2.1.3.* теориясы дөңес деп аталады, егер оның моделі үшін және -ның модельдері болатын -ның ішкі құрылымдарының кез келген жиынтығы үшін қиылысуы -ның моделі болады.

*Теорема 2.1.1.* Айтарлық кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық йонсондық теория болсын. – теориясындағы -жиын, мұндағы , кемел дөңес экзистенциалды жай жай сөйлемдер үшін толық йонсондық теориялар. сәйкесінше олардың семантикалық моделдері. Онда егер олардың гибриді мен моделді үйлесімді болса, онда – үшін кемел йонсондық теория болады.

*Теорема 2.1.2.* Айтарлық – 2.1.1 теореманың шарттарын қанағаттандырсын және - -категорлы болсын. Онда олардың гибриді де -категорлы йонсондық теория болады.

Келесі параграф йонсондық теориялардың арнайы iшкi кластары гибридтерiнiң кiшiгiрiм модельдерiне арналған.Бұлпараграфта, жалпы айтқанда толық емес кішігірім модельдердің кейбір қасиеттері мен өзара қатынастары қарастырылған. Сонымен бірге, параграфтың нәтижесі ретінде «реостат» жаңа тұжырымы аясында йонсондық теориялардың атомдық ұғымын нақтылаудың түсініктемесі алынды.

*Анықтама 2.2.1.* теориясының моделі экзистенциалды тұйық деп аталады, егер кез келген В моделі және тұрақтылары бар кез келген экзистенциалды формуласы үшін болса, бұл жағдайда моделі моделінің ішкі моделі болады және .

*Анықтама 2.2.2.* – теориясының алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және – -ның әрбір моделіне изоморфты түрде енгізілсе.

*Анықтама 2.2.3.* индуктивті теориясы экзистенциалды жай деп аталады, егер оның алгебралық жай моделі болса, оны класы (алгебралық жай модельдер) арқылы белгіленсе; тривиальды емес класымен қиылысады, яғни .

*Анықтама 2.2.4.* теориясы дөңес деп аталады, егер оның кез келген моделі үшін және теориясының модельдері болып табылатын ішкі құрылымдарының кез келген жиынтығы -ның моделі болса және ол қиылысу құр жиын болмаса. Сонымен қатар, мұндай қиылысу ешқашан құр жиын болмаса, онда қатты дөңес деп аталады.

*Анықтама 2.2.5.* теориясының ()-атомдық моделі деп аталады, егер -ның моделі болса және әрбір үшін А элементтерінің әрбір кортежі -ден -ге дейінгі кейбір формуланы қанағаттандырады, -формулалар үшін толық болатын.

*Анықтама 2.2.6.* жиыны теориясының ()-cl атомдық жиыны деп аталады, егер

1) болатындай кез келген формуласы үшін – үшін толық формула болады және ;

2) және алынған М моделі Т теориясының () -cl атомдық моделі деп аталады.

*Анықтама 2.2.7.* А жиыны T теориясының () -cl алгебралық жай жиыны деп аталады, егер

1) А – T теориясының () -cl атомдық жиыны болса;

2) және алынған моделі теориясының () -cl алгебралық жай моделі деп аталады.

*Анықтама 2.2.8.* және өзара модельді үйлесімді, яғни теориясының әрбір моделі теориясының моделіне енгізіледі және керісінше.

*Анықтама 2.2.9.* Теория экзистенциалды ядролы деп аталады, егер бұл теория экзистенциалды жай болса және экзистенциалды тұйық алгебралық жай модельдер арасында кем дегенде бір ядролы модель болса.

*Теорема 2.2.1*. Айтарлық – кемел, қатты дөңес, экзистенциалды ядролы, -сөйлемдері үшін толық йонсондық теория болсын.

Осы бөлімнің үшінші тарауы позитивті йонсондық теориялардың гибридтеріне арналған. Бұл параграф позитивті йонсондық теориялардың, оның ішінде фрагменттердің модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеумен байланысты. Яғни, фрагменттер белгілі бір йонсондық теорияның семантикалық арнайы жиындарының тұйықтамасы болып табылады. Бұл параграфта позитивті йонсондық морфизмдер, позитивті йонсондық фрагменттер, позитивті йонсондық жиындар және позитивті йонсондық теориялардың гибридтері жаңа ұғымдары енгізілген.

*Анықтама 2.3.1*. Егер – -құрылымдардың класы болса, онда -тен элементі -де ∆-позитивті экзистенциалды тұйық деп аталады. Егер әрбір ∆ – -дан -нің кез келген элементіне гомоморфизм болса, онда ол ∆-бату деп аталады.

*Анықтама 2.3.2.* Біз теориясы  JEP-ке ие деп айтамыз, егер кез келген екі модельдері үшін моделі табылып және ∆-жалғасуы үшін , бар болса.

*Анықтама 2.3.3.* Біз теориясы АP-ке ие деп айтамыз, егер кез келген үшін , орындалатындай, мұндағы  - жалғасу болып табылады, табылады және , бар болса, мұндағы болатындай ∆-жалғасу.

*Анықтама 2.3.4*. теориясы  -позитивті йонсондық теория (-) деп аталады, егер ол келесі шарттарды қанағаттандыратын болса,:

1. ең құрығанда бір шексіз модельге ие болса;
2. позитивті -аксиоматизацияланған болса;
3. -JEP-ке ие болса;
4. -АP-ке ие болса.

*Анықтама 2.3.5*. Айтарлық қуат жиынындағы оператор болсын. йонсондық алғашқы геометрия деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:

Егер болса, онда және .

Егер болса, онда cl(.

(Ауыстыру). және онда

(Шекті сипат). Егер және болса, болатындай шекті табылады.

*Анықтама 2.3.6*. Егер йонсондық алғашқы геометрия болса, біз А – C-ның йонсондық тәуелсіз (J-тәуелсіз) ішкі жиыны деп айтамыз, егер барлық үшін және Y үшін J-базис болса, , егер -J-тәуелсіз және болса.

*Лемма 2.3.1*. Егер J-йонсондық алғашқы геометрия болса, және барлық үшін J-базис болса, онда .

*Лемма 2.3.2*. Егер J- алғашқы геометрия болса, онда J- алғашқы геометрия болады.

*Анықтама 2.3.7*. Біз ді модульді алғашқы геометрия деп атаймыз, егер кез келген шекті-өлшемді тұйықталған үшін келесі теңдік орындалса:

*Анықтама 2.3.8*. Егер модульді болса, онда йонсондық теориясы модульді деп аталады, мұндағы С – йонсондық теорияның семантикалық моделі.

*Анықтама 2.3.9*. Айтарлық болсын. Біз Х – С-ның -позитивті йонсондық ішкі жиыны деп атаймыз, егер Х келесі шарттарды қанағаттандырса:

1. 𝑋 – -анықталған жиын (бұл дегеніміз -дан формула табылады С-дағы шешімі Х жиыны болатындай, мұндағы , ол келесі түрдегі формула, мысалы және т.б.);
2. *,* мұндағы анықталған тұйық оператор және арқылы алғашқы геометрияны анықтайтын оператор.

*Лемма 2.3.3.* Айтарлық Т – позитивті йонсондық теория болсын. оның экзинтенциалды тұйық модельдер класы болсын. Онда теориясының әрбір моделі теория болады.

*Анықтама 2.3.10.*  фрагменттерінің гибриді деп теориясын айтамыз, егер ол теория болса, мұндағы -дің семантикалық модельдері,

*Факт 2.3.1.* теориясытеория болуы үшін болуы жеткілікті.

*Теорема 2.3.1.* Айтарлық кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық фрагмент болсын. – теориясындағы -жиындар болсын, мұндағы , кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық фрагменттер. сәйкесінше олардың семантикалық моделдері. Онда егер олардың гибриді мен моделді үйлесімді болса, онда үшін теория болады.

*Теорема 2.3.2.* Айтарлық - 2.3.1 теореманың шарттарын қанағаттандырсын және - -категорлы фрагменттер болсын. Онда олардың гибриді де -категорлы теория болады.

Келесі параграфта өзара модельді-үйлесімді централдық типтерінің алгебрасының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылады. Йонсондық теорияның байытуы аясында централдық тип деп аталатын кейбір теорияның орнына толық 1-типті алынған. Бұл параграф ішкі үш бөлімдерден тұрады: йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық моделінің сыртқы және ішкі әлемдері, осы экзистенциалды тұйық модельдерді -салыстыру, централдық типтердің алгебрасы. Бұл параграфтың негізгі нәтижесі теориялардың көбейтіндісіне мен йонсондық теориялардың гибридтерінің көбейтіндісі ұғымдарының сәйкес келетіндігін көрсету.

*Анықтама 2.4.1.* – кез келген йонсондық теория болсын. үшін моделінің ішкі әлемі деп – изоморфизм, аталады.

*Анықтама 2.4.2.* – кез келген йонсондық теория болсын. T үшін A моделінің сыртқы әлемі деп мұнда бар} аталады.

*Теорема 2.4.1.* Айтарлық – кемел, қатты дөңес йонсондық теория болсын. Кез-келген модельдері үшін келесілер дұрыс:

1)

2)

*Анықтама 2.4.3.* Айтарлық – йонсондық теория және болсын. Ал және – теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын. және модельдері -салыстырмалы деп аталады, егер моделінің кез келген экзистенциалды тұйық ішкі моделі үшін, , - *-*ның экзистенциалды тұйық ішкі моделі және *-*ның кез келген экзистенциалды тұйық ішкі моделі үшін, , ­- - ның экзистенциалды тұйық ішкі моделі екендігі орындалады.

*Анықтама 2.4.4.* Айтарлық йонсондық теория болсын. . λ-салыстыру қатынасына қатысты қуатты йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық модельдерінің кластарының санын есептейді.

*Анықтама 2.4.5.* Айтарлық қуаты – ден аспайтын -ның барлық модельдерінің жиыны болсын.

*Теорема 2.4.2.* Айтарлық -толық йонсондық теория болсын және кейбір үшін орындалады. Онда теориясы модельді толық болып табылады.

*Анықтама 2.4.6.* Айтарлық – йонсондық теориялар болсын және өзара модельді үйлесімді. Онда біз -ні келесі теория ретінде анықтаймыз: , мұндағы – сәйкесінше қуатында йонсондық теориялардың семантикалық модельдері, мұндағы .

*Анықтама 2.4.7.* йонсондық теориясы жаппай модельді үйлесімді деп аталады, егер оның кез келген екі фрагменті өзара модельді үйлесімді болса, мұндағы – -ның кейбір анықталған ішкі жиындары.

*Теорема 2.4.3.* Егер йонсондық спектрдің кейбір косеманттылық класының бекітілген центрі жаппай модельді үйлесімді болса, онда оның семантикалық моделі қаныққан.

*Анықтама 2.4.8*. йонсондық теорияның әрбір фрагменті үшін келесі жиынды атап өтейік: . Айтарлық болсын. Егер кейбір үшін болса, онда теорияның анықталатын ∇ жиыны деп аталады.

*Салдар 2.4.1.* Кез келген үшін шекті туындыларға қатысты тұйық және құр емес болады.

*Анықтама 2.4.9.* Егер болса, онда біз -жұту деп жазамыз. Егер болса, идемпотентті деп аталады.

*Анықтама 2.4.10.* жиыны анықталатын идемпотент деп аталады, егер идемпотент табылса, мысалы, сияқты.

*Теорема 2.4.4.* Айтарлық болсын. Егер болса, онда (-модельдердің косеманттылығы).

*Теорема 2.4.5.* Егер болса, онда .

*Теорема 2.4.6* (Воот [10; 403]). тіліндегі сөйлем алгебралық жүйелердің шексіз тура көбейтіндісіне қатысты тұрақты болса, егер осы шексіз көбейтінділердің кез келген шекті ішкі көбейтінділерге қатысты тұрақты болса.

*Теорема 2.4.7.* Егер , ал шексіз көбейтінділерге қатысты тұйық болса, онда -ден кез келген элементті жұтатын жалғыз идемпотент табылса.

*Теорема 2.4.8.* ал – шексіз көбейтінділерге қатысты тұйық анықталған жиын болсын, онда жалғыз идемпотент табылады, сол идемпотентпен анықталады.

*Теорема 2.4.9.* Егер идемпотент болса, онда оның кез келген дәрежесі болады.

*Теорема 2.4.10.* Егер идемпотентті болса, онда көбейтінділерге қатысты тұйық болады.

*Теорема 2.4.11.* Егер идемпотент болса, онда - аксиоматизацияланатын теория.

*Теорема 2.4.12.* Айтарлық болсын. көбейтінді амалымен бірлік элементпен идемпотенттердің коммутативті жартылай группасын құрайды.

*Салдар 2.4.2.* идемпотенттерінің жартылай группасы жартылай группасының қолайлы дәрежесіне изоморфты түрде енгізіледі, мұндағы негізгі жиын және сәйкес амалы бар жартылай группа.

*Анықтама 2.4.11.* Біз деп жазамыз, егер және тек қана егер болса.

*Салдар 2.4.3.* жиынындағы қатынасы ең үлкен және ең кіші элементтері бар жартылай реттелгендігін білдіреді.

*Теорема 2.4.13.* Айтарлық болсын. жиыны идемпотентпен анықталады.

*Теорема 2.4.14.* Айтарлық және болсын, онда .

*Анықтама 2.4.12.* жиынында біз бірігу және қиылысу операцияларын енгіземіз. Айтарлық болсын. , және , мұндағы 13-теореманың дәлелдерінен алынған.

*Теорема 2.4.15.* және амалдарымен жиыны толық торды құрайды.

*Теорема 2.4.16.* Әр көптүрлілікке жалғыз өзін анықтайтын идемпотенті сәйкес келеді.

*Теорема 2.4.17.* Енгізілген ∪ және ∩ амалдарына қатысты анықталатын квазикөптүрліліктер жиыны толық торды құрайды.

*Анықтама 2.4.13.* йонсондық теорияның байытуы рұқсат етілетін деп аталады, егер кез келген ∇-тип (∇ тілінің ішкі жиыны және осы типтің кез келген формуласы ∇-ға тиісті), бұл байытуды – стабильділік аясында анықталған болса.

*Анықтама 2.4.14.* Йонсондық теория мұрагер деп аталады, егер кез келген оның рұқсат етілген байытуында оның осы байытудағы кез келген кеңеюі йонсондық теория болса.

*Анықтама 2.4.12.* жиынында біз бірігу және қиылысу операцияларын енгіземіз. Айтарлық болсын. , және , мұндағы 2.4.13-теореманың дәлелдерінен алынған.

*Теорема 2.4.15.* және амалдарымен жиыны толық торды құрайды.

*Теорема 2.4.16.* Әр көптүрлілікке жалғыз өзін анықтайтын идемпотенті сәйкес келеді.

*Теорема 2.4.17.* Енгізілген ∪ және ∩ амалдарына қатысты анықталатын квазикөптүрліліктер жиыны толық торды құрайды.

*Анықтама 2.4.13.* йонсондық теорияның байытуы рұқсат етілетін деп аталады, егер кез келген ∇-тип (∇ тілінің ішкі жиыны және осы типтің кез келген формуласы ∇-ға тиісті), бұл байытуды – стабильділік аясында анықталған болса.

*Анықтама 2.4.14.* Йонсондық теория мұрагер деп аталады, егер кез келген оның рұқсат етілген байытуында оның осы байытудағы кез келген кеңеюі йонсондық теория болса.

Келесі параграф йонсондық теориялардың гибридтерінің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарына арналған. Бұл параграфта жаңа ұғым, йонсондық теорияның косеманттылығының класының гибриді енгізілді. Және бірінші тараудың соңғы параграфындағы йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары ұғымдары аясында нәтижелер алынды. Негізгі нәтиже бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық спекрінің косеманттылық кластарының гибридінің синтаксистік және семантикалық ұқсастығының критерийі алынды. Сонымен бірге, кез келген гибрид үшін синтаксистік ұқсас полигон теориясының болуы туралы теорема осы параграфтың негізгі нәтижесі болып табылды.

*Теорема 2.5.1* [15; 424]. Фильтрлік көбейтулер, фильтрлік дәрежелер, тура көбейтінділер мен тура дәрежелер элементарлы эквиваленттілікті сақтайды.

*Лемма 2.5.1.* Айтарлық – саналымды тілінің кейбір модельдері және болсын, онда

*Анықтама 2.5.1*. 1) Айтарлық – сигнатураның саналымды тілінің аксиоматизациаланатын модельдер класы болсын, . Классов және кластарының бірінші типті гибриді деп теориясын айтамыз, егер бұл теория сигнатураның тілінде йонсондық болса, мұндағы – сәйкесінше класының семантикалық модельдері, және   мұндағы - декарттық көбейтінді, - қосынды, - означает тура қосынды.

2) Айтарлық –әртүрлі сигнатураның және саналымды тілінің сәйкесінше аксиоматизациаланатын кластары болсын, теориясын екінші типті гибрид деп атаймыз, егер бұл теория сигнатура тілінде йонсондық болса, мұндағы .

*Факт 2.5.1* [4; 48]. -сөйлемдері үшін толық кез келген йонсондық теория үшін келесі шарттар эквивалентті:

1) модельді толық болып табылады;

2) әрбір үшін – буль алгебрасы, мұндағы – бос айнымалармен -формулалар торы.

*Теорема 2.5.2.* Айтарлық , және – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық кемел гибридтер болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) ;

2) .

*Лемма 2.5.2.* Айтарлық – -толық теория және болсын. Онда егер үйлесімді болса, онда -да үйлесімді ( – -формулалардың кез келген жиыны).

*Сөйлем 2.5.1.* Айтарлық – кемел йонсондық теория болсын, онда кез келген сөйлемі үшін теориясы йонсондық болады.

*Теорема 2.5.3.* Айтарлық – сигнатурасының саналымды тілінің аксиоматизациаланған модельдер класы болсын, . -сөйлемдер үшін толық кез келген кемел гибрид үшін йонсондық -толық полигондар теориясы табылады және .

*Салдар 2.5.1.* Айтарлық – сигнатураның саналымды тілінің аксиоматизациаланған модельдер класы болсын, . 1.3.4 сөйлемнің 8) пункті бойынша семантикалық ұқсас толық теориялар және   (), спектральды функциясын сақтайды, яғни дербес жағдайда категорлы қасиетін сақтайды. 2.5.2 теорема және 2.5.3теорема бойынша 2.5.3теорема шартын қанағаттандыратынсинтаксистік ұқсас йонсондық теориялар  және саналымсыз категорлылық қасиетін сақтайды.

*Салдар 2.5.2.* 2.5.3теорема бойынша барлық тұжырымдар бірінші типті гибридтер кластары үшін орындалады және екінші типті гибридтер кластары үшін де дұрыс.

Осы тараудың соңғы параграфында қатты минималды гибридтерiнiң фрагменттерiнiң теоретикалық жиындарының геометриясы қарастырылды. Бұл параграф гибридтердің қатты минималды геометрияларын зерттеуге арналған. Нәтиже робинсон спектрінің аясында алынған.

*Анықтама 2.6.1.* йонсондық теориясы робинсондық теория деп аталады, егер ол әмбебап аксиоматацияланған болса*.*

Айтарлық – робинсондық теория, сигнатурасының кез келген моделі болсын. моделінің робинсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

сигнатурасының тіліндегі робинсондық теория және

арқылы қатысты моделінің робинсондық спектрінің фактор жиынын қарастырамыз. Егер сигнатурасының тіліндегі кез келген робинсондық теория болса, онда класының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы, .

*Теорема 2.6.1* [12; 298]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық әмбебап теория болсын және ол саналымды алгебралық модельге ие. Онда – -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 2.6.2.* Айтарлық [T] – -ге ие экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -дан класс болсын. Айтарлық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1 алгебралық жай модельге ие;

2 ()-атомдық модельге ие;

3 ()-атомдық модельге ие;

4 -nice алгебралық жай модельге ие;

5 жалғыз алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 2.6.3.* Айтарлық [T] – -дан мұралы класс болсын, , онда келесі шарттар эквивалентті:

1 -ның кез келген саналымды моделінің моделінде алгебралық жай кеңейтілімі бар;

2 – қатты минималды тип, мұндағы – -нің централдық типі.

*Анықтама 2.6.1.* йонсондық теориясы робинсондық теория деп аталады, егер ол әмбебап аксиоматацияланған болса*.*

*Теорема 2.6.1* [12; 298]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық әмбебап теория болсын және ол саналымды алгебралық модельге ие. Онда – -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 2.6.2.* Айтарлық [T] – -ге ие экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -дан класс болсын. Айтарлық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1 алгебралық жай модельге ие;

2 ()-атомдық модельге ие;

3 ()-атомдық модельге ие;

4 -nice алгебралық жай модельге ие;

5 жалғыз алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 2.6.3.* Айтарлық [T] – -дан мұралы класс болсын, , онда келесі шарттар эквивалентті:

1 -ның кез келген саналымды моделінің моделінде алгебралық жай кеңейтілімі бар;

2 – қатты минималды тип, мұндағы – -нің централдық типі.

Автор есептің қойылуына және диссертацияның барлық кезеңдерінде берген құнды кеңестері мен көмектері үшін отандық ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Ешкеев Айбат Рафхатовичке шын жүректен алғысын білдіреді. Сонымен қатар, шетелдік ғылыми кеңесшісі физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Судоплатов Сергей Владимировичке бағалы кеңестері мен көрсетілген қолдауы үшін алғысын айтады.

**1 ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАР ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДЕРІНІҢ КЛАСТАРЫ**

**1.1 Йонсондық теориялар туралы жалпы мағлұматтар**

Йонсондық теориялармен байланысты негізгі ұғымдарының қажетті анықтамаларын берейік.

Бірінші ретті кейбір саналымды тіл берілсін.

*Анықтама 1.1.1* [1; 80]. теориясы йонсондық деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

1. теориясы ең құрығанда бір шексіз модельге ие;
2. теориясы индуктивті;
3. теориясы үйлесімді енгізілу қасиетіне (JEP) ие;
4. теориясы амальгама қасиетіне (AP) ие.

Келесі теориялар йонсондық теорияның мысалдары болып табылады:

1) группалар теориясы,

2) абельдік группалар теориясы,

3) бекітілген сипаттамамен өрістер теориясы,

4) Буль алгебралар теориясы,

5) бекітілген моноид арқылы полигондар теориясы,

6) бекітілген сақина арқылы модульдер теориясы,

7) сызықты реттер теориясы.

Келесі модельдің әмбебаптылығы және біртектілігі туралы анықтама кез келген йонсондық теорияның семантикалық инвариантын, яғни оның семантикалық моделін көрсетеді. Осы модельдің қаныққандылығы немесе қаныққандылық еместігі қарастырып отырған йонсондық теорияның өзінің және оның модельдер класының құрылымдық қасиеттерін өзгертеді.

*Анықтама 1.1.2* [2; 529]. Айтарлық болсын. теориясының моделі үшін -әмбебап деп аталады, егер қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның әрбір моделі -ге изоморфты енгізілсе; үшін -біртекті деп аталады, егер теориясының -нің ішкі модельдері болатын қуаттары қатаң түрде -дан кіші және кез келген екі моделі үшін және изоморфизмі үшін әрбір -ның моделіне дейін кеңейтілуі, -ның ішкі моделі және қуаты қатаң түрде -дан кіші -ның моделі табылса, моделі -ді кеңейтсе және изоморфизмі -ті кеңейтсе.

-ның біртекті-әмбебап моделі – қуатты -ның – біртекті-әмбебап моделі деп аталады, мұндағы .

*Анықтама 1.1.3* [2; 529]. йонсондық теориясының моделі семантикалық модель деп аталады, егер ол –біртекті-әмбебап болса.

Йонсондық теорияның анықтамасынан жалпы айтқанда бұл теория толық емес екенін көреміз. Бірақ оның семантикалық инвариантының (семантикалық моделінің) көмегімен біз әрқашан толық теория болып табылатын йонсондық теорияның центрін анықтай аламыз.

*Анықтама 1.1.4.* йонсондық теориясының центрі деп оның семантикалық моделінің элементарлы теориясын айтамыз және оны деп белгілейміз, яғни

Келесі екі факт семантикалық модельдің «жақсы» ерекшелігі туралы айтады.

*Факт 1.1.1* [2; 529]. Әрбір йонсондық теориясы қуаты болатын -біртекті-әмбебап модельге ие. Керісінше, егер теориясы индуктивті болса және - біртекті-әмбебап модель болса, онда теориясы йонсондық теория деп аталады.

*Факт 1.1.2* [2; 529]. Айтарлық -йонсондық теория болсын. теориясының екі -біртекті-әмбебап және модельдері элементарлы эквивалент болады.

Модельдер теориясы курсынан қаныққан модель әрдайым біртекті-әмбебап модель болатындығы жақсы белгілі, керісінше де дұрыс. Бірақ бұл әмбебап-біртекті модельдің анықтамасы, әдетте, толық теорияны зерттеу аясында қарастырылады. Йонсондық теорияны зерттеу аясында әмбебап-біртекті модельді анықтаудың кейбір жеке жағдайы Б. Йонсонға [3] тиесілі. Екі жағдайда да қаныққан модель ұғымы бірдей. Йонсондық теория жағдайында біртекті-әмбебаптың жалпы жағдайына байланысты біз біртекті-әмбебап арқылы қанығу критерийін алмаймыз. Сондықтан семантикалық моделі қаныққан йонсондық теориялар барлық йонсондық теорияның класының ерекше ішкі класына бөлінеді және мұндай теориялар кемел деп аталады. Кемел йонсондық теорияның анықтамасын берейік.

*Сөйлем 1.1.1* [4; 529]. йонсондық теорияның кез келген екі семантикалық модельдері өзара элементарлы эквивалентті болады.

*Лемма 1.1.1* [4; 25]. йонсондық теорияның семантикалық моделі экзистенциалды тұйық болады.

*Анықтама 1.1.5* [4; 25]. йонсондық теорияның семантикалық толықтыруы (центрі) деп теорияның семантикалық моделінің элементарлы теориясын айтамыз, яғни .

*Анықтама 1.1.6* [4; 18]. йонсондық теориясы кемел теория деп аталады, егер теориясының әрбір семантикалық моделі семантикалық модель болса.

Кемел йонсондық теория ұғымын зерттеу өте қызықты, өйткені, мысалы, барлық группалар класының элементарлы теориясы кемел емес йонсондық теория болып табылады, бірақ барлық группалар класының ішінде абельдік группалардың ішкі класы бар, оның теориясы кемел [5].

Йонсондық теорияларды зерттеудегі прогреске кемел йонсондық теориялар жағдайында қол жеткізілді, мысалы, когерентті сақина арқылы модульдер үшін [6]. Йонсондық стабильділік мәселелері және кемел йонсондық теориялардың формулаларының экзистенциалдық торларының қасиеттерін зерттеу [7] және [8-9] жұмыстарда зерттелген. Осындай теориялардың модельді компаньоны ретінде олардың центрі бар екені белгілі болды. Мысалы, бекітілген сипаттамамен өрістің центрі бірдей сипаттамамен алгебралық тұйық өрісі болып табылады. Сонымен қатар, келесі семантикалық фактіні атап өткен жөн: кемел йонсондық теорияларда экзистенциалды тұйық модельдер класы оның центрлерінің барлық модельдерінің класымен сәйкес келеді.

Келесі нәтиже кемел йонсондық теорияның сипаттамасын береді.

*Теорема 1.1.1* [4; 26]. Айтарлық йонсондық теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы – кемел;

2) теориясы – теориясының модельді компаньоны.

Жоғары айтылған йонсондық теорияның келесі мысалдары 2),3),4),6),7) кемел йонсондық теорияның мысалдары болып табылады. Бірақ мысалы группалар теориясы кемел йонсондық теория болмайды, өйткені оның модельді компаньоны жоқ.

Модельдер теориясы курсында модельдің толықтығы мен ω-категорлылық ұғымдарын байланыстыратын Д.Сарациноның нәтижесі белгілі. Сонымен, Д.Сарацино теоремасы ω-категорлы болып табылатын толық теориялар үшін модельді компаньон табылуы туралы теорема болып табылады.

*Теорема 1.1.2* [1; 164]. Егер -саналымды тіл және -толық ω-категорлы теория болса, онда -ның ω-категорлы модельді компаньоны бар.

*Теорема 1.1.3* [1; 160]. теориясының модельді компаньоны бар, егер және тек қана егер -элементарлы класс болса.

Айтарық – йонсондық теориясының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы болсын. Бұл модельдер класы жалпы жағдайда кез келген теория үшін құр болуы мүмкін. Бірақ келесі нәтиже [4; 367] жақсы белгілі, кез келген индуктивті теория құр емес экзистенциалды тұйық модельдер класына ие. Йонсондық теориялар класы индуктивті теориялар класының ішкі класы болғандықтан, онда біз класы құр емес деп айта аламыз. Кемел йонсондық теория жағдайында осы теорияның центрінің модельдер класы -мен сәйкес келеді.

*Теорема 1.1.4* [4; 26]. Егер кемел йонсондық теория болса, онда , мұндағы .

*Анықтама 1.1.7* [4; 40]. йонсондық теория йонсондық теорияға косемантты деп айтамыз, егер , мұндағы -дің семантикалық моделі,

Индуктивті теориялар класында экзистенциалды тұйық модельдердің рөлі ерекше және бұл фактіні келесі теорема көрсетеді.

*Сөйлем 1.1.2* [1; 97]. Егер теориясы индуктивті болса, онда теориясының кез келген моделі теориясының экзистенциалды тұйық моделіне енгізіледі.

Индуктивті теорияда кез келген екі экзистенциалды тұйық модельдер ∀∃-сөйлемдерімен ерекшеленбейді, бұл келесі нәтижемен көрсетілген.

*Теорема 1.1.5* [10; 363]. Айтарлық бірінші ретті тіл болсын және тілінің теориясы. Айтарлық -ке ие және теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын. Онда -дің әрбір -сөйлемі -да ақиқат, сонымен бірге -да да ақиқат болады.

Атап айтқанда, йонсондық теорияны алудың тағы бір әдісі бар. Ол келесі леммадан шығады.

*Лемма 1.1.2.* Айтарлық йонсондық теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделі болсын. Онда йонсондық теория болады.

*Дәлелдеуі.* теориясы үшін және қасиеттерін тексерейік. йонсондық теория болғандықтан, ол ∀∃-аксиоматизациаланған, сондықтан . Айтарлық болсын, бірақ онда . йонсондық теория, сондықтан және модельдері осы теорияның семантикалық моделіне изоморфты түрде енгізіледі. және модельдері экзистенциалды тұйық болғандықтан, онда 1.1.5 теоремаға сәйкес, моделі теориясының моделі болып табылады, яғни теориясы -ке ие.

Енді қасиетінің орындалуын тексерейік. Айтарлық және -изоморфты енгізулер. Онда теориясы қасиетіне ие және болғандықтан, және табылады, Бірақ өз кезегінде -ға изоморфты түрде енгізіледі және ол теориясының моделі болып табылады. Сонымен теориясы амальгама қасиетіне ие екеніне көз жеткіздік.

Айтарлық бекітілген тілде кейбір йонсондық теория және оның семантикалық моделі болсын.

*Анықтама 1.1.8.* Айтарлық болсын. Біз жиынын ның -йонсондық ішкі жиыны деп айтамыз, егер келесі шарттар орындалса:

1) анықталған жиын (ол -дан формула табылады, моделінде шешімі жиыны болатын, мұндағы , яғни формуланың түрі, мысалы және т.б.);

2)  мұндағы арқылы алғашқы геометрияны беретін [5; 289] тұйықталу операторы (мысалы немесе ).

*Лемма 1.1.3.* Айтарлық йонсондық теория болсын, оның экзистенциалды тұйық модельдер класы. Онда теориясы кез келген моделі үшін йонсондық теория болып табылады.

Дәлелдеуін [4, 11] жұмыстардан қарауға болады.

## 1.2 Йонсондық спектр және оның қасиеті

Айтарлық кейбір сигнатура, сигнатурасының барлық формулаларының жиыны, басқаша айтқанда осы тілдің сигнатурасы болсын. Айтарлық сигнатураның кез келген моделі болсын, яғни . моделінің йонсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

тіліндегі йонсондық теория және

тіліндегі -толық йонсондық теория жәнемұндағы сигнатураның барлық сөйлемдер жиынын пренекс нормальді түрге келтіргеннен кейінгі пренекстің түрі.

Теориялар жиынында косеманттылық қатынасы эквиваленттілік қатынас болады. Онда бойынша моделінің йонсондық спектрінің фактор жиыны. Аналогиялық түрде фактор жиынын қарастыруға болады.

Айтарлық болсын. Әрбір теориясы үшін болғандықтан, онда класының семантикалық моделі деп теориясының семантикалық моделін айтамыз: . йонсондық кластың центрі деп оның семантикалық моделінің элементарлық теориясын айтамыз, яғни және әрбір үшін .

ол класының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы. Байқағанымыздай болғандықтан, әрбір теориясы үшін аламыз.

Айтарлық және бірдей сигнатураның модельдері болсын.

*Анықтама 1.2.1.* Біз моделі моделіне йонсондық элементарлы эквивалентті деп айтамыз, егер болса.

Факторизацияны ескере отырып, келесі анықтаманы беруге болады.

*Анықтама 1.2.2.* Біз моделі моделіне -косемантты деп айтамыз, егер болса. Сәйкесінше, моделі моделіне -ға қатысты -косемантты деп айтамыз, егер болса.

Йонсондық теорияның екі моделінің -косеманттылығы толық теорияның екі моделінің элементарлы эквиваленттілігінің ұғымын жалпылайтынын байқау қиын емес. Келесі лемма дұрыс:

*Лемма 1.2.1.* Айтарлық және кез келген сигнатураның кейбір модельдері болсын, онда

.

Айтарлық сигнатурасының кез келген моделі болсын. моделінің кемел йонсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

тіліндегі кемел йонсондық теория және

екені түсінікті.

Айтарлық болсын. Бұл жағдайда үшін барлық өзара тең. Шыныменде, әрбір теориясы кемел болғандықтан, 1.1.4 теоремаға сәйкес . Бірақ , яғни , онда . Сондықтан әрбір теориясы үшін болады. Осылайша, келесі нәтиже дұрыс:

*Лемма 1.2.2.* Айтарлық сигнатурасының кез келген моделі болсын, , онда .

Айтарлық сигнатураның кез келген моделі болсын, . Айтарлық болсын, мұндағы – кейбір индекстік жиын. -категорлы класс деп айтамыз, егер кез келген теориясы -категорлы болса және сәйкесінше, класын -категорлы деп айтамыз, егер әрбір үшін – -категорлы класс болса.

класын -толық деп айтамыз, егер кез келген екі модель үшін болса.

класын кемел деп айтамыз, егер семантикалық моделі қаныққан болса. Аналогиялық түрде біз класының кемелдігін анықтаймыз, яғни класы кемел, егер әрбір кемел болса. класы кемел екені түсінікті, егер = болса.

Егер класы кемел болса, онда семантикалық моделі қаныққан, сәйкесінше кез келген йонсондық теория кемел болып табылады. Онда, кемелділік критерийіне байланысты (Теорема 1.1.1), әрбір – модельді компаньонға ие. Оны кемел класының модельді компаньоны деп атаймыз.

Келесі лемма теорияның кемелденуі мен кез келген йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық модельдер класының элементарлығы арасындағы байланыс туралы фактіні жалпылау болып табылады.

*Лемма 1.2.3.* Айтарлық болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) – кемел;

2) класы элементарлық болып табылады.

*Дәлелдеуі*. 1.2.2 леммадан және 1.1.1 теоремадан шығады.

Келесі анықтамалар мен нәтижелер 1.2.3 теореманы дәлелдеу үшін қажет және [12] жұмыстан алынған.

*Анықтама 1.2.3* [12; 293]. формуласы Γ формула (-ға қатысты) үшін толық деп аталады, егер – -мен үйлесімді болса және бос айнымалылар саны -дан аспайтын әрбір Γ-формула үшін , немесе немесе .

*Анықтама 1.2.4* [12; 293]. – теориясының ()-атомдық моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және әрбір үшін, -дан алынған әрбір элементтер -формула үшін толық болатын кейбір формуланы қанағаттандырады.

*Анықтама 1.2.5* [12; 293].

1) -ның әрбір формула үшін егер болса, онда ) болатынын білдіреді.

2) болса, онда болатынын білдіреді.

*Анықтама 1.2.6* [12; 293]. 1) – теориясының Σ-nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

2) – теориясының -nice-алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның саналымды моделі болса және – -ның әрбір моделі үшін, әрбір және барлық үшін, егер

болса, онда әрбір үшін орындалатындай кейбір табылады.

*Теорема 1.2.1* [12; 305]. Айтарлық экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын, және – теориясының саналымды моделі болсын. Онда (1) ⇒(2) және (2) ⇔ (3), мұндағы:

(1) – ()-атомдық,

(2) – -nice,

(3) – экзистенциалды тұйық және -nice.

*Теорема 1.2.2* [12; 302]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық теория болсын. Онда теориясының екі саналымды -атомдық модельдері изоморфты.

Келесі теорема кейбір семантикалық йонсондық квазикөптүрліліктің кез келген косеманттылық класының центрінің саналымды категорлылығының критерийін сипаттайды.

*Теорема 1.2.3* Айтарлық – сигнатураның кез келген моделі, және – -толық класс. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) класы -категорлы;

2) теориясы -категорлы.

*Дәлелдеуі.* Айтарлық класы -категорлы болсын, яғни әрбір -категорлы. Кері ұйғарайық. – -категорлы болмасын, онда теориясының осындай және саналымды модельдері табылады, олар өзара изоморфты емес.

Бірақ, болғандықтан, онда әрбір үшін . Сәйкесінше, әрбір үшін , . -ның -категорлылығымен қарама-қайшылықты алдық.

Айтарлық -толық класс және теориясы -категорлы болсын. Онда 1.1.2 теорема бойынша, теориясы -категорлы ( модельді компаньонға ие. ∆-ның және әрбір үшін , сонымен бірге және ( модельді үйлесімділігі бойынша, әрбір үшін ( -мен модельді үйлесімді екендігі шығады. ( модельді толық теория болғандықтан, онда әрбір үшін ( ∆-ның модельді компаньоны болады. (-нің модельді толықтығынан, кез келген формула ( тілінде кейбір экзистенциалды формулаға эквивалентті. Онда, Робинсонның модельді компаньонның жалғыздығы туралы теоремасы және йонсондық теорияның кемелдігі туралы критерийі бойынша = ( екендігі шығады. ( ω-категорлы болғандықтан, оның жалғыз саналымды моделі саналымды қаныққан және әрбір үшін орындалғандықтан ол -ге тиісті. 1.1.4 теорема бойынша, әрбір үшін , яғни ( және -де изоморфизмге дейінгі дәлдікпен бір саналымды модел бар, ол -атомдық (1.2.4 анықтамасының мағынасында), мұндағы – барлық тіл. Осыдан – -ның -атомдық моделі, оның модельді толықтығы бойынша = (. класының -толықтығы бойынша, кез келген үшін, әрбір үшін , мұндағы – бос айнымалылардан тұратын ∆ теориясының экзистенциалды формулалар торы. Онда әрбір теория үшін және класы үшін – атомдық модель. Онда 1.1.4 теорема бойынша, моделі -nice-модель болады. Айтарлық болсын. моделі класының -атомдық моделі екенін көрсетейік. Индукция арқылы дәлелдейміз. класының -толықтығы бойынша класы -толық, және сәйкесінше (индукция базисі).

деп ұйғарайық, мұндағы – моделінен моделіне изоморфты енгізілу. Бұл изоморфты енгізілу моделі атомдық бола тұра, алгебралық жай болғандықтан табылады, яғни класының кез келген моделіне изоморфты енгізіледі. Бұл факт [12]-ден (теорема 1.2 пункт (а)) алынды. моделі класының Σ∗-nice моделі болғандықтан, кез келген үшін табылады, яғни

Айтарлық болсын. Осыдан , яғни – экзистенциалды формулаларға қатысты элементарлы кеңейтілуі болып табылады. Сәйкесінше, – -ның -атомдық моделі. Басқаша айтқанда моделі -ге тиісті, моделі класының (Σ, Σ)-атомдық моделі болмайды. Онда 1.2.2 теорема бойынша . моделінің еріктігі бойынша, класы -категорлы.

1.2.6 теореманы дәлелдеу үшін келесі анықтамалар мен нәтижелер қажет [12].

*Анықтама 1.2.7* [12; 292]. формуласы теориясына қатысты -формула деп аталады, егер және орындалатындай және экзистенциалды формулалар табылса.

*Анықтама 1.2.8* [12; 307]. теориясы -ге ие деп айтамыз, егер -мен үйлесімді кез келген экзистенциалды формула үшін орындалатындай -мен үйлесімді формуласы табылса.

*Анықтама 1.2.9* [12; 312]. теориясының саналымды моделі саналымды алгебралық универсалды модель деп аталады, егер оған осы теорияның барлық саналымды модельдері изоморфты енгізілсе.

*Теорема 1.2.4* [12; 315]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық, саналымды алгебралық универсалды модельге ие универсал теория болсын. Онда -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

*Теорема 1.2.5* [12; 309]. Айтарлық – -ге ие, экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -теория болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) алгебралық жай модельге ие,

2) (Σ, ∆)-атомдық модельге ие,

3) (∆, Σ)-атомдық модельге ие,

4) ∆-nice алгебралық жай модельге ие,

5) жалғыз алгебралық жай модельге ие.

Келесі анықтама және теорема М.Морлиге тиесілі және [13] жұмыстан алынған.

*Анықтама 1.2.10* [13; 151]. Модель моделі -ның жай меншікті элементарлы кеңейтілуі деп аталады, егер және  орындалатындай кез келген моделі үшін, – бойынша -ға элементарлы енгізіледі.

*Лемма 1.2.4* [13; 151]. толық теория -категорлы сонда және тек қана сонда, егер оның саналымды моделі жай өзіндік элементарлы кеңейтілуге ие болсын.

Келесі анықтама 1.2.10 анықтаманы йонсондық теориялар аясында жалпылайды.

*Анықтама 1.2.11* [4; 54]. Айтарлық және болсын. Онда – -ның -да алгебралық жай модельді кеңейтілуі деп аталады, егер кез келген ∈ моделі үшін – -ға изоморфты енгізілетіндігінен, – -ға изоморфты енгізілетіндігі шығады.

Келесі нәтиже 1.2.4лемманы (М. Морли) кез келген сигнатураның моделінің йонсондық спектрінің кез келген косемантылық класының саналымсыз категорлы центрінің модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттау аясында нақтылайды.

*Теорема 1.2.6.* Айтарлық – сигнатураның кез келген моделі болсын, және – орындалатын -сөйлемдер үшін толық универсалды теориялар класы болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -категорлы,

2) -нің кез келген саналымды моделі -да алгебралық жай модельді кеңейтілуі бар.

*Дәлелдеуі.* Егер теориясы -категорлы болса, онда Морлидің саналымсыз категорлылық туралы теоремасы бойынша ол изоморфизмге дейінгі дәлдікпен тек бір модельге ие болады және ол модель қаныққан. Сәйкесінше, теориясы кемел. Онда йонсондық теорияның кемелділігі туралы критерий бойынша теориясы модельді толық және әрбір үшін , яғни . Егер теориясы модельді толық болса, онда кез келген изоморфты енгізілу элементарлы болып табылады. толық теория болғандықтан, онда оған 1.2.4лемманы қолдансақ, біз өзімізге қажет тұжырымға қол жеткіземіз.

класының семантикалық моделін қарастырайық. моделі -универсалды екенін байқаймыз. Оның қуаты, жалпы айтқанда, саналымдыдан да көп. Сондықтан оның саналымды элементар ішкі моделін қарастырамыз. В силу того, что модель моделі экзистенциалды тұйық болғандықтан, оның элементарлы ішкі моделі -да экзистенциалды тұйық. Осыдан біз ол саналымды алгебралық универсалды екенін аламыз. Енді 1.1.1 лемманы қолдану ғана қалды, яғни әрбір теория алгебралық жай модельге ие. индукция арқылы анықтаймыз, ол моделінің алгебралық жай модельді кеңейтілуі болады және Онда . және болсын деп ұйғарайық. екенін көрсету үшін -ны саналымды модельдердің тізбегіне жіктейміз. ∆ йонсондық теория болғандығы бойынша бұл мүмкін. функциясын және индукция бойынша изоморфизмдер тізбегін анықтаймыз:

1. және .

2. және

3. – индукциясы бойынша анықталатын тізбелердің бірігуіне тең.

4.

5. деп ұйғарайық. Егер– сюръективті бейнелеу, онда . Кері жағдайда алгебралық жайлылық бойынша-ті : -ге дейін жалғастыру болады.

6.

– -ны -ға изоморфты бейнелейді. Енді 1.2.5теораманы қолдану қалды. – теориясының кез келген моделі, ал шарты мен құрылымына байланысты жалғыз алгебралық жай және экзистенциалды тұйық модель болғандықтан, онда әрбір үшін саналымсыз қуатты жалғыз модельге ие, онда семантикалық модель қаныққан, яғни класы кемел. Осыдан . Сәйкесінше, -категорлы.

П.Линдстрём (1.2.9 теорема) және Д.Сарацино (1.1.2 теорема) теоремаларын нақтылау үшін йонсондық спектрді зерттеу аясында келесі теореманы дәлелдеу қажет.

*Теорема 1.2.7.* Айтарлық – сигнатурасының кез келген моделі болсын, және – Γ-толық класс, мұндағы Онда, егер -категорлы болса, мұндағы , онда .

*Дәлелдеуі.* Айтарлық толық -категорлы класс болсын. Екі жағдайды қарастырамыз: саналымды және саналымсыз.

Егер болса, онда М.Морлидің саналымсыз категорлылығы туралы теоремасынан, класы изоморфизмге дейінгі дәлдікпен жалғыз модельге ие. Ол модельді қаныққан. Сондықтан класы кемел.

Айтарлық -категорлы класс болсын. -толық болғандықтан, онда 1.2.3 теорема бойынша теориясы -категорлы. Бірақ – толық теория, сондықтан 1.1.2 теорема бойынша, -категорлы модельді компаньонға ие. Модельді компаньонның анықтамасынан және өзара модельді үйлесімді. теориясының әрбір үшін және өзара модельді үйлесімді екенін байқаймыз. Сәйкесінше, транзитивтілік бойынша және өзара модельді үйлесімді. – модельді толық теория болғандықтан, онда кез келген теория үшін модельді компаньон болып табылады.

Теореманы дәлелдеу үшін = болатынын дәлелдеу жеткілікті. Онда кемелділік критерийі бойынша әрбір теориясының кемелділігі шығады. Ол үшін бізге алдымен әрбір үшін және теорияларының саналымды модельдері бірдей екенін көрсету жеткілікті.

Айтарлық болсын. – индуктивті теория болғандықтан, онда 1.1.2 сөйлемге сәйкес оның кез келген моделі осы теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделіне енгізіледі. Лёвенгейм-Скулемнің (төменгі) теоремасы бойынша қуатты модель табылады және . 1.1.1 леммаға сәйкес теориясының семантикалық моделі экзистенциалды тұйық болып табылады, , ал Лёвенгейм-Скулемнің (жоғары) теоремасы бойынша моделінің элементарлы ішкі моделі табылады, ол модель және теорияларының экзистенциалды тұйық моделі болып табылады. Бірақ, ол теориялар -категорлы болғандықтан, онда және теориялары өзара модельді үйлесімді болғандықтан, онда теориясының моделі теориясының кейбір моделіне изоморфты енгізіледі және (. Бірақ онда моделі де теориясының моделі болып табылады. Егер ол осылай болмаған жағдайда, онда теориясы модельді толық болғандықтан, онда және орындалатындай универсалды сөйлемі табылушы еді, осыдан . Қарама қайшылықты алдық. Осылайша, .

Енді болатынын көрсетейік. Айтарлық болсын, онда келесі жағдайлар мүмкін: 1) және 2) және ; 3) . 1) жағдай мүмкін емес, өйткені , онда біз және алушы едік. 2) жағдайда біз және теориялары үйлесімді екенін аламыз. Онда и орындалатындай және модельдері табылады. Лёвенгейм-Скулем теоремасы бойынша және саналымды элементарлы ішкі модельдер табылады. Бірақ, теориясы -категорлы болғандықтан, онда ∼ және біз және аламыз. Қарама-қайшылыққа келдік. Яғни екінші жағдай да мүмкін емес. Онда тек 3) жағдайды аламыз, мұндағы .

Айтарлық енді болсын. теориясы толық болғандықтан, онда не 1) , не 2) болады. Бірақ 2) жағдай да мүмкін емес, өйткені біз және алушы едік.

Сонымен біз = екенін дәлелдедік, яғни – теориясының модельді компаньоны болып табылады. Онда кемелділік критерийі бойынша теориясы кемел, онда -да кемел болады, яғни .

Келесі теорема кез келген сигнатураның моделінің йонсондық спектінінің модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу аясында 1.1.2 теореманы (Сарацино) нақтылайды.

*Теорема 1.2.8.* Айтарлық – саналымды тіл, – тілінің кез келген моделі болсын, . Егер [-толық -категорлы класс болса, онда -категорлы модельді компаньонға ие.

*Дәлелдеуі.* Айтарлық -толық -категорлы класс болсын, . Онда 1.2.7 теоремадан екені шығады, яғни – кемел класс. Онда кемелділік критерийі бойынша, теориясы класының модельді компаньоны болып табылады. -толық -категорлы класс болғандықтан, онда 1.2.3 теорема бойынша модельді компаньоны да -категорлы болып табылады.

Модельдер теориясы курсында модельді толықтық ұғымы толықтық ұғымымен сәйкес келмейтіні туралы факт белгілі. Яғни толық болатын, бірақ модельді толық болмайтын және керісінше орындалатын теориялар бар. Осы фактіге байланысты толықтық пен модельдік толықтық арасындағы байланыс туралы бүгінгі күнге дейінгі ең үлкен ақпаратты П.Линдстремнің келесі нәтижесі береді, ол толықтық пен модельдік толықтық ұғымын категорлылық арқылы байланыстырады:

*Теорема 1.2.9* [1; 164]. Егер – толық -теория және -категорлы болсын, мұндағы , онда – модельді толық.

Келесі теорема 1.2.9 (Линдстрем) теоремасын кез келген сигнатураның модельдерінің йонсондық спектрінің модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу аясында нақтылайды.

*Теорема 1.2.10.* Айтарлық – саналымды тіл, – тілінің кез келген моделі болсын, . Егер толық -категорлы класс болса, онда модельді толық.

*Дәлелдеуі*. класы толық және κ-категорлы болғандықтан, онда 1.2.7 теоремаға сәйкес, класс класы – кемел. Онда класының модельді компаньоны болып табылады, яғни модельді толық.

**1.3 Толық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктер**

Төмендегі анықтамалар 1.3.1-1.3.3 [14] жұмыстан алынған, онда жалпыланған йонсондық теориялар анықталған.

*Анықтама 1.3.1* [14; 137]. Айтарлық болсын. Онда:

1) жазуы барлық үшін екенін білдіреді;

2) егер болса, онда - ақиқат тілінің барлық -сөйлемдер жиыны екенін білдіреді;

3) бейнелеуі -енгізілу деп аталады, егер кез келген үшін және -дан Γ үшін орындалса;

4) егер болса, онда жазуы орындалатынын білдіреді;

5) модельдер тізбесі Γ-тізбе деп аталады, егер үшін орындалса.

*Анықтама 1.3.2* [14; 138]. теориясы -тізбелерге (немесе -индуктивті) бірігуіне қатысты тұрақты, егер кез келген моделінің -тізбелері -нің моделі болса.

2) теориясы -енгізілу (қысқаша, -) қасиетіне ие, егер кез келген үшін және -енгізілулер және табылса.

3) теориясы α-амальгама (қысқаша, -) қасиетіне ие, егер кез келген және -енгізулер мен үшін табылса және -енгізулер және табылса, орындалатындай.

Келесі анықтама жалпыланған йонсондық теорияның немесе -йонсондық теорияның анықтамасын береді.

*Анықтама 1.3.3* [14; 138]. теориясы -йонсондық () деп аталады, егер:

1) теориясы шексіз бір модельге ие болса;

2) теориясы -индуктивті болса;

3) теориясы -JEP қасиетіне ие болса;

4) теориясы -AP қасиетіне ие болса.

Егер 1.1.1 анықтама және 1.3.3 анықтаманы салыстырсақ, онда олар -ға дейінгі дәлдікпен ерекшеленеді. Сонымен қатар, 1.3.3 анықтамасында α = 0 үшін йонсондық теориялар, α = ω үшін толық йонсондық теориялар болады. Болашақта 0-йонсондық теориялармен жұмыс істегенде, біз 0-ді түсіреміз.

1.1.1 анықтамадан йонсондық теориялар, жалпы айтқанда, толық емес екенін ескереміз.

Т.Ғ. Мұстафин [14] жұмысында келесі сөйлемдер дәлелденді: 1.3.1 сөйлем және 1.3.2 сөйлем іс жүзінде бізге α-JEP және α-AP ұғымдарының синтаксистік эквиваленттілігін береді.

*Сөйлем 1.3.1* [14; 138]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -JEP қасиетіне ие;

2) теориясы толық модельдер үшін -JEP қасиетіне ие;

3) егер болса, онда және – -формуланың кез келген жиындары, және қарама-қайшылықсыз, онда және қарама-қайшылықсыз.

*Сөйлем 1.3.2* [14; 139]. Келесі шарттар эквивалентті:

1) теориясы -JEP қасиетіне ие;

2) теориясы саналымды модельдер үшін -AP қасиетіне ие;

3) егер және – -формуланың жиындары болса, және , қарама-қайшылықсыз жиындар болады, онда жиыны қарама-қайшылықсыз;

4) кез келген және үшін жиыны -мен жалғыз максималды үйлесімді тілінің -сөйлемдері жиынында жатады.

Екі толық теориялар арасындаға ұқсастық [15] жұмыста енгізілген. Йонсондық теориялар үшін екі йонсондық теория арасындағы ұқсастық [4] жұмыста енгізілген. Екі жұмыста да синтаксистік және семантикалық ұқсастықтарды сипаттайтын кейбір нәтижелер алынды. Біз ұғымдардың қажетті анықтамаларының тізімін және олардың қажетті модельді-теоретикалық қасиеттерін береміз.

Келесі анықтама Т.Ғ. Мұстафинге тиесілі [15].

Айтарлық – толық теория болсын, онда , мұндағы – бос айнымалысы бар формулалардың бульдік алгебрасы.

*Анықтама 1.3.4* [15; 259]. Айтарлық және – толық теориялар болсын. және синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ға дейін шектеуі және буль алгебраларының изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

Толық теориялардың синтаксистік ұқсастығының келесі мысалы [15] жұмыста берілген.

Мысал. сигнатураның және теориялары синтаксистік ұқсас, мұндағы – бинарлы функциялар,

*Анықтама 1.3.5* [15; 260].

1. таза үштік деп аталады, мұндағы құр емес жиын, – -ның ауыстырулар группасы және –-ның ішкі жиындарының жиынтығы, барлық үшін болғанынан орындалады.
2. Егер және ⟨⟩ таза үштіктер болса, және – биекция болса, онда изоморфизм болады, егер:

(a)

(b) .

*Анықтама 1.3.6* [15; 260]. Таза үштік ⟨⟩ теориясының семантикалық таза үштік деп аталады, мұндағы – теориясының монстр-моделінің жасаушысы– -ның автоморфизмдер группасы, –-ның барлық ішкі жиындар класы, әрқайсысы -ның сәйкес элементарлы ішкі моделінің жасаушысы болса.

*Анықтама 1.3.7* [15; 260]. және толық теориялар семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың семантикалық үштіктері өзара изоморфты болса.

Толық теориялардың семантикалық ұқсастығының келесі мысалы [15] жұмыста берілген.

*Мысал.* Келесі және теориялар семантикалық ұқсас, мұндағы

Жоғарыда аталған ұқсастық түрлері бір-біріне тең емес.

*Сөйлем 1.3.3* [15; 261]. Егер және теориялар синтаксистік ұқсас болса, онда және семантикалық ұқсас, керісінше дұрыс емес.

Келесі анықтама семантикалық қасиеттің анықтамасын береді.

*Анықтама 1.3.8* [15; 261]. Теориялардың (немесе модельдердің немесе модельдердің элементтерінің) қасиеті (немесе ұғымы) семантикалық деп аталады, егер ол семантикалық ұқсастыққа қатысты инвариантты болса ғана.

Мысалы, [15] жұмыстан келесі тұжырым белгілі:

*Сөйлем 1.3.4* [15; 261]. Келесі қасиеттер мен ұғымдар семантикалық болып табылады:

1. тип;

2. форкинг;

3. -стабильділік;

4. Ласкар рангі;

5. қатты тип;

6. Морли тізбегі;

7. ортогоналдылық, типтердің заңдылығы;

8. – спектральді функция.

Ағылшын тіліндегі әдебиеттерде [15-19] S моноиді арқылы полигон термині әдетте S-act терминімен қолданылады. Осы параграфта полигон тақырыбына қатысты модельді-теоретикалық ұғымдар мен мәселелерді алғаш анықтап, тұжырымдаған Т.Ғ.Мұстафиннің терминологиясын ұстанамыз [2], [20-21].

*Анықтама 1.3.9* [15; 263]. моноиды арқылы полигон деп (немесе оны S-act деп атаймыз) тек унарлы функцияларды қамтитын структураны айтамыз, ⟨⟩:

1. мұндағы – -тің бірлік элементі

2.

Келесі нәтижелер (1.3.1, 1.3.2 теоремалар) кез келген толық теорияның кейбір синтаксистік ұқсас теориясы бар екенін көрсетеді.

*Теорема 1.3.1* [15; 264]. Шекті сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы дерлік болады.

*Теорема 1.3.2* [15; 263]. Шексіз сигнатурадағы әрбір теория үшін полигондар теориясы бар, сондықтан кейбір елеулі емес кеңейтілуі қабықшасы болады.

**1.4 Йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастығы туралы түсініктер**

Келесі анықтаманы А.Р. Ешкеев йонсондық теорияларды зерттеу аясында енгізді [4].

Айтарлық кез келген йонсондық теория, онда мұндағы –бос айнымалылармен -формулалар торы, – йонсондық теорияның центрі, яғни , мұндағы – йонсондық теорияның семантикалық моделі [2] мағынасында.

*Анықтама 1.4.1* [4; 46]. Айтарлық және – йонсондық теориялар болсын. және йонсондық синтаксиcтік ұқсас деп айтамыз, егер биекция табылса:

1) -тің -ғе дейін шектеуі және торлардың изоморфизмі болып табылады,

2)

3)

Кейбір алгебралық мысалдардың синтаксистік ұқсастығына бірнеше мысал келтіргіміз келеді. Ол үшін [22] жұмысының белгілерінен кейін осы мысалдармен байланысты негізгі анықтамаларды еске түсірейік.

Бульдік сақина деп бірлігі бар ассоциативті сақинаны айтамыз, мұндағы кез келген үшін ; онда , бірақ ; кез келген және үшін орындалады. Онда және сәйкесінше, әрбір үшін , сондықтан ; демек бульдік сақинаның сипаттамасы 2 болады, және болғандықтан, ол коммутативті.

Бұл ұғымды аксиоматизациялау үшін біз екі константа 0 және 1 символдарын, екі бинарлық қатынас + және · символдарын қамтитын тілді енгіземіз. Бульдік сақинада екі бинарлық амалды ∧,∨ және бір унарлы амалды ¬ келесідей анықтаймыз: ;

Келесі қасиеттер барлық үшін орындалады:

– (Морган заңдары немесе немесе екіжақтылық заңдары):

– (ассоциативтілік ):

– ( арқылы дистрибутивтілік):

– ( арқылы дистрибутивтілік):

– ( және коммутативтілігі):

–

–

–

Осы әмбебап аксиомаларды қанағаттандыратын тілінің структурасы буль алгебрасы деп аталады.

Осы жолмен анықталған буль алгебралары мен бульдік сақиналары келесі фактінің салдары ретінде 1.4.1 анықтамадан мағынасында синтаксистік жағынан ұқсас йонсондық теориялардың мысалдары болып табылады:

*Лемма 1.4.1* [22; 80]. Әрбір бульдік сақина нақты буль алгебраны интерпретациялай алады.

Интерпретация – ол синтаксистік ұқсастықтың дербес жағдайы екенін біз оңай көре аламыз.

*Дәлелдеуі.* Бульдік сақинасымен кейбір буль алгебрасын байланыстырамыз; керісінше де дұрыс: егер буль алгебрасында болса, онда бульдік сақинасын аламыз және бұдан басқа орындалады. Осылайша, тілге дейін бульдік сақиналар мен буль алгебраларының структуралары бірдей, бульдік сақина канондық түрде буль алгебрасына және керісінше түрленеді, екі бағыттағы түрлендірулер кванторсыз формулалар арқылы жүзеге асырылатынын көреміз.

Толық теориялар жағдайындағы сияқты (Анықтама 1.3.7), біз екі йонсондық теория арасындағы семантикалық ұқсастықты анықтай аламыз.

*Анықтама 1.4.2* [4; 47]. таза үштігі йонсондық семантикалық үштік деп аталады, мұндағы – теориясының семантикалық моделінің жасаушысы, – автоморфизмдер группасы, – барлық ішкі жиындарының класы, сәйкесінше экзистенциалды тұйық ішкі модельдердің жасаушысы болып табылады.

*Анықтама 1.4.3* [4; 47]. және екі йонсондық теория йонсондық семантикалық ұқсас деп аталады, егер олардың йонсондық семантикалық үштіктері таза үштіктер сияқты изоморфты болса.

Әрі қарай ыңғайлы болу үшін біз келесі белгілерді енгіземіз және толық теорияларының синтаксистік және семантикалық ұқсастығы сәйкесінше және арқылы белгіленеді.

және йонсондық теориялар болған жағдайда арқылы және йонсондық теориялардың синтаксистік ұқсастығы және арқылы және йонсондық теориялардың семантикалық ұқсастығы белгіленеді.

*Лемма 1.4.2.* Кез келген екі косемантты йонсондық теориялар йонсондық семантикалық ұқсас болып табылады.

*Дәлелдеуі*. Дәлелдеуі анықтамадан шығады.

## 2 ЙОНСОНДЫҚ ТЕОРИЯЛАРДЫҢ ГИБРИДТЕРІ ЖӘНЕ ОЛАРДЫҢ МОДЕЛЬДІ-ТЕОРЕТИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

## 2.1 Йонсондық теориялардың гибридтерiнiң қасиеттері

Бұл жұмыста йонсондық теорияның жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылады, атап айтқанда бір тілдің екі түрлі йонсондық теориялардың семантикалық модельдерінің әртүрлі алгебралық құрылымдарын қолдану арқылы алынған теориялар.

Йонсондық теорияны зерттеу кезінде қарастырылып отырған теорияның толық еместігіне байланысты -толықтық немесе -толықтық талабы толық теориялар үшін алынған теоремалардың аналогтарын алудың қажетті шарты болып табылады.

Сондай-ақ, кемел йонсондық теорияларда центрінің модельдер класы оның экзистенциалды тұйық модельдер класымен сәйкес келуіне байланысты йонсондық жиындар анықталады, яғни қарастырылып отырған йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындары, осы семантикалық модельдің кейбір экзистенциалды тұйық модельдерінің анықталған тұйықталулары. Кейбір экзистенциалды тұйық модельдердің барлық ақиқат салдарлардың жиынтығы йонсондық теорияны құрайтыны белгілі. Йонсондық ішкі жиынның анықталатын тұйықталу үшін ақиқат барлық салдарлардың жиынтығы йонсондық теорияны құрайды және осы арнайы ішкі жиынның фрагменті деп аталады.

Бұл парагарафта йонсондық теориялардың жаңа класының модельді-теоретикалық қасиеттері қарастырылады. Яғни, бір тілдің екі түрлі йонсондық теорияларының семантикалық модельдерінің әртүрлі алгебралық құрылымдардың көмегімен алынатын теориялар. Бұл мақаланың мақсаты осындай теориялар арасындағы әртүрлі байланыстарды қарастыру болып табылады. Бұл байланыстарды тереңірек түсіну үшін қарастырылып отырған фрагменттердің семантикалық модельдерінің арнайы алгебралық құрылымдары және осы фрагменттердің гибридтері анықталды. Осындай алгебралық құрылымдарды біз семантикалық гибридтер деп атаймыз.

Гибридтер ұғымы өте кең ұғым. Гибридтердің мысалдары ретінде алгебраның жиі кездесетін үлгілері көп. Мысалы, сызықтық кеңістікті қарастырсақ, бұл мысал йонсондық теорияның шарттарын анық түрде қанағаттандырады. Бірақ ішінде екі бөлек құрылымы бар: абельдік группа және өріс. Олар да екеуі де йонсондық шарттарды қанағаттандырады. Бірақ олардың сигнатуралары бөлек. Осы белгілі мысалдан негізі гибрид ұғымы енгізілген. Ең қарапайым жағдай, бір құрылымның ішінде екі бөлек құрылым бір сигнатурадан болса, одан да күрделі мысал қарастырып отырған екі құрылым екі бөлек сигнатурада болса. Айтылған нәрселер алгебрадан идея ретінде шықса, модельдер теориясының кейбір есептерінің аясында гибрид ұғымы жиі кездеседі. Мысалы қарастырып отырған семантикалық модельдің ішінде егер біз екі анықталған ішкі жиындарды қарастырсақ және олар сонымен қатар йонсондық жиындар болса, онда олардан автоматты түрде гибридті құрастыруға болады. Сондықтан гибридтің бар болуының өзектілігі анық болып есептелінеді.

Семантикалық гибридтің мысалы ретінде қарастырып отырған йонсондық теорияның семантикалық моделінің –ішкі жиынының фрагменттерінің семантикалық модельдерінің бірігуін, қиылысуын, декарттық көбейтіндісін, тура көбейтіндісін, тура қосындысын, фильтрлік және ультрафильтрлік көбейтіндісін қарастырамыз.

Айтарлық бірінші ретті саналымды тіл болсын. тілінің йонсондық теориясы және оның семантикалық моделі болсын.

Осы параграфтың центральды ұғымының анықтамасына көшейік. Атап айтқанда, йонсондық теориялардың гибридтерінің ұғымына. Біз алдымен екі йонсондық теориялар үшін гибрид ұғымын анықтаймыз және де оның екі жағдайы бар. Бірінші жағдай – сигнатуралары бірдей йонсондық теорияларының гибриді. Екінші жағдай – сигнатуралары әртүрлі йонсондық теорияларының гибриді. Бұл мақалада екі йонсондық теория үшін бірінші типтегі гибридтермен жұмыс жасайтын боламыз, бірақ гибрид ұғымын йонсондық теориялардың кез келген санына жалпылауға болатынын байқауға болады.

Бекітілген гибридтің әртүрлі компаньондарының модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеу қызықты болып табылады. Теорияның осындай қасиеттеріне қазіргі модельдер теориясының барлық классикалық атрибуттарын жатқызуға болады. Яғни, олар стабильділік, категорлылық, қатты минималдылық, модельді толықтық, аксиоматизациялау, интерпретациялау, спектрлік сұрақтар және т.б. Семантикалық аспектіге гибридтің семантикалық моделінің анықталған формульды ішкі жиыны ұғымымен байланысты әртүрлі қасиеттерді жатқызуға болады. Яғни, атомдылық, алгебралық жайлылық, экзистенциалды тұйықтылық, дөңестілік, экзистенциалды жайлылық.

C-ның -cl-йонсондық ішкі жиыны болсын, мұндағы С – T теориясының семантикалық моделі. болсын, мұндағы . теориясының семантикалық моделі, теориясының семантикалық моделі.

Алгебралық құрылым амалының мәнін анықтайық. Айтарлық болсын, мұндағы бірігу, қиылысу, декарттық көбейтінді, қосынды, - тура қосынды, фильтрлік және ультрафильтрлік көбейтінді.

Айтарлық болсын, мұндағы теориясының семантикалық моделі, теориясының семантикалық моделі.

Келесі анықтама екі йонсондық теория үшін бірінші типті гибридті береді.

*Анықтама 2.1.1.* йонсондық теорияларының гибриді деп теориясын айтамыз, егер ол теория йонсондық болса. Сонымен қатар, алгебралық құрылымы теорияларының семантикалық гибриді деп аталады.

*Факт 2.1.1. теориясы йонсондық болуы үшін болуы жеткілікті.*

Дәлелдеу. Бұл 1.1.3 леммадан шығады.

Семантикалық гибридтің мысалын келтіреміз. Сызықтық кеңістік өріс арқылы модульдің жеке жағдайы болып табылады. Сызықтық алгебрадан сызықтық кеңістіктің өлшемділігімен байланысты келесі нәтиже белгілі:

*,*

мұндағы сызықтық кеңістік, ал  *-*оның ішкі кеңістіктері және

Осы сызықтық кеңістіктердің өлшемділіктерінің тәуелділігін -модуль тілінде интерпретациялауға болады, мұндағы -өріс және жиын ретінде -жиындарды қарастыратын боламыз және Сонымен бірге және *-*нің семантикалық гибриді болады, мұндағы алгебралық құрылым ретінде ішкі кеңістіктердің тура қосындысын қарастырамыз, яғни . Бұл модульдер теориясы йонсондық теория екендігінен шығады.

Сонымен, жоғарыда көрсетілген анықтамадан йонсондық теориялардың гибридтері және олардың семантикалық гибридтері кейбір бекітілген йонсондық теорияның фрагментінің класында анықталған. Сонымен қатар осы анықтамаға қатысты бірнеше параметрлерді аламыз:

1. -дағы формулалар түрі;
2. тұйықталу операторының түрі;
3. семантикалық гибридтердің алгебралық құрылымдарының түрлері;

Жалпы айтқанда семантикалық гибридтің алгебралық құрылымдары осы берілген теорияның модельдер класына қатысты тұйық емес. Осыған байланысты қарастырылып отырған теория қарастырылып отырған алгебралық констукцияға қатысты тұйық.

Яғни, келесі параметрді белгілеуіміз қажет:

1. алгебралық құрылым арқылы қарастырып отырған теорияның тұйықтылығы.

Гибридтің анықтамасы айтарлықтай жалпы болып табылады, ол көптеген параметрлерден тәуелді, біз нақты нәтижелер алу үшін осы параметрлерді ескеруіміз қажет. Бұл мақалада біз әрі қарай –сөйлемі үшін толық дөңес экзистенциалды жай йонсондық теориямен жұмыс жасайтын боламыз. Тұйықталу операторы ретінде алгебралық тұйықталуға тең болатын операторын қарастырамыз, яғни Семантикалық гибридті алу үшін алгебралық құрылым ретінде декарттық көбейтіндіні қарастырамыз. Жоғарыда келтірілген параметрлер йонсондық теориялардың өте кең класын анықтайды, дербес жағдайда оған сызықтық кеңістіктер жатады. Сызықтық кеңістік мысалы бізге түйсік пен идея мағынасы тұрғысынан негізгі болды. Сондықтан сызықтық кеңістіктің кейбір ішкі идеялогиясын сақтау үшін және сонымен бірге жалпылықты жоғалтпау үшін біз барлық йонсондық теориялардың кейбір ішкі кластарымен жұмыс жасайтын боламыз. Оларға сызықтық кеңістікте жатады және олар басқа алгебралар сияқты басқа да қасиеттерді қанағаттандырады. Ол үшін біз келесі анықтамаларды қарастырайық.

*Анықтама 2.1.2.* индуктивті теориясы экзистенциалды жай деп аталады, егер оның алгебралық жай моделі болса, оның алгебралық жай модельдер класы деп белгіленеді және – класымен қиылыспаса, яғни .

*Анықтама 2.1.3.* теориясы дөңес деп аталады, егер оның моделі үшін және -ның модельдері болатын -ның ішкі құрылымдарының кез келген жиынтығы үшін қиылысуы -ның моделі болады.

Әрі қарай біздің зерттеуіміздің объектісі болып экзистенциалды жай дөңес –толық йонсондық теориялар табылады.

*Теорема 2.1.1.* Айтарлық кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық йонсондық теория болсын. – теориясындағы -жиын, мұндағы , кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық йонсондық теориялар. сәйкесінше олардың семантикалық моделдері. Онда егер олардың гибриді мен моделді үйлесімді болса, онда – үшін кемел йонсондық теория болады.

*Дәлелдеуі.* Кері жорамалдайық. Онда гибрид йонсондық теория болады және оның семантикалық моделі бар, берілген гибридінің кемел еместігінен, семантикалық моделін қарастырсақ ол өзінің қуатында қанықпаған болады. Онда табылады және моделінде жүзеге аспайтын тип табылатынын білдіреді, анығырақ . типінің үйлесімділігінен, осы тип кейбір элементарлы кеңейтілуде жүзеге асады. гибридтің йонсондығынан және оның -мен модельді үйлесімділігінен моделі табылады - -ның ішкімоделі болатын, мұндағы . – семантикалық модельге енгізіледі, бірақ – теориясының қаныққан моделі болып табылады, мұндағы . Изоморфты енгізілуден, -тан -ға рұқсат етеді, және типі -де жүзеге асқандықтан, ол -да да жүзеге асады. Бірақ және экзистенциалды жай дөңес теория болғандықтан, типі жүзеге асатын саналымды моделі табылады. Дөңестіктен, моделі ядролық модель болады, яғни ол -дан алынған басқа модельдерге алгебралық жай модель ретінде тура бір рет енгізіледі. Бірақ -дың гибридімен модельді үйлесімділігінен, бойынша – -дан алынған кейбір модельге изоморфты түрде енгізіледі. кемел теориялар болғандықтан олардың центрі модельді толық, яғни кез келген мономорфизм осы центрдің модельдерінің арасында элементарлы болады. Ал ондайларға кемелділік бойынша -дан алынған барлық модельдер жатады. Онда жоғарыда айтылған изоморфизмі элементарлы болады, яғни – моделінің саналымды ішкі моделінде жүзеге асады. Кемелділік еместің жорамалынан қайшылықты аламыз.

*Теорема 2.1.2.* Айтарлық – 2.1.1 теореманың шарттарын қанағаттандырсын және – -категорлы болсын. Онда олардың гибриді де -категорлы йонсондық теория болады.

*Дәлелдеуі.* Жоғарыда айтылған 2.1.1 теоремадан гибриді кемел йонсондық теория болады. Кері жорамалдайық, яғни гибриді -категорлы йонсондық теория болмасын. Айтарлық, -тан алынған және – екі саналымды модельдер өзара изоморфты емес болсын. Онда -тан алынған және саналымды модельдер табылады, -ға изоморфты түрде енгізілетін, -қа изоморфты түрде енгізілетін. Ол кез келген индуктивті теорияда кез келген модель осы теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделіне изоморфты түрде енгізілетінен шығады. Бірақ теорияның шарты бойынша теориясы -мен модельді үйлесімді. Онда және кейбір саналымды моделіне изоморфты түрде енгізіледі, бірақ дөңес теория болғанықтан, онда бейнесі және бейнесі моделінде құр болып қиылыспайды. Айтарлық ол қиылысу моделіне тең болсын. Онда жоғарыда айтылған экзистенциалды жайлылықтың және саналымды категорлылығынан болғандықтан шығады, мұндағы ал . Бірақ бұл дұрыс емес, өйткені шарт бойынша – -категорлы. Сәйкесінше, -дің -категорлы еместігінің жорамалдауынан қайшылыққа келдік.

Гибридтердің зерттеу аясында келесі пайда болған ашық сұрақтарды келтірейік.

*1-сұрақ.*группасы берілсін, болсын. – группасының екі нормальді бөлгіштері. Айтарлық ның -йонсондық ішкі жиындары болсын, мұндағы теориясының семантикалық моделі.

Айтарлық болсын, мұндағы

Онда болсын. Мұндағы, және теориялары -йонсондық теориялар. Ал олардың гибриді , мұндағы теориясының семантикалық моделі, теориясының семантикалық моделі. Онда келесі теориясы табылып, яғни бола ма? Егер болса қандай осы шартты қанағаттандырады? Мұндағы алгебралық құрылым ретінде ішкі кеңістіктердің тура қосындысын қарастырамыз, яғни .

*2-сұрақ.* – йонсондық теориялар болсын және – йонсондық теориялар болсын. Онда олардың семантикалық модельдері бар, сәйкесінше теорияларының семантикалық модельдері, сәйкесінше теорияларының семантикалық модельдері.

Егер , болса, онда болады. Яғни теориясы табылады, ол теорияларының гибриді болатын, теориясы табылады, ол сәйкесінше теорияларының гибриді болатын. Сонымен, орындалады ма?

3-*сұрақ.* – йонсондық теориялар болсын, сәйкесінше теорияларының семантикалық модельдері. Онда

1)  болса, онда орындалатындай, теориясы табыла ма? Мұндағы - теориясының семантикалық моделі.

2)  орындалса, теориясы қандай теория болады?

3) теорияларының арасындағы байланыс қандай болады? Егер болса, мұндағы *.*

4-*сұрақ .-*йонсондық теория болсын*, -* оның семантикалық моделі.

келесі группаныңжиынға әрекетін қарастырайық, *.*

Яғни, *1) ;2)*

Семантикалық модельдің ішкі жиыны әрекет бойынша инвариантты деп атаймыз, егерболса.

*, -*нің -йонсондық ішкі жиындары болсын.

*–* йонсондық теория,  *–* йонсондық теория.

Айтарлық болсын.

*,* йонсондық теориялар, сәйкесінше теорияларының семантикалық модельдері.

үшін келесі әрекеттер орындалсын:

2. *.*

Онда осы әрекеттер үшін егер*-* бойынша инвариантты болса, жоғары есеп қарастырылсын.

**2.2 Йонсондық теориялардың арнайы iшкi кластары гибридтерiнiң кiшiгiрiм модельдерi**

Классикалық модельдер теориясының маңызды аспектілерінің бірі қарастырылатын теорияның саналымды модельдерін сипаттау болып табылады. Бұл параграфта біз бұл тақырыпты екі мәселенің қиылысы аясында қарастырамыз. Атап айтқанда, бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының көмегімен осы жиындардың фрагменттерінің гибридтерін қарастырып, содан кейін «осы гибридтер үшін арналған реостат» принципін [23; 88] қолдана отырып, осы гибридтердің кішігірім модельдерінің кейбір қасиеттерін зерттеледі.

Кішігірім модельдер деп саналымды тілдің бекітілген теорияларының саналымды модельдерінің әртүрлі типтерін түсінеміз. Модельдердің бұл түрлеріне мыналар жатады: минималды, ядролық, қатаң, атомдық, жайлылық, экзистенциалды тұйықталған және осы бекітілген теорияға қатысты олардың әртүрлі жалпылаулары. Мысалы, алгебралық жай модель ұғымы жай модельді жалпылау болып табылады.

[12] жұмыста атомдық модельді жалпылаудың әртүрлі түрлері қарастырылды және бұл жұмыста біз «реостат принципі» арқылы бұл жалпылауларды интерполяциялаймыз. Төменде кішігірім модельдердің әртүрлі типтерінің анықтамаларының тізімі, сондай-ақ қарастырылатын теорияның семантикалық моделінің арнайы формулалық ішкі жиындары болып табылатын йонсондық жиындарының [23] әртүрлі тұйықталуының ерекше жағдайлары берілген. Бұл ішкі жиындардың анықталған тұйықталуын модельдердің арнайы түрлері анықтайды, ал сәйкес өзара үйлесімді модельге сәйкес бекітілген фрагменттер үшін біз осы фрагменттердің гибридтерін қарастырамыз және кішігірім модельдерді зерттейміз.

Индуктивті теорияның модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттегенде экзистенциалды тұйық модельдер маңызды рөл атқарады, ал индуктивті теориялар үшін экзистенциалды тұйық модельдер класы ешқашан құр жиын болмайды. Оның анықтамасын еске түсірейік.

*Анықтама 2.2.1.* теориясының моделі экзистенциалды тұйық деп аталады, егер кез келген моделі және тұрақтылары бар кез келген экзистенциалды формуласы үшін болса, бұл жағдайда моделі моделінің ішкі моделі болады және .

Индуктивті модель үшін жай модельдің (толық теория мағынасында) аналогы, жалпы айтқанда, толық емес теория – бұл алгебралық жай модель ұғымы, оны А.Робинсон енгізген [12].

*Анықтама 2.2.2.* – теориясының алгебралық жай моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және – -ның әрбір моделіне изоморфты түрде енгізілсе.

Экзистенциалды жай теорияның келесі анықтамасын А.Р. Ешкеев [4] еңбегінде енгізді.

*Анықтама 2.2.3.*  индуктивті теориясы экзистенциалды жай деп аталады, егер оның алгебралық жай моделі болса, оны класы (алгебралық жай модельдер) арқылы белгіленсе; тривиальды емес класымен қиылысады, яғни .

Дөңес теорияның келесі анықтамасы А.Робинсонға тиесілі [24].

*Анықтама 2.2.4*. теориясы дөңес деп аталады, егер оның кез келген моделі үшін және теориясының модельдері болып табылатын А ішкі құрылымдарының кез келген жиынтығы T-ның моделі болса және ол қиылысу құр жиын болмаса. Сонымен қатар, мұндай қиылысу ешқашан құр жиын болмаса, онда Т қатты дөңес деп аталады.

Төмендегі анықтама Дж.Болдуин мен Д.Кикердің еңбектерінен алынған [12].

*Анықтама 2.2.5.* – теориясының ()-атомдық моделі деп аталады, егер – -ның моделі болса және әрбір үшін элементтерінің әрбір кортежі -ден -ге дейінгі кейбір формуланы қанағаттандырады, -формулалар үшін толық болатын.

Төмендегі 2.2.6 және 2.2.7 анықтамалар кішігірім модельдердің әртүрлі түрлеріне, сондай-ақ йонсондық жиындарының ерекше жағдайларына арналған [23].

*Анықтама 2.2.6.* жиыны теориясының () -cl атомдық жиыны деп аталады, егер

1) болатындай кез келген формуласы үшін – үшін толық формула болады және ;

2) және алынған моделі теориясының () -cl атомдық моделі деп аталады.

*Анықтама 2.2.7.*  жиыны теориясының () -cl алгебралық жай жиыны деп аталады, егер

1) – теориясының () -cl атомдық жиыны болса;

2) және алынған моделі теориясының () -cl алгебралық жай моделі деп аталады.

Келесі анықтама модельді үйлесімді теорияның анықтамасы [1].

*Анықтама 2.2.8.* және өзара модельді үйлесімді, яғни теориясының әрбір моделі теориясының моделіне енгізіледі және керісінше.

*Анықтама 2.2.9.* Теория экзистенциалды ядролы деп аталады, егер бұл теория экзистенциалды жай болса және экзистенциалды тұйық алгебралық жай модельдер арасында кем дегенде бір ядролы модель болса.

Бізге қажет кейбір модельдердің атомдылығының ерекше түрлерін анықтау үшін біз келесі идеяны қолдандық.

Бұл «реостат» принципі [23].

*«Реостат» принципі.*

Айтарлық кейбір йонсондық теорияның саналымды модельдері берілсін. Сонымен қатар, [25] мағынасында атомдық модель, ал – теориясының () – cl алгебралық жай жиыны және болғандықтан, .

жиынының ()-алгебралық жайлылық анықтамасы бойынша моделі бір уақытта экзистенциалды тұйық және алгебралық жай болады. Осылайша, моделі моделіне изоморфты түрде енгізілген. Шарт бойынша моделі саналымды атомдық модель болғандықтан, Воот теоремасы бойынша жай модель болады, яғни моделіне элементарлы енгізілген. Осылайша, модельдері бір-бірінен тек X жиынының ішкі бөлігінде ерекшеленеді. болғандықтан, кез келген элемент кейбір негізгі типті жүзеге асыратынынан туындайды. Яғни, [26] мағынасында барлық саналымды атомдық модельдер бір-біріне изоморфты болып табылады, содан кейін ұлғайта отырып, біз негізгі типті жүзеге асырмайтын көбірек элементтерді табамыз және сәйкесінше атомдық модель емес. Сонымен, реостат принципі мынада: жиынының қуатын арттыру арқылы біз [26] мағынасында атомдық ұғымнан алшақтаймыз және керісінше, жиынының қуатын азайту арқылы біз [12] мағынасында атомдық ұғымнан алыстаймыз.

Айтарлық *ААРС*{атомдық, алгебралық жай,ядролық}. Осылайша, X жиынын ()-cl – *AAPC* (мұнда *APC* семантикалық қасиет) ретінде ескере отырып, [26] мағынасында атомдылыққа (А) қатысты [12] мағынасында атомдылықты да көрсете аламыз. Және сәйкесінше, *AAPC* қасиетін анықтағаннан кейін «реостат» принципін қолдана отырып, принциптен рөлін атқаратын атомдық модельдердің сәйкес түсініктерін аламыз.

Айтарлық - 1.1.8 анықтамадағыдай болсын және .

*Теорема 2.2.1*. Айтарлық Т – кемел, қатты дөңес, экзистенциалды ядролы, -сөйлемдері үшін толық йонсондық теория болсын.

– Т теориясының -cl атомдық жиындары болсын, мұндағы . сәйкесінше теорияларының семантикалық модельдері болсын. теориясы Т теориясымен және теориясымен модельді үйлесімді. Айтарлық болсын.

Егер атомдық модельдер болса, онда саналымды модель және болатындай табылады және алгебралық жай модель болады.

*Дәлелдеуі.* Теореманың басындағы шарттар тәуелсіз. Яғни, бір-бірімен әр түрлі комбинациялар бар: кемел, қатты дөңес, экзистенциалды ядролы, -сөйлемдері үшін толық. Осылайша, барлық осы шарттар бір мезгілде қанағаттандырылады, бұл йонсондық теориялардың ішінен жалпы айтқанда, толық емес теориялардың жеткілікті жақсы класын бөліп көрсетеді.

[27] жұмыстан дөңес теориялар келесі қасиетті қанағаттандыратыны белгілі: дөңес теорияның кез келген моделі үшін оның кез келген құр жиын емес ішкі жиындары осы теорияның жалғыз ішкі моделін құрайды. Атап айтқанда, бұл модель берілген жиынды қамтитын осы теорияның барлық модельдерінің қиылысуы болып табылады. Егер қатты дөңес болса, онда осы -ның моделіндегі барлық -ның модельдерінің қиылысуы да -ның моделі болады. Бұл қиылысу -ядролы модель деп аталады.

Егер осы теорияның қатты дөңес болуына байланысты үйлесімді енгізілу қасиетін қанағаттандырса, онда оның ядролы моделі изоморфизмге дейін жалғыз. Яғни, ядролы модельдің -ның әрбір моделінің дәл бір ішкі моделіне изоморфты және осы қасиеті бар ең үлкен модель ретінде анықталады.

Реостат принципін пайдалана отырып, жиындары қуат бойынша неғұрлым үлкен болса, соғұрлым теориясының экзистенциалды тұйық модельдері атомдық модельдерінен [26] мағынасында ерекшеленетінін көреміз. Бірақ және теориялары теориясымен модельді үйлесімді болғандықтан, -нің кез келген моделі, мұнда кейбір моделіне изоморфты түрде енгізілген, мұндағы .

алгебралық құрылымды қарастырайық, оны деп белгілейміз. йонсондық теория болғандықтан, оның аксиоматизациялану қасиетіне байланысты оның модельдер класы изоморфты бейнелерге қатысты тұйық, демек, жалпылықты жоғалтпай деп қорытынды жасауға болады. теорияның қатты дөңестігін ескере отырып, болады және айтарлық болсын. Сонымен қатар, Т теориясының экзистенциалды ядролығына байланысты теориясының ядролық моделі табылады, ол -тың экзистенциалды тұйық ішкі моделі болып табылады. аксиоматизацияланатын теория болғандықтан және модельдері болады, онда біз деп қорытынды жасаймыз. және теориялары теориясымен модельді үйлесімді болғандықтан, жалпылықты жоғалтпай, деп қорытынды жасауға болады, мұндағы . Сонда, [12] жұмыстағы 3.2 б) теоремасы бойынша модель болады, мұндағы . Енді қарастырамыз, өйткені *T*,, модельді үйлесімділігіне қатысты және *T*-ның -толық йонсондық теория болғандықтан, ол болады. теориясы теориясымен модельді үйлесімді екенін көру оңай, онда кез келген екі – (Σ, Σ)-cl – атомдық модельдер үшін моделі табылады, ол - cl алгебралық жай, -ды ретінде алуға болады.

## ∆-*PJ* теориялардың гибридтерi

Бұл параграфта біз йонсондық теорияларының ерекше позитивті жағдайы үшін гибрид ұғымын анықтағымыз келеді. Осы уақытқа дейін біз кейбір бекітілген йонсондық теориямен тығыз байланысты йонсондық теориялардың гибриді түсініктерін анықтадық. Йонсондық теорияның ұғымын анағұрлым жалпы контексте, атап айтқанда, позитивті модельдер теориясын зерттеу аясында да қарастыруға болатыны белгілі.

Одан әрі позитивті модельдер теориясын зерттеу аясында йонсондық теорияларды зерттеу қолға алынды [9]. Бұл параграфта біз позитивті модельдер теориясының дербес жағдайын қарастырамыз және бұл мүмкіндіктің бату кезінде сақталған формулалар формасына қатысты екенін ескереміз, батулар, өз кезегінде, гомоморфизмдердің дербес жағдайы болып табылады.

Айтарлық *L* бірінші ретті тіл болсын. – осы тілдің атомдық формулаларының жиыны. – барлық атомдық формулалардың, олардың ішкі формулаларының және айнымалылардың өзгерістерінің позитивті буль комбинацияларына (конъюнкциялары мен дизъюнкцияларының) қатысты тұйық жиын. – -ға ( және ) кванторларын қолдану арқылы алынған пренекс нормаль формулалар жиыны. Формула жиынына жататын болса, ол позитивті формула деп аталады. Теория позитивті аксиоматизацияланатын деп аталады, егер оның аксиомалары позитивті болса. -ден алынған формулалардың кез келген буль комбинациясы. үшін болатынын көру оңай мұндағы

[29, 30] жұмыстарына сүйене отырып біз құрылымдар арасындағы -морфизмдерді анықтаймыз. Айтарлық M және N тілдік құрылымдар болсын, бейнелеуі -гомоморфизм деп аталады (символдық ), егер кез келген фактісі бойынша болса; екенін білдіреді.

[29, 30] жұмыстарына сүйене отырып моделі -де басталуы деп аталады, ал -ге дейін кеңейеді деп аталады, ал () – -ның кеңейтілуі деп аталады. Егер бейнелеуі инъективті болса, онда -ді -де батады (символдық түрде ).

Әрі қарай біз ∆-жалғасу және ∆-бату терминдерін қолданамыз. Осы анықтаманың (∆-гомоморфизм) аясында мұны оңай аңғаруға болады, изоморфты енгізу және элементар енгізу сәйкесінше ∆ = B(At) және ∆ = L болғанда ∆-бату болып табылады.

Келесі қажетті анықтамаларды қарастырайық.

*Анықтама 2.3.1*. Егер – -құрылымдардың класы болса, онда -тен элементі -де ∆-позитивті экзистенциалды тұйық деп аталады. Егер әрбір ∆ – М-дан -нің кез келген элементіне гомоморфизм болса, онда ол ∆-бату деп аталады. Барлық ∆-позитивті экзистенциалды тұйықталған модельдердің класы арқылы белгіленеді; егер кейбір теориясы үшін болса, онда арқылы біз сәйкесінше осы теорияның экзистенциалды тұйық және ∆-позитивті экзистенциалды тұйық модельдер класын айтамыз.

*Анықтама 2.3.2.* Біз теориясы  JEP-ке ие деп айтамыз, егер кез келген екі модельдері үшін моделі табылып және ∆-жалғасуы үшін , бар болса.

*Анықтама 2.3.3.* Біз теориясы АP-ке ие деп айтамыз, егер кез келген үшін , орындалатындай, мұндағы -жалғасу болып табылады, табылады және , бар болса, мұндағы болатындай ∆-жалғасу.

*Анықтама 2.3.4*. теориясы  -позитивті йонсондық теория (-PJ) деп аталады, егер ол келесі шарттарды қанағаттандыратын болса,:

1. ең құрығанда бір шексіз модельге ие болса;
2. позитивті -аксиоматизацияланған болса;
3. -JEP-ке ие болса;
4. -АP-ке ие болса.

Айтарлық – бекітілген йонсондық теориясының семантикалық моделі болсын.

*Анықтама 2.3.5*. Айтарлық C қуат жиынындағы оператор болсын. йонсондық алғашқы геометрия деп айтамыз, егер төмендегі шарттар орындалса:

Егер болса, онда және .

Егер болса, онда cl(.

(Ауыстыру). және онда

(Шекті сипат). Егер және болса, болатындай шекті табылады.

Біз тұйық деп айтамыз, егер .

*Анықтама 2.3.6*. Егер йонсондық алғашқы геометрия болса, біз А – C-ның йонсондық тәуелсіз (J-тәуелсіз) ішкі жиыны деп айтамыз, егер барлық үшін және Y үшін J-базис болса, , егер -J-тәуелсіз және болса.

*Лемма 2.3.1*. Егер J-йонсондық алғашқы геометрия болса, және барлық үшін J-базис болса, онда .

Біз Y үшін J-өлшем деп атаймыз, және оны түрінде жазамыз.

Егер болса, біз локализацияны да қарастырамыз.

*Лемма 2.3.2*. Егер J- алғашқы геометрия болса, онда J- алғашқы геометрия болады.

Егер J- алғашқы геометрия болса, онда   А үшін J-тәуелсіздік деп айтамыз, егер үшін J-тәуелсіздік болса. Біз арқылы локализациядағы Y-тің J-өлшемділігін белгілейміз. Біз ) Y-тің A арқылы J-өлшемділігі деп атаймыз.

*Анықтама 2.3.7*. Біз ді модульді алғашқы геометрия деп атаймыз, егер кез келген шекті-өлшемді тұйықталған үшін келесі теңдік орындалса:

*Анықтама 2.3.8*. Егер модульді болса, онда Т йонсондық теориясы модульді деп аталады, мұндағы С – Т йонсондық теорияның семантикалық моделі.

*Анықтама 2.3.9*. Айтарлық болсын. Біз Х – С-ның -позитивті йонсондық ішкі жиыны деп атаймыз, егер Х келесі шарттарды қанағаттандырса:

1) Х – -анықталған жиын (бұл дегеніміз -дан формула табылады С-дағы шешімі Х жиыны болатындай, мұндағы , ол келесі түрдегі формула, мысалы және т.б.);

2) *,* мұндағы анықталған тұйық оператор және арқылы алғашқы геометрияны анықтайтын оператор.

Төменде қарастыратын барлық морфизмдер ∆-батулар болады.

*Лемма 2.3.3.* Айтарлық Т – позитивті йонсондық теория болсын. оның экзиcтенциалды тұйық модельдер класы болсын. Онда теориясының әрбір моделі теория болады.

Айтарлық Т – позитивті йонсондық теория және С – теорияның семантикалық моделі болсын. Айтарлық ­– теорияның С моделінің ішкі жиындары болсын. – теорияның фрагменттері. Айтарлық болсын, мұндағы

-дің теориясының семантикалық моделі, -нің теориясының семантикалық моделі,

Келесі анықтама бірдей сигнатураның екі фрагменттерінің гибридтінің анықтамасын береді.

*Анықтама 2.3.10.*  фрагменттерінің гибриді деп теориясын айтамыз, егер ол теория болса, мұндағы -дің семантикалық модельдері,

*Факт 2.3.1.*  теориясытеория болуы үшін болуы жеткілікті.

Келесі мысалдар теорияларының гибридтерінің мысалдары болады:

Айтарлық

1. Айтарлық теория болсын*,* ның теориясының семантикалық моделі. ішкі жиындары, мұндағы Онда - теорияның гибриді болып табылады.
2. Айтарлық абельдік группаның теориялары болсын*,* ның теориясының семантикалық моделдері болсын. Онда - теорияның гибриді болып табылады.
3. Айтарлық – сызықтық кеңістік болсын. – сызықтық ішкі кеңістіктер, . Онда - теорияның гибриді болып табылады.

Сондай-ақ, PJ теорияларының гибридтерінің мысалдары болатын бірқатар тапсырмалар бар.

1. Айтарлық группа, группасының нормаль бөлгіштері болсын. ның теориясының семантикалық моделі. Айтарлық болсын, мұндағы . теориялар. Онда олардың гибридтері болады, мұндағы -дің теориясының семантикалық моделі, -нің теориясының семантикалық моделі. Онда теориясы табылады, және егер осындай теориясы табылса, онда қандай шарттарға ие болады? Мұнда алгебралық амал үшін тура қосынды болады: .
2. Айтарлық теориялар және теориялар болсын. Онда -нің теорияларының семантикалық моделдері, -нің теорияларының семантикалық моделдері. Егер, онда , табылады осындай теориялар , , қайсысы теорияның гибридтері болады?

Бұл теориялар класын зерттеген кезде біз келесі нәтижелерге қол жеткіздік:

Айтарлық болсын.

*Теорема 2.3.1.* Айтарлық кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық фрагмент болсын. – теориясындағы -жиындар болсын, мұндағы , кемел дөңес экзистенциалды жай сөйлемдер үшін толық фрагменттер. сәйкесінше олардың семантикалық моделдері. Онда егер олардың гибриді мен моделді үйлесімді болса, онда үшін теория болады.

*Дәлелдеуі.* Кері жорамалдайық. Онда гибрид теория болады және оның семантикалық моделі бар, берілген гибридінің кемел еместігінен, семантикалық моделін қарастырсақ ол өзінің қуатында қанықпаған болады. Онда табылады және моделінде жүзеге аспайтын тип табылатынын білдіреді, анығырақ . типінің үйлесімділігінен, осы тип кейбір элементарлы кеңейтілуде жүзеге асады. фрагменттердің гибридінің йонсондығынан және оның -мен модельді үйлесімділігінен моделі табылады - -ның ішкі моделі болатын, мұндағы . – семантикалық модельге енгізіледі, бірақ – теориясының қаныққан моделі болып табылады, мұндағы . -бату бойынша, -тан -ға рұқсат етеді, және типі -де жүзеге асқандықтан, ол -да да жүзеге асады. Бірақ және экзистенциалды жай дөңес теория болғандықтан, типі жүзеге асатын саналымды моделі табылады. Дөңестіктен, моделі ядролық модель болады, яғни ол -дан алынған басқа модельдерге алгебралық жай модель ретінде тура бір рет енгізіледі. Бірақ -дың гибридімен модельді үйлесімділігінен, – -дан алынған кейбір модельге -бату бойынша енгізіледі. кемел теориялар болғандықтан олардың центрі модельді толық, яғни кез келген мономорфизм осы центрдің модельдерінің арасында элементарлы болады. Ал ондайларға кемелділік бойынша -дан алынған барлық модельдер жатады. Онда жоғарыда айтылған -бату элементарлы болады, яғни – моделінің саналымды ішкі моделінде жүзеге асады. Кемелділік еместің жорамалынан қайшылықты аламыз.

*Теорема 2.3.2.* Айтарлық - 2.3.1 теореманың шарттарын қанағаттандырсын және - -категорлы фрагменттер болсын. Онда олардың гибриді де -категорлы теория болады.

*Дәлелдеуі.* Жоғарыда айтылған 2.3.1 теоремадан гибриді кемел теория болады. Кері жорамалдайық, яғни гибриді -категорлы йонсондық теория болмасын. Айтарлық, -тан алынған және – екі саналымды модельдер болсын. Онда -тан алынған және саналымды модельдер табылады, -ға изоморфты түрде енгізіледі, -қа изоморфты түрде енгізіледі. Ол кез келген индуктивті теорияда кез келген модель осы теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделіне изоморфты түрде енгізілетіндігінен шығады. Бірақ теорияның шарты бойынша теориясы -мен модельді үйлесімді. Онда және кейбір саналымды моделіне изоморфты түрде енгізіледі, бірақ дөңес теория болғанықтан, онда бейнесі және бейнесі моделінде бос болып қиылыспайды. Айтарлық ол қиылысу моделіне тең болсын. Онда жоғарыда айтылған экзистенциалды жайлылықтың және саналымды категорлылығынан болғандықтан шығады, мұндағы ал . Бірақ бұл дұрыс емес, өйткені шарт бойынша – -категорлы. Сәйкесінше, -дің -категорлы еместігінің жорамалдауынан қайшылыққа келдік.

**2.4 Өзара модельді-үйлесімді фрагменттерінің централдық типтерінің алгебрасы**

Бұл параграфта кейбір бекітілген йонсондық спектрдің централдық типімен байланысты алгебраны қарастырамыз. Дәлірек айтқанда, біз кейбір йонсондық спектрдің косемантылық кластарының бірінде жұмыс істейміз. Сонымен қатар, бұл кластың центрі – кемел, толығымен модельді-үйлесімді теория. JSB-мәселесінің ерекше жағдайларының бірі йонсондық теорияның кейбір бекітілген экзистенциалды тұйық модельдер класын зерттеу аясында қарастырылады. Йонсондық спектрдің синтаксистік және семантикалық қасиеттерін сипаттауға қатысты мәселелер – бекітілген йонсондық теориялардың косеманттылық қасиеттерін зерттеуде пайда болған жаңа мәселелер болып табылады, мұндағы – кез келген сигнатураның кез келген моделі [1; 80].

Осы параграфтағы орталық идея – толық теориялар арасындағы амалды анықтау идеясы. Біздің білуімізше, бұл идеяға байланысты алғашқы дереккөз ол – [31] жұмыс. Бұл тақырыпқа қызығушылық М.И. Бекеновтің [32] және А.М. Нуракуновтың [33] баяндамаларынан кейін пайда болғанын атап өткіміз келеді, онда олар бізге [31, 34] енгізілген амалдарға қатысты теориялардың алгебрасын зерттеудегі жетістіктері туралы хабарлады.

Толық теориялар модельдері арасындағы элементарлы эквиваленттілік ұғымы осы модельдердің ұқсастығын салыстырудың маңызды құралы болып табылады және бұл ұғымды алгебраға қолданудың классикалық мысалдарының бірі – элементарлы эквивалентті алгебралардың кейбір ультрадәрежелерінің изоморфизмі туралы Кейслер-Шелах теоремасы [35; 363]. [34] жұмыста элементарлы эквиваленттілік декарттық көбейтіндіге қатысты сақталатыны көрсетілген. Осылайша, теорияларда келтірілген жоғарыдағы амал элементарлы эквиваленттілікті сақтайды.

Косеманттылық ұғымы [5; 867] элементарлы эквиваленттілік ұғымын жалпылау болып табылады. Бұл тұжырымдама йонсондық теорияның модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеумен тікелей байланысты. Йонсондық теориялар анықтамасынан (Анықтама 1.1.1), йонсондық теориялар жалпы айтқанда, толық емес, сондықтан біз [32], [33] жұмыстарда жарияланғандай, олардың модельдерінің декарттық көбейтіндісі ретінде йонсондық теориялар арасындағы амал ұғымын тікелей тасымалдай алмаймыз. Атап айтқанда, біз бекітілген йонсондық теорияның барлық модельдер класымен жұмыс істемейтінімізді, тек олардың экзистенциалды тұйық модельдер класымен ғана жұмыс істейтінімізді атап өткен жөн. Оның 3 себебі бар: 1) йонсондық теорияның анықтамасынан белгілі болғандай, оның кез келген моделі осы теорияның кейбір экзистенциалды тұйық моделіне изоморфты түрде енгізілген; 2) йонсондық теорияның кемел болған жағдайында оның экзистенциалды тұйық модельдерінің класы осы йонсондық теорияның барлық модельдерінің кластарымен сәйкес келеді; 3) қарастырылып отырған йонсондық теорияның семантикалық моделі – осы теорияның экзистенциалды тұйық моделі. Сондықтан біз осы йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық модельдері арасындағы косеманттылық ұғымын қарастырамыз.

Қарастырылып отырған йонсондық теориялардың алгебрасына деген көзқарасымызды [32], [33] жұмыстарда есептер шығарудан айырмашылығының келесі аспектісі – біз бекітілген йонсондық спектрдің централдық типтерімен айналысатын боламыз, яғни біз түпнұсқа тілді байыту үшін жұмыс жасаймыз. Йонсондық спектр ұғымы модельдер мен теориялар арасындағы косеманттылық ұғымымен тікелей байланысты. Модельдер мен теориялар арасындағы косеманттылық анықтамасын келесі сілтемеден табуға болады [4]. Бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы анықталған ішкі жиындарын қарастыру қызығушылық тудырады. Осыған байланысты келесі мақалаларда [6, 23] толық теорияларды зерттеу кезінде пайда болудың модельдер теориясының классикалық тұжырымдамаларын йонсондық теорияларына бейімдеу кезінде әртүрлі тәсілдер қолданылады.

[34] жұмыста екі теорияның көбейтіндісі қарастырылды және егер олар факторлар болса, бұл көбейтінді көбейтіндідегі стабильділік қасиеттерін сақтайтыны көрсетілді.

Косеманттылық ұғымы элементарлық эквиваленттілік ұғымын жалпылайтыны белгілі, яғни егер кез келген сигнатураның кейбір йонсондық теориясының екі моделі бір-біріне элементарлы эквивалентті болса, онда олар бір-біріне косемантты болады. Сонымен қатар, екі модельдің косеманттылық ұғымы йонсондық спектр ұғымымен келесідей байланысты: егер болса, онда модельдер .

Бұл параграфтағы біздің міндетіміз – қарастырылып отырған толық теориялар алгебрасының жоғарыда аталған қасиеттерін кейбір бекітілген йонсондық теорияның модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеуге зерттеу.

йонсондық теори индуктивті теориялардың дербес жағдайы екендігін қолдана отырып, класы әрдайым құр емес екенін, сонымен қатар индуктивті теорияда класының кез келген моделі класының кейбір моделіне изоморфты түрде енгізілгенін көрсетеміз.

Келесі анықтама болғанда йонсондық теорияның моделінің ішкі әлемін анықтайды.

*Анықтама 2.4.1.* – кез келген йонсондық теория болсын. үшін моделінің ішкі әлемі деп – изоморфизм, аталады.

Келесі анықтама болғанда йонсондық теорияның моделінің сыртқы әлемін анықтайды.

*Анықтама 2.4.2.* – кез келген йонсондық теория болсын. T үшін A моделінің сыртқы әлемі деп мұнда бар} аталады.

экзистенциалды тұйық модельдің әлемі келесі жиын болады:

Жоғарыда келтірілген анықтамалар дөңес теория жағдайында екі әртүрлі экзистенциалды тұйық модельдерді байланыстыруы мүмкін, оны келесі теоремадан көре аламыз.

*Теорема 2.4.1.* Айтарлық – кемел, қатты дөңес йонсондық теория болсын. Кез-келген модельдері үшін келесілер дұрыс:

1)

2)

*Дәлелдеуі.* теорияның кемелдігіне байланысты теорияның барлық экзистенциалды тұйық модельдері теорияның центрінің модельдері болып табылады, сондықтан 1-қасиет және модельдері семантикалық моделінің экзистенциалды тұйық ішкі модельдері болғандықтан орындалады, мұндағы теориясының семантикалық моделі. теорияның қатты дөңестігіне байланысты кез келген екі модельдің қиылысуы бос емес. 2-шарт тривиалды және *T* теориясының үйлесімді енгізу қасиетіне байланысты орындалады. Атап айтқанда, моделі моделінің әмбебаптығына байланысты осы шарттарды қанағаттандырады.

Енді екі экзистенциалды тұйық модельдердің -салыстыруын қарастырайық.

Модельдер теориясында Шредер-Бернштейн проблемасы деп аталатын келесі есептің тұжырымы жақсы белгілі [36]. Бұл сұрақ өзара элементарлы енгізілетін екі құрылымның изоморфизміне қатысты. Бұл тақырып йонсондық теорияларды – проблемасы түрінде зерттеуге бейімделген. Атап айтқанда, [5] жұмысқа сілтеме жасауға болады, мұнда – проблемасы йонсондық абельдік группалар аясында зерттеледі.

Бұл бөлімде біз осы мәселенің дербес жағдайын қарастырамыз, атап айтқанда йонсондық теорияның екі экзистенциалды тұйық модельдерін -салыстыру.

*Анықтама 2.4.3.* Айтарлық – йонсондық теория және болсын. Ал және – теориясының экзистенциалды тұйық модельдері болсын. және модельдері -салыстырмалы деп аталады, егер моделінің кез келген экзистенциалды тұйық ішкі моделі үшін, , - *-*ның экзистенциалды тұйық ішкі моделі және *-*ның кез келген экзистенциалды тұйық ішкі моделі үшін, , ­- - ның экзистенциалды тұйық ішкі моделі екендігі орындалады.

Жоғарыда келтірілген анықтама қарастырылып отырған йонсондық теорияның барлық экзистенциалды тұйық модельдерінің жиынындағы эквиваленттік қатынасты анықтайтыны белгілі. Демек, модельдер кластарының санын келесі спектрлік анықтама көрсетеді.

*Анықтама 2.4.4.* Айтарлық йонсондық теория болсын. . λ-салыстыру қатынасына қатысты қуатты йонсондық теорияның экзистенциалды тұйық модельдерінің кластарының санын есептейді.

*Анықтама 2.4.5.* Айтарлық қуаты – ден аспайтын -ның барлық модельдерінің жиыны болсын.

*Теорема 2.4.2.* Айтарлық -толық йонсондық теория болсын және кейбір үшін орындалады. Онда теориясы модельді толық болып табылады.

*Дәлелдеуі.* болатын бар болсын. Бұл дегеніміз, кез келген екі модель үшін орындалады. барлық модельдерінің жағдайына байланысты бір-біріне изоморфты екендігін қолдана отырып, біз және -нан кез-келген екі модельдері арасындағы изоморфизмді бекітеміз. Әрі қарай, теориясының -толықтығын және теориясының семантикалық моделінің -біртектілігін ескере отырып, біз бұл изоморфизмді автоморфизмге дейін кеңейте аламыз. Осыдан, сыртқы әлемдер болып табылады. болғандықтан, бізде . қуатты класындағы теориясы изоморфизмге дейінгі дәлдікпен бір ғана модельге ие, теориясы -категорлы, яғни ол -кемел екенін білдіреді. Бұл жағдайда теориясының модельді компаньоны болып табылады және сәйкесінше модельді толық болып табылады.

Жоғарыда келтірілген дереккөздерден [32], [33] бізге қажетті ұғымдардың анықтамаларын береміз және айтылған нәтижелерді қарастырамыз.

Әрі қарай – кейбір бекітілген кемел йонсондық теория, теориясының семантикалық моделі болсын.

Кез келген бірінші ретті тілдегі екі толық теорияның көбейтіндісі келесідей анықталады.

Саналымды тілдегі кез келген сигнатураның бекітілген өзара модельді үйлесімді йонсондық теорияларының көбейтіндісіне анықтама берейік.

*Анықтама 2.4.6.* Айтарлық – йонсондық теориялар болсын және өзара модельді үйлесімді. Онда біз -ні келесі теория ретінде анықтаймыз: , мұндағы – сәйкесінше қуатында йонсондық теориялардың семантикалық модельдері, мұндағы .

Атап айтқанда, егер біз йонсондық хорн теориясын қарастыратын болсақ, онда ол міндетті түрде толық емес болғандықтан, біз оның барлық толықтыруын бөліп көрсете аламыз. Толық теорияларға арналған амалдың мысалы ретінде біз барлық толықтырулар жиынындағы толықтырулар арасындағы амалды қарастыра аламыз.

Осы екі теорияның косеманттылығын анықтайтын кейбір йонсондық теорияның семантикалық моделі экзистенциалды тұйық болғандықтан, семантикалық модельдің екі экзистенциалды тұйық ішкі модельдерінің декарттық көбейтіндісі осы семантикалық модельдің экзистенциалды тұйық ішкі моделі болады деген тұжырым әлі жасай алмаймыз.

Егер йонсондық теорияның семантикалық моделінің кез келген анықталған ішкі жиыны болса және оның булеанында берілген кейбір алғашқы геометриядағы тұйықталуы болса, онда йонсондық теорияны йонсондық теорияның фрагменті деп атаймыз және оны арқылы белгілейміз. Егер болса, онда әрқашан йонсондық теория болып табылады.

Айтарлық теориясындағы барлық фрагменттердің жиыны болсын.

*Анықтама 2.4.7.* йонсондық теориясы жаппай модельді үйлесімді деп аталады, егер оның кез келген екі фрагменті өзара модельді үйлесімді болса, мұндағы – -ның кейбір анықталған ішкі жиындары.

Бізге – жиын ұғымы арқылы семантикалық модельдің ішкі жиынының анықталу тұжырымдамасын нақты мағынамен толтыру үлкен перспектива болып көрінеді. Мысалы, келесілерді білдіреді: -трансценденттілік, атомдық пен жайлылықтың әртүрлі түрлері, қатты минималдылық, йонсондылық. Сонымен, – жиынының тұйықталу сипаттамасы – реостаттың көмегімен алынады [37].

Әрі қарай біз бекітілген жаппай модельді үйлесімді йонсондық теория аясында жұмыс істейтін боламыз. Бұл жағдайда келесі сұрақ туындайтыны анық: йонсондық теориялардың косеманттылық класы кемел бола ма, егер оның центрі жаппай модельді үйлесімді болса? Яғни, келесі сұрақ туындайды: центрдің қай жағдайында келесі теорема дұрыс болады?

*Теорема 2.4.3.* Егер йонсондық спектрдің кейбір косеманттылық класының бекітілген центрі жаппай модельді үйлесімді болса, онда оның семантикалық моделі қаныққан.

Сұрақтың мәні бекітілген сөздің мағынасын толтыру болып табылады.

*Анықтама 2.4.8*. йонсондық теорияның әрбір фрагменті үшін келесі жиынды атап өтейік: . Айтарлық болсын. Егер кейбір үшін болса, онда теорияның анықталатын ∇ жиыны деп аталады.

Айтарлық болсын.

*Салдар 2.4.1.* Кез келген үшін шекті туындыларға қатысты тұйық және құр емес болады.

Дәлелдеуі. – бір элементтен тұратын модельдің теориясы, онда . Демек, - құр жиын емес. Айтарлық - -ден болсын, онда шекті көбейтінділерге қатысты тұйық.

*Ескерту 1.* Жалпы айтқанда, теориясы *-* ға тиісті болуы мүмкін емес және шексіз көбейтінділерге қатысты тұйық емес және әртүрлі табылады, болатындай, яғни, оларда бірдей анықталған жиыны бар.

*Анықтама 2.4.9.* Егер болса, онда біз -жұту деп жазамыз. Егер болса, идемпотентті деп аталады.

*Анықтама 2.4.10.* жиыны анықталатын идемпотент деп аталады, егер идемпотент табылса, мысалы, сияқты.

Вайнштейн теоремасының йонсондық нұсқасы [10; 416].

*Теорема 2.4.4.* Айтарлық болсын. Егер болса, онда (-модельдердің косеманттылығы).

Дәлелдеуі. Осы екі модельдің элементарлы эквиваленттілігінен олардың косемантты екенін шығады.

*Теорема 2.4.5.* Егер болса, онда .

Дәлелдеуі. 1.5.5-теорема мен 1.5.4-теоремадан шығады.

*Теорема 2.4.6* (Воот [35; 403]). тіліндегі сөйлем алгебралық жүйелердің шексіз тура көбейтіндісіне қатысты тұрақты болса, егер осы шексіз көбейтінділердің кез келген шекті ішкі көбейтінділерге қатысты тұрақты болса.

*Теорема 2.4.7.* Егер , ал шексіз көбейтінділерге қатысты тұйық болса, онда -ден кез келген элементті жұтатын жалғыз идемпотент табылса.

Мысалы, кейбір квазикөптүрлілік теориясының толық кеңеюі болып табылатын барлық теориялардың жиыны сәйкес идемпотентпен жұтылады, бірақ бұл идемпотент бұл жиынды анықтамауы мүмкін.

*Теорема 2.4.8.* ал – шексіз көбейтінділерге қатысты тұйық анықталған жиын болсын, онда жалғыз идемпотент табылады, сол идемпотентпен анықталады.

*Дәлелдеуі.* Айтарлық кейбір теория үшін болсын. 7-теоремаға сәйкес, идемпотент бар, ол -дағы барлық элементтерді жұтады. идемпотенті жиынын анықтайды. Шынында да, егер теориясы үшін болады, онда . Бұл дегеніміз білдіреді. Яғни, .

*Теорема 2.4.9.* Егер идемпотент болса, онда оның кез келген дәрежесі болады.

*Дәлелдеуі.* Дәлелдеуі жоғарыда келтірілген анықтамалардан шығады.

*Теорема 2.4.10.* Егер идемпотентті болса, онда көбейтінділерге қатысты тұйық болады.

*Дәлелдеуі.* Айтарлық және болсын. Барлығының көбейтіндісін деп аламыз. Бұл көбейтіндіні арқылы белгілейміз. идемпотент болғандықтан, жаза аламыз. Яғни, .

Егер біз белгілі теореманы қолданатын болсақ: «Кез-келген алгебралық жүйелер жиынтықтары үшін және кез-келген фильтрі үшін -ден орындалады». Онда келесі тұжырым дұрыс.

Осы бөлімдегі барлық басқа мәлімдемелер (Теорема 11-17, Салдар 2-3) [18] жұмыстағы сәйкес нәтижелерінің йонсондық аналогтары болып табылады.

*Теорема 2.4.11.* Егер идемпотент болса, онда - аксиоматизацияланатын теория.

*Теорема 2.4.12.* Айтарлық болсын. көбейтінді амалымен бірлік элементпен идемпотенттердің коммутативті жартылай группасын құрайды.

*Салдар 2.4.2.* идемпотенттерінің жартылай группасы жартылай группасының қолайлы дәрежесіне изоморфты түрде енгізіледі, мұндағы негізгі жиын және сәйкес амалы бар жартылай группа.

Осылайша, идемпотенттерді нөлдер мен бірліктер тізбегі ретінде ұсынуға болады.

*Анықтама 2.4.11.* Біз деп жазамыз, егер және тек қана егер болса.

*Салдар 2.4.3.* жиынындағы қатынасы ең үлкен және ең кіші элементтері бар жартылай реттелгендігін білдіреді.

*Теорема 2.4.13.* Айтарлық болсын. жиыны идемпотентпен анықталады.

*Теорема 2.4.14.* Айтарлық  және болсын, онда .

*Анықтама 2.4.12.* жиынында біз бірігу және қиылысу операцияларын енгіземіз. Айтарлық болсын. , және , мұндағы - 2.4.13-теореманың дәлелдерінен алынған.

*Теорема 2.4.15.* және амалдарымен жиыны толық торды құрайды.

*Теорема 2.4.16.* Әр көптүрлілікке жалғыз өзін анықтайтын идемпотенті сәйкес келеді.

*Теорема 2.4.17.* Енгізілген ∪ және ∩ амалдарына қатысты анықталатын квазикөптүрліліктер жиыны толық торды құрайды.

Сонымен қатар централдық типтің алгебрасын қарастырайық.

Кейбір қасиеттерді сақтайтын йонсондық теорияны байытудың арнайы түріне байланысты қажетті анықтамаларды берейік. Мұндай байыту аясында, предикаттарды есептеу логикасының заңдылықтарының салдары ретінде, қарастырылып отырған кейбір толық теорияның орнына біз формулалардың максималды қайшылықсыз жиынын, яғни кейбір толық 1 типті ала аламыз. Біз бұл типті централдық тип деп атаймыз.

Бұл параграфтың негізгі идеясы – бекітілген байытудың централдық типіне қосымша ретінде теорияларды көбейтуге қатысты йонсондық теориялардың алгебраларының қасиеттерін пайдалану.

Айтарлық – кейбір сигнатураның тіліндегі бекітілген мұрагер йонсондық теория болсын, – осы теорияның семантикалық моделі, , жиынын С жиынының ішкі жиыны ретінде аламыз.

Айтарлық болсын. Мұнда шексіз сөйлемдер жиыны болып табылады және келесі фактіні көрсетеді: «символының интерпретациясы сигнатурасының тіліндегі экзистенциалды тұйық ішкі моделі болады», осылайша біз символының интерпретациясы сигнатурасының тіліндегі теңдеуінің шешімі болады.

Байытудағы барлық йонсондық теориялар йонсондық теория болу қасиетін сақтамайтындықтан, біз мұрагер йонсондық теориялар класында жұмыс істейтін боламыз.

*Анықтама 2.4.13.* йонсондық теорияның байытуы рұқсат етілетін деп аталады, егер кез келген ∇-тип (∇ тілінің ішкі жиыны және осы типтің кез келген формуласы ∇-ға тиісті), бұл байытуды – стабильділік аясында анықталған болса.

*Анықтама 2.4.14.* Йонсондық теория мұрагер деп аталады, егер кез келген оның рұқсат етілген байытуында оның осы байытудағы кез келген кеңеюі йонсондық теория болса.

Айтарлық – бекітілген мұрагер, жаппай модельді үйлесімді йонсондық теория, – оның семантикалық моделі, теориясының барлық фрагменттерінің жиыны болсын. жиынында амалын орнатайық, ол алгебрасы болады. Бұл бірлігі бар идемпотенттердің коммутативті жартылай группасын құрайды, ал ∪ және ∩ амалдары бар идемпотенттер жиыны толық торды құрайды. Сонымен қатар, оны алгебраға да қолданамыз, мұндағы – теориясының семантикалық моделі. Осы алгебраны қарастыру аясында біз келесі нәтижелерге қол жеткіземіз.

фрагменттерін көбейту амалы көбейту амалын тудырады және , сияқты теориясындағы фрагменттерді көбейтуге қатысты коммутативті жартылай группасы екенін байқаймыз.

Қарастырылып отырған теориясы жаппай модельді үйлесімді болады, -дан алынған екі фрагментінің көбейтіндісі теориясы болып табылады, яғни – теориясының сигнатурасының кейбір моделінің йонсондық спектрінің косеманттылық класы болып табылады.

Бұл тақырып, атап айтқанда централдық типтермен жұмыс істеу саласының алгебралануы йонсондық теорияларды зерттеу кезінде туындайтын мәселелермен тығыз байланысты екені анық. Олардың біріне толығырақ тоқталайық. Бұл сұрақ йонсондық теориялардың гибридтеріне қатысты [38-41].

Теориялар мен гибридтердің көбейтіндісінің анықтамаларынан, егер екі йонсондық теорияның көбейтіндісі йонсондық теорияны берсе, бұл ұғымдардың сәйкес келетінін байқауға болады. Бұл жағдайда йонсондық теориялардың централдық типтерінің көбейтіндісі гибрид ұғымынан келесідей ерекшеленеді:

1) централдық типті анықтау үшін йонсондық теориялардың гибридтерінен айырмашылығы сигнатураны байыту қажет;

2) йонсондық теорияның гибридінің екі типі болуы мүмкін (бірінші және екінші типтер), ал гибридтің екінші типі бірінші типті йонсондық теорияның көбейтіндісінен айырмашылығы екі әртүрлі сигнатураның йонсондық теорияларының көбейтіндісіне байланысты.

**2.5 Гибридтердің синтаксистік және семантикалық ұқсастықтары**

Келесі нәтиже екі түрдегі йонсондық теориялардың гибриді үғымы кәдімгі түрде элементарлық эквивалентті сақтайтынын көрсетеді. Сонымен қатар, 1.2.1 лемма бойынша бұл косеманттылық ұғымына да қатысты.

*Теорема 2.5.1* [15; 424]. Фильтрлік көбейтулер, фильтрлік дәрежелер, тура көбейтінділер мен тура дәрежелер элементарлы эквиваленттілікті сақтайды.

Мысалы, декарттық көбейтінді үшін біз келесі тұжырымды аламыз.

*Лемма 2.5.1.* Айтарлық – саналымды тілінің кейбір модельдері және болсын, онда

*Дәлелдеуі*. Айтарлық болсын, онда алдынғы теорема бойынша және 1.2.1 леммадан орындалады.

Йонсондық теориялардың гибриді анықтамасын негізге ала отырып, біз екі кластың гибридтерін анықтаймыз.

Әрі қарай біз бірінші типтегі гибридтермен жұмыс жасаймыз. Негізгі нәтижені дәлелдеуден біз бұл дәлелдеу әдісін екінші типтегі гибридтер үшін жүйелі түрде қолдануға болады деген қорытынды жасауға болады.

Айтарлық – сигнатурасының саналымды тілінің аксиоматизациаланатын модельдер класы болсын. Кез келген аксиоматизациаланатын класс ультракөбейтіндіге қатысты тұйық екенін білеміз [1; 116]. класының йонсондық спектрін қарастырайық:

– осы тілдегі йонсондық теория және .

Онда – қатынасты йонсондық спектр класының фактор-жиынын білдіреді. Кез келген моделі үшін орындалады.

*Анықтама 2.5.1.* 1) Айтарлық – сигнатураның саналымды тілінің аксиоматизациаланатын модельдер класы болсын, . Классов және кластарының бірінші типті гибриді деп теориясын айтамыз, егер бұл теория сигнатураның тілінде йонсондық болса, мұндағы – сәйкесінше класының семантикалық модельдері, және   мұндағы - декарттық көбейтінді, - қосынды, - означает тура қосынды.

2) Айтарлық –әртүрлі сигнатураның және саналымды тілінің сәйкесінше аксиоматизациаланатын кластары болсын, теориясын екінші типті гибрид деп атаймыз, егер бұл теория сигнатура тілінде йонсондық болса, мұндағы .

Келесі факт 2.5.2 теореманың дәлелдеуі үшін қажет.

*Факт 2.5.1* [4; 48]. -сөйлемдері үшін толық кез келген йонсондық теория үшін келесі шарттар эквивалентті:

1) модельді толық болып табылады;

2) әрбір үшін – буль алгебрасы, мұндағы – бос айнымалармен -формулалар торы.

*Теорема 2.5.2.* Айтарлық , және – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық кемел гибридтер болсын, онда келесі шарттар эквивалентті:

1) ;

2) .

*Дәлелдеуі.* . Біз әр үшін -ге изоморфты екенін білеміз. Айтарлық бұл изоморфизм көмегімен жүзеге асырылсын. Осы теореманың 1 шарты бойынша, 1.1.1 теорема және 2.5.1 факт бойынша, әрбір үшін және торлары бульдік алгебра болады. Бірақ және кемелдігі бойынша және модельді толық (1.1.1 теорема бойынша) сондықтан әр үшін -нан кез келген формула бойынша -нан формуласы табылады, осылайша . теориясы -толық және () болғандықтан, екендігі шығады. теориясы является -толық және () болғандықтан, екендігі шығады.

Әрбір үшін, -нан әрбір үшін және арасындағы келесі бейнелеуді қарастырайық: , мұндағы . қасиеті бойынша және жоғарыда айтылғандар бойынша – және арасындағы изоморфизмді құрайтын биекция болып табылады. Сәйкесінше, .

. Әрбір үшін -ге изоморфты екендігінен бұл шарт тривиалды және осы теореманың шарты бойынша және 1.1.1 теорема және 2.5.1 факт бойынша бұл изоморфизм барлық ішкі алгебраларға жалғасады.

Келесі лемма 1.3.3 сөйлемнің йонсондық аналогы болып табылады.

*Лемма 2.5.2.* Айтарлық – -толық теория және болсын. Онда егер үйлесімді болса, онда -да үйлесімді ( – -формулалардың кез келген жиыны).

*Дәлелдеуі.*  болғандықтан -да -толық болатынын көру оңай.

*Сөйлем 2.5.1.* Айтарлық – кемел йонсондық теория болсын, онда кез келгке сөйлемі үшін теориясы йонсондық болады.

*Дәлелдеуі.* Йонсондық теорияның анықтамасының барлық шарттарын тексерейік. – кемел йонсондық теория болғандықтан, онда йонсондық теория болады. болғандықтан, онда -аксиоматизациаланған және шексіз модельге ие. 2.5.2 леммадан және синтаксистік анықтамасынан ( = 0 болғанда 1.3.1 сөйлем) теориясы -ке ие екенін оңай көруге болады.

Йонсондық теорияның 4) шартынын орындалуын тексерейік (1.1.1 анықтама). Айтарлық үйлесімді болсын, мұндағы үшін 1.3.2 сөйлемдегі сияқты. Жалпылықты жоғалтпай біз деп ала аламыз. Онда, алдыңғы 2.5.2 лемма бойынша, және үйлесімді. Айтарлық – экзистенциалды сөйлем болсын, үйлесімді екені анық. Айтарлық – экзистенциалды сөйлем болсын, . Кері жориық, айтарлық үйлесімсіз болсын, онда үйлесімсіз болатын формула табылады. Яғни, үйлесімсіз, онда және Сәйкесінше, Қарама қайшылыққа келдік. Осылайша, үйлесімді. үйлесімді. теориясының йонсондылығынан, үйлесімді екенін аламыз, ал онда үйлесімді. болғандықтан, онда үйлесімді. Сонымен, теориясы AP-ге ие. Сонымен, – йонсондық теория.

*Теорема 2.5.3.* Айтарлық – сигнатурасының саналымды тілінің аксиоматизациаланған модельдер класы болсын, . -сөйлемдер үшін толық кез келген кемел гибрид үшін йонсондық -толық полигондар теориясы табылады және .

*Дәлелдеуі.* Айтарлық -сөйлемдер үшін толық кемел гибрид болсын. Совершенный полный для -предложений гибрид.  теориясы толық болғандықтан, онда шекті сигнатура жағдайында 1.3.1 теоремаға сәйкес және шексіз сигнатура жағдайында 1.3.2 теоремаға сәйкес толық полигондар теориясы   табылады және орындалады. Бірақ онда 1.3.3 сөйлемге сәйкес . Тип ұғымы семантикалық ұғым болғандықтан (сөйлем 1.3.4), формула ұғымы да семантикалық болып табылады. жағдайында 1.3.1 және 1.3.2 сөйлемдерден JEP және AP қасиеттері кейбір формулалардың үйлесімділігіне сәйкес эквивалентті, яғни JEP және AP семантикалық ұғымдар болып табылады. -аксиоматизациялылығы да семантикалық қасиет болып табылатыны белгілі, өйткені барлық аксиомалар семантикалық модельде ақиқат. Бұл дегеніміз, «йонсондық теория болу» қасиеті семантикалық ұғым болып табылады және сондықтан йонсондық теория болады.

- кемел гибрид болғандықтан, онда теорияның семантикалық моделі қаныққан. Бірақ және анықтамаға сәйкес осы теорияның семантикалық үштіктері бір біріне изоморфты, онда , сәйкесінше, қаныққан, және сондықтан кемел йонсондық теория болады.

қарастырайық. теориясы кемел болғандықтан, онда |. Айтарлық болсын, яғни йонсондық теория және . кемел -толық йонсондық теория екенін көрсетейік. болғандықтан, онда толық теориялар үшін семантикалық ұқсастықтың анықтамасынан кемел йонсондық теория екендігі шығады.

Егер - -толық болса, онда орнына біз -ны аламыз, одан кейін 2.5.2 теорема бойынша екендігі шығады. Егер - -толық болмаса, онда біз осы теорияны толықтыру үшін келесі процедураны жасаймыз. болғандықтан, онда сигнатура тілінің кез келген экзистенциалды сөйлемі үшін , және , бірақ , теориясын қарастырайық. және , йонсондық теориялар болғандықтан, 1.3.4 сөйлемнен йонсондық теория екені шығады. Егер - -толық болмаса, онда біз теориясы -толық болмайынша экзистенциалды сөйлемдерді қосу процедурасын жалғастыра береміз.

Айтарлық – теориясын толықтыру процедураларының нәтижесі болсын, яғни - -толық және сонымен бірге йонсондық теория болады. болатынын көрсетейік, осыдан теориясының кемелділігі шығады. Кері жориық, айтарлық болсын, онда , бірақ бұл дұрыс емес, өйткені кез келген , сөйлем үшін . Сәйкесінше, және . Қарама қайшылыққа келдік, яғни . Бірақ қаныққан, сондықтан кемел йонсондық теория болып табылады.

Онда, 2.5.2 теорема бойынша, біз аламыз, мұндағы .

*Салдар 2.5.1.* Айтарлық – сигнатураның саналымды тілінің аксиоматизациаланған модельдер класы болсын, . 1.3.4 сөйлемнің 8) пункті бойынша семантикалық ұқсас толық теориялар және   (), спектральды функциясын сақтайды, яғни дербес жағдайда категорлы қасиетін сақтайды. 2.5.2 теорема және 2.5.3 теорема бойынша 2.5.3 теорема шартын қанағаттандыратынсинтаксистік ұқсас йонсондық теориялар  және саналымсыз категорлылық қасиетін сақтайды.

*Салдар 2.5.2.* 2.5.3теорема бойынша барлық тұжырымдар бірінші типті гибридтер кластары үшін орындалады және екінші типті гибридтер кластары үшін де дұрыс.

Морфизмдер орнына гомоморфизмдер, сонымен бірге бірінші ретті позитивті формулалар қарастырылған жағдайда, біз позитивті модельдер теориясымен жұмыс жасайтын боламыз [28]. Осы жұмыста алынған нәтижелерді ескере отырып, біз бұл нәтижелердің барлығы йонсондық теорияларды зерттеу аясында позитивті модельдер теориясының неғұрлым жалпы контекстінде мағынасы бар деп үміттенеміз [28].

**2.6 Қатты минималды гибридтерiнiң фрагменттерiнiң теоретикалық жиындарының геометриясы**

Модельдер теориясының тұжырымдамалық және техникалық аппараттарының дамуының қазіргі жағдайын бірінші ретті тілдердің көбіне толық теорияларын қарастырумен байланысты синтаксистік және семантикалық ұғымдарының жиынтығы ретінде сипаттауға болады, екінші жағынан, техникалық аппарат мүмкіндіктерінің жеткіліксіз арсеналына байланысты, толық емес теорияларды зерттеуді айтуға болады. Йонсондық теорияларды зерттеу барысында, жалпы айтқанда, толық емес теориялардың ерекше класы ерекшеленеді.

Йонсондық теориясының анықтамасына байланысты мұндай теория, жалпы айтқанда, толық емес. Оның модельдер класында шекті және шексіз модельдер болуы мүмкін, сонымен қоса изоморфты енгізулер де қолданылады. Осылайша, біз белгілі бір нәтижелерді толық теориялардан йонсондық теориясына түрлендіру жоғарыда аталған теориялардың әртүрлі техникалық арсеналына байланысты қиын екенін көреміз. Бұл мәселенің себебі элементарлы енгізулер изоморфты енгізулермен ауыстырылуы және йонсондық теориясының толық еместігі болып табылады. Осылайша, йонсондық теорияның семантикалық моделін анықтайтын әмбебап біртекті модельдер жалпы айтқанда әрқашанда қаныққан емес.

Бұл факт группалар теориясының мысалын нақты сипаттайды. Барлық группалар класы семантикалық моделі қанықпаған йонсондық теорияға ие. Осыған байланысты, бұл класс модельдік компаньонға ие емес, бұл осы класс центрінің қасиетін зерттеу кезінде осы класқа жақсы қалыптасқан модельді компаньондардың техникасын қолдануды қиындатады.

Сол себепті йонсондық теорияларды зерттеу маңызды мәселе болып табылады.

Келесі авторлар жұмыстарында Б. Йонсон [3], M. Mорли және Р. Воот [42], A. Робинсон[24], Г. Черлин [4], T. Ғ. Мұстафин [14], Ешкеев A.Р. [44] йонсондық теориялардың және олардың компаньондарының толық сипаттамасы берілген.

Сигнатураны байыту кезінде пайда болатын централды тип ұғымы йонсондық теориялардағы жаңа ұғымдардың бірі болып табылады [45]. Осылайша, йонсондық теорияларының модельдер теориясы аясында толық теориялар үшін модельдер теориясынан классикалық ұғымдар арасында жаңа қатынастар пайда болады.

Екі йонсондық теориядан йонсондық теорияны құрудың жаңа әдісінің пайда болуына да назар аударарлық. Бұл, йонсондық теориясының гибриді тұжырымдамасын қолдану арқылы, алғаш рет [46] алынған. Алгебралық объектілер мен олардың құрылымдарының әртүрлі мысалдары осы тұжырымдамамен байланысты болуы мүмкін. Кейінгі [48-67] жұмыстарда модельдер теориясында және әмбебап алгебрада маңызды рөл атқаратын йонсондық теориясының гибридтерімен байланысты нәтижелер алынды.

[68] мақалада йонсондық теориялары және олардың йонсондық қасиеттерін сақтайтын тілдік байытудағы көптеген бірінші ретті синтаксистік және семантикалық қасиеттері қарастырылды. Мұндай йонсондық теориялар мұрагерлік деп аталады [69].

Модельдер теориясының классикалық әдістерінің бірі жақсы зерттелген теорияны аз зерттелген теорияға интерпретациялау әдісі. Осы әдістің идеологиясынан кейін йонсондық теорияларды зерттеудің жаңа әдісі анықталды, атап айтқанда: йонсондық теориялардың синтаксистік және семантикалық ұқсастық ұғымдарын қолдана отырып, йонсондық теорияларды классификациялау аясында жаңа нәтижелер алынды.

Бұл параграфта кейбір экзистенциалды тұйық модельдің теоретикалық ішкі жиындарында қатты минималды жиындардың геометриясының локальді қасиеттінің негізгі ұғымдары қарастырылады. Йонсондық жиындарда құрылған алғашқы геометрияның комбинаторлық қасиеттерін қарастыра отыра, қатты минималды йонсондық жиындарға қатысты нәтижелер алдық. Минималды структуралар, алғашқы геометрия және минималды структуралардың геометриясының анықтамасы [67] қарастырылды. Сонымен бірге йонсондық теориялар үшін өлшемділік, тәуелсіздік және йонсондық қатты минималды структуралардың базисі [67] қарастырылды.

Робинсондық теория йонсондық теориясының дербес жағдайы, атап айтқанда йонсондық әмбебап теориясы. Жоғарыда аталған теорияны зерттеу үшін бекітілген спектрдің централдық типтерімен жұмыс істеу алгоритмі қолданылды. Бұл спектрдің элементтері йонсондық әмбебаптары болып табылады. Нәтиже қосымша константалармен және унарлы предикатпен байытылған централдық тип болады. Осылайша, біз централдық типтер тілінде Робинсондық спектр класының саналымсыз категорлылығының критерийін алдық.

[70] жұмыста Э. Хрушовский робинсондық теорияларды кванторлық бөлуге ие әмбебап теориялар ретінде анықтады. Робинсондық теорияларын зерттеуде кванторсыз типтер негізгі болып табылады. Біздің жағдайда біз централдық типтерді қолданамыз.

*Анықтама 2.6.1.* йонсондық теориясы робинсондық теория деп аталады, егер ол әмбебап аксиоматацияланған болса*.*

Айтарлық – робинсондық теория, сигнатурасының кез келген моделі болсын. моделінің робинсондық спектрі деп келесі жиынды айтамыз:

сигнатурасының тіліндегі робинсондық теория және

арқылы қатысты моделінің робинсондық спектрінің фактор жиынын қарастырамыз. Егер сигнатурасының тіліндегі кез келген робинсондық теория болса, онда класының барлық экзистенциалды тұйық модельдер класы, .

Айтарлық – қатты минималды теоретикалық жиындар. – Робинсон фрагменттері. , . . – йонсондық синтаксистік ұқсас (Анықтама 1.4.1). Йонсондық теорияның синтаксистік ұқсастығы бойынша йонсондық синтаксистік ұқсас. - йонсондық қатты минималды теориялар. Онда  – йонсондық теория болғандықтан, оның өзінің центрі бар, оны арқылы белгілейміз, бұл центр – теорияның толықтыруларының бірі болып табылады. Теоремада йонсондық теориялардың гибриді қарастырылады.

*Теорема 2.6.1* [12; 298]. Айтарлық – экзистенциалды сөйлемдер үшін толық әмбебап теория болсын және ол саналымды алгебралық модельге ие. Онда – -атомдық болатын алгебралық жай модельге ие.

– -мен үйлесімді -тің әрбір экзистенциалды формуласы, ол -мен үйлесімді -тің кейбір формуласы екенін білдіреді.

*Теорема 2.6.2.* Айтарлық [T] - -ге ие экзистенциалды сөйлемдер үшін толық -дан класс болсын. Айтарлық болсын. Онда келесі шарттар эквивалентті:

1 алгебралық жай модельге ие;

2 ()-атомдық модельге ие;

3 ()-атомдық модельге ие;

4 -nice алгебралық жай модельге ие;

5 жалғыз алгебралық жай модельге ие.

*Дәлелдеуі.* Айтарлық 2.6.2 теореманың шартын қанағаттандырсын, онда [12; 309] жұмыстағы теорема (4.1 теорема) бойынша осы теореманың шартын қанағаттандырады.

*Теорема 2.6.3.* Айтарлық [T] – -дан мұралы класс болсын, , онда келесі шарттар эквивалентті:

1 -ның кез келген саналымды моделінің моделінде алгебралық жай кеңейтілімі бар;

2 – қатты минималды тип, мұндағы – -нің централдық типі.

*Дәлелдеуі.* Дәлелдеуге ыңғайлы болу үшін біз арқылы белгілейміз. класының семантикалық моделін қарастырайық. моделі -әмбебап және-біртекті анықтамасы бойынша -біртекті болып табылады. Біздің жағдайда қуат саналымсыз. Сондықтан моделінің саналымды элементарлы ішкі моделін қарастырамыз. элементарлы ішкі моделі экзистенциалды тұйық, өйткені лемма [71;162] бойынша экзистенциалды тұйық. Сәйкесінше, элементарлы ішкі жиыны саналымды алгебралық әмбебап. [12; 298] жұмыстағы теореманы қолдансақ, әрбір теория алгебралық жай модельге ие боладықтан, біз -ны индукция арқылы дәлелдейміз, ол моделінің алгебралық жай кеңейтілуі болады және   және деп ұйғарайық. Алдымен екенін көрсетейік, ол үшін -ны саналымды модельдердің тізбегі ретінде жіктейміз. Бұл жіктеу теориясы йонсондық болғандықтан мүмкін. функциясын изоморфизмдер тізбегін индукциясы формуласы бойынша анықтайық:

1) және ;

2) және ;

3) –индукциясы бойынша анықталатын тізбелердің бірігуіне тең;

4)

5) деп ұйғарайық. Егер сюръективті бейнелеу болса, онда . Керісінше, алгебралық жайлылығынан, біз -ні : -ке дейін кеңейте аламыз;

6) .

бойынша – -ға изоморфты енгізіледі. Енді 2.6.2 теореманы қолданайық. - теориясның кез келген моделі. - жалғыз алгебралық жа й және экзистенциалды тұйық модель. Шарт және құрылым бойынша  әрбір үшін саналымсыз қуатта жалғыз модельге ие екені шығады. Бұл шарт бойынша семантикалық моделі қаныққан екенін білдіреді, яғни класы кемел болып табылады. Осылайша, . Сәйкесінше, теориясы -категорлы. Лахлан-Болдуин теоремасы бойынша қатты минималды формулаға ие. Біз централдық типпен жұмыс жасағандықтан, біз басты емес типті аламыз, ол йонсондық қатты минималды формулаға ие. Осыдан, тип йонсондық қатты минималды екені шығады.

қатты минималды тип болғандықтан, сигнатураға көшкенде, тип теория болады. Жоғарыда айтылғандай, теория класының ценрі болып табылады, сәйкесінше, ол толық. - -категорлы екенін көрсетейік. Индуктивтілік бойынша кез келген модельдер үшін модельдер және изоморфты енгізулер табылады. деп ұйғарайық. Егер болса, онда . Сәйкесінше, және орындалатындай табылады. Біздің жағдайда - мұрагер класс болғандықтан, онда . Осы кластың әмбебап аксиоматизацияланғаны бойынша және экзистенциалды тұйық моделі класының семантикалық моделіне изоморфты енгізіледі. толық болғандықтан, орындалады. және йонсондық минималды болғандықтан, не шекті, не шекті. Айтарлық шекті болсын, онда шекті екенін көрсететін -сөйлем табылады және , сәйкесінше, ), бірақ , бірақ сонымен қатар, болғандықтан, біз қатты минималдылыққа байланысты қарама-қайшылыққа келдік.

Егер қарастырылып отырған модельде формуланың анықталған қосымшасы шекті болса, онда дәлелдеу аналогиялық түрде өзгереді. Осылайша, – -категорлы.

Саналымсыз категорлылық туралы Морли теоремасы бойынша – -категорлы, және, сәйкесінше, бұл теорема кемел. Онда йонсондық теориясының толықтық критерийі бойынша  модельді толық теория болып табылады және әрбір үшін , яғни . Егер модельді толық болса, онда кез келген изоморфты енгізілу элементарлы. – толық теория болғандықтан, Морли теоремасы бойынша теорема дәлелденді.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Бұл диссертациялық жұмыста, жалпы айтқанда, толық емес теорияларға зерттеу жүргізілді. Яғни, йонсондық теориялардың гибридтерінің модельді-теоретикалық қасиеттеріне зерттеулер жүзеге асырылды.

Диссертациялық жұмыста жаңа математикалық ұғым, яғни йонсондық теорияның гибридтері енгізілген. Йонсондық теориялардың гибридтері әлі тың тақырып болғаннан кейін бұл салада әлі көп жағынан зерттелмеген және шешілмеген есептер бар. Ең бірінші қиыншылық бұл есептердің орналасқан аясы, жалпы айтқанда, толық емес теорияларға тиісті модельді-теоретикалық әртүрлі күрделі мәселелер. Мысалы, элементарлық пара-парапарлылық қатынас толық орындалмайды және кейбір қарастырылып отырған модельдердің кластары элементарлық болып табылмайды. Сондықтан олардың шешімдері шектелген тәсілдермен зерттеуге болады. Диссертациялық жұмыста қолданған негізгі тәсіл ол келесі амал: қарастырып отырған йонсондық теориялардың центрінің элементарлық қасиеттерін бұл теорияның сәйкестілігіне тексеру. Сонымен қатар зерттеу жұмысының негізгі мақсаты осы гибрид ұғымын қолымыздан келгенше неғұрлым модельді-теоретикалық қасиеттер бойынша талдау және зерттеу жасау. Келесі тұжырымдар осы диссертациялық жұмыстың түйін нәтижелері болып табылады:

1. Экзистенциалды жай дөңес ∀∃-толық йонсондық теориялардың класындағы модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылды.
2. Кейбір бекітілген йонсондық теорияның семантикалық моделінің арнайы ішкі жиындарының модельді-теоретикалық қасиеттеріне байланысты нәтиже алынды. Қарастырылып отырған фрагменттердің гибридінің құрамында арнайы ядролық ішкі жиын, анықталған тұйықталу бар, ол қарастырылып отырған теорияның алгебралық жай моделі болып табылатын кейбір экзистенциалды тұйық модельмен берілді.
3. Йонсондық позитивті теориялардың фрагменттерінің гибридтерінің модельді үйлесімділігі мен ω-категорлылығы қарастырылды.
4. Йонсондық теорияның екі экзистенциалды тұйық модельдері үшін сыртқы және ішкі дүниелер арасындағы байланыстың ерекшелігі қарастырылды.
5. Бекітілген Робинсон спектрінің мұрагер косемантылық класының централдық типінің қатты минималдылығы тілінде саналымсыз категорлылықтың критерийі алынды.
6. Бекітілген сигнатураның саналымды тілінің модельдерінің аксиоматизацияланатын класының йонсондық компаньонының косеманттылық кластарының гибридтерінің синтаксистік ұқсастығының критерийі алынды.
7. Кез келген кемел йонсондық гибрид үшін кейбір синтаксистік ұқсас полигон теорияларының табылуы зерттелді.

Диссертациялық жұмыста алынған тұжырымдар өзінің сипаты бойыншатеоретикалыққұндылығын атқарады және нәтижелер өзінің мазмұны бойынша модельдер теориясының іргетас тұғырын дамытуға өз үлесін қосуға әбден ықтимал. Өйткені, бұл диссертациялық жұмыстағы барлық есептердің ұстамалары, «шығыс» бағытқа ие болғаннан кейін көп жағынан жалпылама және нақтылаулықты білдіреді. Диссертациялық жұмыста алынған барлық нәтижелер жаңа және осы нәтижелерді әрі қарай йонсондық теорияларды және олардың модельдерінің кластарының модельді-теоретикалық қасиеттерін зерттеуде және классикалық модельдер теориясы мен әмбебап алгебра және шекаралас математикалық салалар үшін қолдануға болады.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Справочная книга по математической логике: В 4-х частях/ Под ред. Дж. Барвайса. – Ч.1. Теория моделей: Пер. с англ. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982 г.
2. Mustafin Y. Quelques proprietes des theories de Jonsson. // The Journal of Symbolic Logic. – 2002. – Vol. 67(2). – P. 528-536.
3. Jonsson B. Universal relational systems // Math. Scand. – 1956. – Vol. 4. – P. 193-208.
4. Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории (учебное пособие). Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. – 250с.
5. Yeshkeyev A.R, Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness and JSB property of Abelian groups // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2016. – Vol.13. – P. 861–874. <https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.068>
6. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I. JSp-cosemanticness of R-modules // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2019. – Vol. 16. – P. 1233–1244. https://doi.org/10.33048/semi.2019.16.084
7. Yeshkeyev A.R. On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – 166:5. – P. 646–654.
8. Yeshkeyev A.R. The structure of lattices of positive existential formulae of (Δ-PJ)-theories // ScienceAsia. – 2013. – Vol. 39:SUPPL1. – P. 19–24. http://dx.doi.org/10.2306/scienceasia1513-1874.2013.39S.019
9. Yeshkeyev A.R., Kasymetova M.T., Shamatayeva N.K. Model-theoretic properties of the ♯-companion of a Jonsson set // Eurasian Mathematical Journal. – 2018. – Vol. 9:2. – P. 68–81.
10. Hodges W.A. Model Theory. Cambridge University Press, 1993.
11. Jonsson B. Homogeneous universal relational systems // Math. Scand. – 1960. – Vol.8. – P. 137-142.
12. Baldwin J.T. Kueker D.W. Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. –1981. – Vol. 20. – P. 289-330.
13. Сакс Дж. Теория насыщенных моделей, М.: Мир, 1976.
14. Мустафин Т.Г. Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды, , Новосибирск, Изд-во Института математики, –1998. – Tом 1(2).– С.135-197.
15. Mustafin T.G. On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90, Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. – Helsinki,1990. – P. 259–265.
16. Gould V., Mikhalev A.V., Palyutin E.A., Stepanova A.A. Model-theoretic properties of free, projective and flat S-polygons // Fundamental and applied mathematics. – 2008. – Vol. 14:7. – P. 63-110.
17. Mikhalev A.V., Ovchinnikova E.V., Palyutin E.A., Stepanova A.A. Model-theoretic properties of regular polygons // Foundation and applied matem. – 2004. –Vol.10:4. – P. 107-157.
18. Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary equivalence monoids endomorphisms free polygons // Chebyshevsky collection. – 2005. – Vol. 6:4. – P. 49–63.
19. Bunina E.I., Mikhalev A.V. Elementary properties of the category of polygons over a monoid // Siberian Fund for Algebra and Logic. – 2006. – Vol. 45:6. – P. 687–709.
20. Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A. Introduction to applied Model Theory. Publishing house of KarSU, Karaganda, 1987.
21. Mustafin T.G. About the stable theory of polygons. Model theory and its applications. Science, Novosibirsk, Sib. Department. –1988. – P. 92-108.
22. Пуаза Б. Курс теории моделей. – Перевод с французского Е.Р.Байсалова, К.А.Мейрембекова, – 2004. <http://www.math.nsc.ru/LBRT/logic/books/poizat/>
23. Yeshkeyev A.R., Issaeva A.K., Mussina N.M. The atomic definable subsets of semantic model // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2019. – Vol. 94(2). – P.84-91. <https://doi.org/10.31489/2019m2/84-91>
24. Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Mathematics of Algebra. Amsterdam, 1963.
25. Yeshkeyev A.R. Strongly minimal Jonsson sets and their properties // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2015. – Vol. 80(4). –P. 47–51.
26. Vaught R. Denumerable models of complete theories in Infinitistic Methode, Pergamon. London, 1961. – P. 303-321.
27. Kueker D.W. Core structures for theories // Fundamenta Mathematicae. – 1975. – Vol. LXXXIX. – P.154-171. DOI: 10.4064/fm-89-2-155-171
28. Poizat B., Yeshkeyev A.R. Positive Jonsson Theories // Logica Universalis. – 2018. – Vol. 12(1-2). – P. 101-127.
29. Itay Ben-Yaacov. Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. – 2003.  – Vol. 3(1). – P. 85-118.
30. Itay Ben-Yaacov. Compactness and independence in non first order frameworks // Bulletin of Symbolic logic. – 2005. – Vol. 11(1). – P. 28-50.
31. Wierzejewski J. On stability and products // Fundamenta Mathematicae. – 1976. – Vol. 93. – P. 81–95.
32. Bekenov M.I. Semigroup of theories and lattices of idempotent elements // Program and Abstracts of The 16th Asian Logic Conference. – Nur-Sultan, 2019. – P. 36-37.
33. Нуракунов А.М. Полугруппа теорий и ее решетка идемпотентных теорий // Мальцевские чтения-2020. – Новосибирск, 2020.
34. Weinstein J.M. First order properties preserved by direct product. Ph.D. thesis. Univ.Wisconsin, Madison, Wis. – 1965.
35. Кейслер Х.Дж., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. – М.: Мир, 1977.
36. Goodrick J., Laskowski M.C. The Schr¨oder-Bernstein property for a-saturated models // Proc. AMS. – 2014. – Vol. 142(3). – P. 1013-1023.
37. Yeshkeyev A.R. Method of the rheostat for studying properties of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2020. – Vol. 100(4). – P. 152–159. DOI 10.31489/2020M4/152-159.
38. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Properties of hybrids of Jonsson theories. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2018. – Vol. 92(4). – P. 99-104. <https://doi.org/10.31489/2018m4/99-104>
39. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Small models of hybrids for special subclasses of Jonsson theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2019. – Vol.95(3). – P.68-73. <https://doi.org/10.31489/2019m2/68-73>
40. Мусина Н.М. Йонсондық теориялардың гибридтерiнiң кейбір мысалдары және қасиеттері // Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия Физико-математические науки. – 2019. – Vol. 66(2). – P.72-77.
41. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. The hybrids of - P J theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2020. – Vol. 98(2). – P.174-180. <https://doi.org/10.31489/2020m2/174-180>
42. Morley M., Vaught R. Homogeneous universal models // Math. Scand. – 1962. – Vol. 11. – P.37–57.
43. Cherlin G.L. The model-companion of a class of structures // The Journal of Symbolic Logic. – 1972. – Vol. 37(3). – P.546–556.
44. Yeshkeyev A.R., Kassymetova M.T., Ulbrikht O.I. Independence and simplicity in Jonsson theories with abstract geometry // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2021. – Vol.18(1). – P. 433–455.  <https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.030>
45. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. An algebra of the central types of the mutually model-consistent fragments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2021. – Vol. 101(1). – P.111-118. <https://doi.org/10.31489/2021m1/111-118>
46. Ешкеев А.Р., Мусина Н.М. Гибриды йонсоновских теорий. Мальцевские чтения: Тезисы докладов международной конференции. – Новосибирск, 2018. – С.195.
47. Yeshkeyev A.R., Zhumabekova G., Mussina N.M. Enrichment of hybrids // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling progress in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина. – Алматы, 2019. – С. 25-26.
48. Yeshkeyev A.R., Urken G.A., Mussina N.M. Syntactic and semantic similarity of hybrids // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling progress in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК Станислава Николаевича Харина. – Алматы, 2019. – С. 24-25.
49. Ешкеев А.Р., Исаева А.К., Мусина Н.М. Экзистенциалды ядролық теориялардың саналымды модельдерінің қасиеттері // Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Рамазанов Мұрат Ыбырайұлының 70 жылдық мерейтойына орайластырылған «Математика, механика жəне информатиканың теориялық қолданбалы мəселелері» халықаралық ғылыми конференцияның материалдары. –Қарағанды, 2019. – Б. 8-9.
50. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Hybrid’s core models of Jonsson theories // 16th Asian Logic Conference. – Nur-Sultan, 2019. – P.44-45.
51. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M. Hybrids of classes from Jonsson spectrum. Logic Colloquium 2019: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL). – Prague, 2019. – P. 90-91.
52. Ешкеев А.Р., Жумабекова Г.Е., Мусина Н.М. Свойства категоричности и стабильности гибридов для наследственных теорий // Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». – Нур-Султан, 2019. – С. 175.
53. Ешкеев А.Р., Исаева А.К., Мусина Н.М. Свойства атомности модели для гибрида замыканий атомных множеств // Сборник тезисов международной конференции, посвященной 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal». – Нур-Султан, 2019. – С. 176-177.
54. Мусина Н.М., Социалова У. Свойства совершенных гибридов фрагментов ∇-cl- множеств // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. –Алматы, 2020. – С. 28.
55. Мусина Н.М., Социалова Ұ.Қ. Свойства гибридов Δ -PJ фрагментов // Сборник материалов XV Международной научной конференции студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2020». – Нур-Султан, 2020. – С.1288-1292.
56. Мусина Н.М., Тилеубек А. Не конечно – аксиоматизируемый центр универсального фрагмента Δ- PJ. Сборник материалов XV Международной научной конференции студентов и молодых ученых «ǴYLYM JÁNE BILIM - 2020». – Нур-Султан, 2020. – С.1292-1295.
57. Ешкеев А.Р., Мусина Н.М. Свойство категоричности гибридов ∆-PJ фрагментов // Мальцевские чтения: Тезисы докладов международной конференции. – Новосибирск, 2020. – С.225.
58. Мусина Н.М., Аманбеков С., Нурмакова А. Минимальные алгебраически простые модели универсального гибрида фрагментов йонсоновских множеств // Традиционная международная апрельская конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академикак НАН РК Т.Ш. Кальменова. – Алматы, 2021. – С.121.
59. Yeshkeyev A., Ulbrikht O., Mussina N.M. On the categoricity of the class of the Jonsson spectrum // Logic Colloquium 2021: European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL). – Poznan, 2021. – P. 151.
60. Mussina N.M., Kassymetova M. T., Amanbekov S. M. Companions of hybrids of fragments of theoretical subsets // Мальцевские чтения: Тезисы докладов международной конференции. – Новосибирск, 2021. – С.167.
61. Yeshkeyev A., Ulbrikht O., Mussina N.M. Syntactic and semantic similarities of hybrids of classes of the Jonsson spectrum of Jonsson quasivariety of the class K // Logic Colloquium: Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic. − Reykjavik, Reykjavik University, 2022. − P. 51.
62. Mussina N.M. Jonsson hybrids and their similarities // VII Franco-Kazakh Colloquium in Model Theory. − Lyon, Claude Bernard Lyon 1 University, Camille Jordan Institute. − 2022. − P. 8.
63. Yeshkeyev A.R., Mussina N.M., Mukhambet M.M. Perfect Jonsson varieties of algebras // Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. 9-ая Международная научная конференция. − Актобе, 2022. − С.318-320.
64. Mussina N.M., Mukhambet M.M. Perfect Jonsson varieties and quasivarieties // Актуальные задачи математики, механики и информатики: материалы Международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина. − Караганда, 2022. − С.37-38.
65. Yeshkeyev A.R., Ulbrikht O.I., Mussina N.M. Similarities of hybrids of Jonsson quasivarieties // «Математическая логика и компьютерные науки» труды международной научной конференции. – Астана, 2022. – С. 27-28.
66. Ешкеев А.Р., Ульбрихт О.И., Мусина Н.М. Cинтаксическое подобие гибридов классов йонсоновского спектра семантического йонсоновского квазимногообразия // Международная научно-практическая конференция «Таймановские чтения – 2022», посвященная 105-летию доктора физико- математических наук, академика А.Д. Тайманова и 90-летию Западно-Казахстанского университета им. М. Утемисова. – Уральск, 2022. – С. 24-26.
67. Kassymetova M.T., Mussina N.M. Geometry of strongly minimal hybrids of fragments of theoretical sets // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2023. – Vol.111(3). – P.165-180. <https://doi.org/10.31489/2023m3/47-58>
68. Yeshkeyev A.R., Zhumabekova G.E. Companions of fragments in admissible enrichments // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2018. – Vol. 92(4). – P.105–111. <https://doi.org/10.31489/2018m4/105-111>
69. Yeshkeyev A.R., Omarova M.T., Zhumabekova G.E. The J-minimal sets in the hereditary theories // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2019. – Vol. 94(2). – P.92–98. <https://doi.org/10.31489/2019m2/92-98>
70. Hrushovski E. Simplicity and the Lascar group. – Preprint, 1998.
71. Ешкеев А.Р., Касыметова M.T. Йонсоновские теории и их классы моделей. – Караганда: Изд-во Караганд. гос. ун-та, 2016. - 370 с.