Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова

УДК 517.9, 519.6 На правах рукописи

**МУСИНА АЛЛА АЛЕКСАНДРОВНА**

**Разработка математических и численных моделей теории фильтрации с учетом массообменных процессов**

8D05401 - Математика

Диссертация на соискание степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:

д.ф.-м.н., профессор Мухамбетжанов С.Т.

Зарубежный научный консультант:

д.т.н., профессор Воробьев А.Е.

(Российская Федерация, г. Грозный)

Республика Казахстан

Актобе, 2025

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**  **ВВЕДЕНИЕ** | 3  4 |
| 1  1.1 | **ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**  Совместное движение жидкостей с учетом неравновесных эффектов в поровом пространстве | 28  28 |
| 1.2 | Разрешимость математической модели изотермической фильтрации | 36 |
| 1.2.1 | Вывод уравнений | 36 |
| 1.2.2 | Постановка задачи. Существование, устойчивость и единственность решений | 41 |
| 1.3  1.4  1.5  1.5.1  1.5.2  2 | Качественные свойства решения задачи изотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей  Приближенные методы решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации  Качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации  Кинетика установления термодинамического равновесия  Асимптотическое поведение решения задачи типа Стефана  **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ МАССОБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ** | 48  49  54  56  62  67 |
| 2.1  2.1.1  2.1.2  2.1.3  2.2 | Численное исследование в автомодельных переменных  Задача неравновесной неизотермической фильтрации  Постановка задачи  Исследование разностной схемы на устойчивость  Алгоритм численного решения одномерной задачи Стефана  **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**  **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**  **ПРИЛОЖЕНИЕ** | 67  67  69  82  87  93  96  103 |
|  |  |  |

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
|  | - пористость среды |
|  | - плотность потока жидкости (фазы) |
|  | - скорость течения жидкости |
|  | - объёмный расход флюида (см3/с) |
|  | - коэффициент абсолютной проницаемости |
|  | - давление |
|  | - ускорение силы тяжести |
| ПАВ | - поверхностно-активное вещество |
|  | - коэффициент скорости растворения |
|  | - концентрация в породе |
|  | - время релаксаций |
|  | - капиллярное давление |
|  | - насыщенность |
|  | - коэффициент проницаемости |
|  | - коэффициент вязкости |
|  | - массовая концентрация примеси в нефти |
|  | - адсорбированная примесь в пористой среде |
|  | - тензор фильтрации |
|  | - концентрация ПАВ |
|  | - граница области |
|  | - условие гидрофильности пласта |
|  | - коэффициент диффузии |
|  | - концентрация в случае полного растворения ПАВ |
|  | - единичная функция Хевисайда |
| Т | - температура |
|  | - объемные теплоемкости вытесняющей фазы и вытесняемой фазы |
|  | - диффузионный поток |
|  | - конвективный поток тепла |
|  | - температуропроводность |
|  | -характерное значение капиллярного давления |
|  |  |

**ВВЕДЕНИЕ**

**Общая характеристика работы.** Данная диссертационная работа посвящена исследованию влияния адсорбции на процесс неравновесной фильтрации многофазной жидкости в пористых средах. В ходе исследования особое внимание уделяется взаимодействию между жидкостью и поверхностью грунта, а также влиянию адсорбции на распределение и скорость перемещения фаз. Этот аспект играет значительную роль в точности моделирования и предсказания процессов фильтрации.

**Актуальность исследования.** В современной нефтяной промышленности широко используются математическое и численное моделирование при проектировании и разработке нефтяных месторождений. Задачи контроля и прогнозирования добычи нефти способствуют оптимизации ее добычи и извлечению остаточных запасов. Извлечение остаточных запасов нефти - это процесс добычи нефти из месторождений, где уже проводились длительные эксплуатационные работы, и главная добыча приближается к своему завершению.

Остаточные запасы нефти - это часть нефти, которая еще не была извлечена из месторождения, несмотря на проводимые разработки. Они включают как нефть, которая не была добыта из-за технологических, экономических или геологических ограничений, так и нефть, которая остаётся в недрах из-за особенностей процессов добычи и недостаточной эффективности применяемых методов. Эти запасы могут быть разделены на несколько категорий в зависимости от их извлекаемости.

Технологически извлекаемые запасы - нефть, которую можно извлечь с помощью существующих методов разработки, но на текущий момент она ещё не была добыта. К экономически извлекаемым запасам относится нефть, которая может быть добыта с учетом текущих экономических условий и цен на нефть. К неизвлекаемым запасам относится нефть, которая в настоящее время не доступна для добычи с использованием существующих технологий или экономически нецелесообразна для извлечения.

Современные методы разработки месторождений, такие как методы усиленной добычи (например, закачка воды, газа или химических реагентов), направлены на увеличение извлекаемости остаточных запасов нефти.

Кроме аналитических методов решения задач фильтрации используются численные методы. Несмотря на значительные успехи в разработке математических моделей нестационарной многофазной фильтрации, эти достижения еще не привели к радикальному увеличению эффективности прогнозирования извлечения остаточных запасов нефти, и являются далеко не полными.

Классические математические модели Маскета-Леверетта и Баклея-Леверетта рассматривают однозначную зависимость фазовой проницаемости от насыщенности и давления [1-4]. Это возможно только в однородных пластах.

На практике нефтяной пласт является неоднородным, кроме этого, еще и пористым. Классические модели являются, в своем роде, равновесным приближением.

Неравновесные эффекты также должны быть учтены в модели. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. предложили определение пористости, «как отношение объема пор в материале к его общему объему» [5, с. 5]. Это одно из классических определений пористости, которое используется в различных областях науки и техники, связанных с материаловедением и геологией.

Задачи, связанные с фильтрацией в пористых средах, решались, но чаще упрощались за счет пренебрежения капиллярным давлением или его зависимости от температуры и концентрации.

Рассматривались изотермические случаи, где температурные эффекты исключались. Ранее многие модели ограничивались либо изотермическими предположениями, либо независимостью капиллярного давления от других факторов, что снижало точность моделирования реальных процессов.

В своих классических трудах Маскет М. сосредоточился на гидродинамических аспектах фильтрации. Его модели чаще упрощали капиллярное давление, рассматривая его как постоянное или пренебрегая его зависимостью от температуры и концентрации [4, с. 58].

Капиллярное давление - это разница давлений между различными фазами. Оно возникает на границе раздела двух фаз из-за кривизны поверхности раздела между двумя фазами.

В контексте геологии и нефтегазовых месторождений капиллярное давление имеет важное значение, так как оно влияет на движение флюидов в пористых средах, таких породах, которые содержат нефть, газ или воду. Оно отвечает за удержание жидкой фазы в порах, препятствуя её вытеканию, особенно в микроскопических порах, где сила поверхностного натяжения играет важную роль [1, с. 29].

В работах Баренблатта Г.И. по автомодельным решениям задач фильтрации капиллярное давление вводилось в упрощенном виде как функция насыщенности, без учета температурных и химических факторов.

Эффекты неравновесности - это явления, которые возникают в различных физических и химических системах, когда система находится вдали от термодинамического равновесия. Такие эффекты обычно связаны с процессами, происходящими с изменением времени, пространственным распределением или при наличии градиентов температуры, давления, концентрации и других факторов [5, с. 72].

В подходах Бочарова О.Б., Телегина И.Г. к моделированию процессов фильтрации капиллярные силы в задачах многокомпонентной фильтрации описывались упрощенно или рассматривались только для изотермических случаев [6].

Эффекты неравновесности были первоначально исследованы в работах Ентова В.М., Баренблатта Г.И., Гильмана А.А., Цыбульского Г.П., Манучарянца Э.О., Булгаковой Г.Т., Жибер А.В., Файзуллина Т.А. [7-11].

В их моделях были исследованы относительные фазовые проницаемости в пористой среде. Получены выводы, что учет неравновесных параметров приводит к возникновению релаксации насыщенности и давления. Как показали экспериментальные исследования, данные модели применимы в слабо неравновесной фильтрации.

Полученные результаты показали, что время релаксации, изменение насыщенности и давления сравнимы по величине [11, с. 51].

В работах Меликова Г.X., Азизова М.Г. и их последователей акцент делался на теплопроводность и гидродинамику, но влияние капиллярного давления часто описывалось через упрощенные зависимости, линейно зависящие от насыщенности [12].

Нестационарные лабораторные исследования образцов пористой среды подтверждают, что воздействие неравновесных процессов может быть существенным [13].

В работах Файзуллина Т.А. было исследовано асимптотическое поведение неравновесности, связанной с длительностью процессов установления капиллярного равновесия [14, 15].

В работе Николаевского В.Н. в математическую модель было введено кинетическое уравнение [16, с. 248].

Ентов В.М. ввел для учета неравновесности функцию состояния макроэлемента [17].

В Республике Казахстан разработаны математические модели: Смагулов Ш.С. исследовал изменение характеристик движущейся среды под воздействием магнитного поля, им было обосновано применение метода фиктивных областей. Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н. исследовали математическую и численную модель теории фильтрации с учетом неравновесности, предложив модель, связывающую насыщенность с истинной насыщенностью.

Мухамбетжанов С.Т., Хусаинов Р.Н., Неверный А.М. исследовали модели с расщеплением по физическим процессам в системе «нефть - вода» и «нефть - газ», в которых система уравнений разделяется на подсистемы или компоненты в соответствии с физическими процессами, происходящими в каждой из них. Этот подход позволил более эффективно и точно смоделировать нефтяные пласты, где присутствуют различные фазы (нефть, вода, газ) и различные физические процессы (фильтрация, перенос массы, теплообмен). Мухамбетжанов С.Т. исследовал разрешимость задачи неизотермической фильтрации для нефти и воды, и ввел для учета неравновесности кинетическое уравнение с учетом функции сорбции [18-20]. Также разработал математические модели теории неравновесной фильтрации с учетом неравномерного распределения реагентов.

По своим реологическим свойствам нефти Западного Казахстана имеют повышенную вязкость [21-24].

На сегодняшний день сохраняется проблема недостаточного учета всех неравновесных эффектов из-за сложности физических процессов (турбулентность, химические реакции, перенос массы и тепла), ограничений в вычислительных ресурсах, доступности данных и упрощения моделей [25, с. 92].

Все вышеуказанные факторы свидетельствуют об актуальности диссертационной работы, в которой исследуется модель многофазной фильтрации с учетом массообменных процессов. Модель является обобщением модели Маскета-Леверетта, дополненная новыми неравновесными эффектами.

Исследование, проводимое в данной диссертации, основывается на существующих достижениях в этой области. Оно дополняет предыдущие исследования, учитывая не только ранее изученные эффекты, но также добавляя в анализ новый аспект - влияние грунта с учетом адсорбции. Таким образом, расширяется область рассмотрения, углубляется понимание и учет сложных взаимодействий в системе.

Исследование влияния адсорбции на неравновесную фильтрацию многофазной жидкости в пористых средах, является актуальной как в контексте теоретических, так и практических аспектов разработки нефтяных месторождений. Одним из ключевых моментов, требующих детального анализа, является влияние адсорбции на процесс перемещения фаз, которое существенно влияет на точность прогноза и оптимизацию методов разработки месторождений, особенно при извлечении остаточных запасов нефти.

Для повышения извлекаемости остаточных запасов важно учитывать влияние капиллярных сил и взаимодействие фаз в неоднородных пористых средах. Неравновесные эффекты в моделях фильтрации играют ключевую роль, поскольку их учет позволяет более точно прогнозировать поведение жидкостей в различных условиях, например, при изменении давления, температуры или концентрации. В отличие от классических моделей, которые часто делают упрощения для равновесных случаев, более сложные неравновесные модели способны учитывать такие феномены как релаксация насыщенности и давления, которые могут существенно повлиять на эффективность фильтрации в реальных условиях.

Неравновесные процессы, связанные с капиллярным давлением, также включают химические и температурные эффекты, которые необходимо учитывать при моделировании многокомпонентной фильтрации. Эти эффекты могут быть значимыми в задачах разработки месторождений с осложненными условиями, такими как высокая неоднородность пласта, а также в условиях воздействия внешних факторов (например, закачка химических реагентов или газа).

Влияние адсорбции на фильтрационные процессы также связано с процессами на границе раздела фаз, где жидкость вступает во взаимодействие с твердой поверхностью пористого материала. Этим вопросам уделяется недостаточно внимания в классических моделях фильтрации, однако они имеют важное значение для точности прогноза, особенно в тех случаях, когда взаимодействие между фазами влияет на скорость их перемещения и конечные распределения в среде.

Таким образом, дальнейшее развитие и совершенствование математических и численных моделей с учетом неравновесных эффектов и адсорбции может значительно повысить точность прогнозирования и эффективное извлечение остаточных запасов нефти из месторождений, что имеет большое значение для нефтяной промышленности.

Обзор литературы, которая уточняет и подтверждает актуальность проблемы, поставленной в диссертации, можно начать с работ по теории подземной гидромеханики, начало развитию, которой было положено французским инженером Анри Дарси в середине XIX века. Он установил в ходе эксперимента линейную зависимость скорости фильтрации воды от разности напоров воды на входе и выходе песчаного фильтра.

Академик Жуковский Н.Е. в 1889 г. вывел основные уравнения классической теории фильтрации, в которых указывается, что напор воды рассчитывается из уравнения Лапласа. Он исследовал вопросы капиллярного течения жидкости в пористой среде. Им также были решены задачи о притоке воды к скважинам [26].

В дальнейшем вопросы движения жидкости были рассмотрены в работах академика Павловского Н.Н., он развил положения теории фильтрации в гидротехническом направлении. Им в 1922 году была разработана математическая теория движения грунтовых вод в пористой среде и были сформулированы задачи фильтрации. Павловский Н.Н. предложил использовать параметр Рейнольдса для закона Дарси [27].

Академик Полубаринова-Кочина П.Я. сформулировала все основные фундаментальные понятия теории фильтрации [28, с. 32].

Профессор Лейбензон Л.С. исследовал теорию фильтрации применительно к проблемам разработки нефтяных месторождений. В 30-х гг. вывел дифференциальные уравнения фильтрации. Им были проведены первые исследования в области изучения фильтрации газированных жидкостей, а также были сформулированы проблемы нестационарной фильтрации при вытеснении нефти водой. В работе [29] исследована поршневая модель.

Одной из самых распространенных моделей, используемой в гидродинамике для описания процесса фильтрации многокомпонентных жидкостей через пористую среду, является модель Баклея-Леверетта. Данная модель работает с равенством фазовых давлений. Эта модель была разработана физиками Морисом Баклеем и Фрэнком Левереттом в 1941 году. Модель Баклея-Леверетта основана на рассмотрении движения многокомпонентной жидкости через пористую среду в условиях, близких к идеальным. Главное предположение этой модели заключается в том, что жидкость движется в порах пласта, протекая равномерно через поры, без обратной дисперсии. Основной целью модели является определение коэффициента нефтегазоотдачи пласта и скорости фильтрации [3, с. 107-116].

Эта модель позволяет инженерам и геологам более точно предсказывать поведение многокомпонентных жидкостей в нефтяных пластах и оптимизировать процессы добычи. Она часто используется при анализе и моделировании нефтяных месторождений, чтобы понять, каким образом изменения в условиях добычи могут повлиять на производительность и на конечный выход продукции.

Модель, представленная Баклеем и Левереттом, была подробно исследована в последующих работах Коновалова А.Н., Чарного И.А., Леви Б.И. [30-32]. Уравнение для насыщенности в модели Баклея-Леверетта представляет собой нелинейное уравнение в частных производных гиперболического типа. Оно характеризуется наличием разрывов в решении. В работе были предложены и проанализированы разностные схемы, поскольку численные методы являются почти единственным способом получения прогнозной информации.

В 1930-1940-х годах американские ученые Маскет М., Леверетт М. и их коллеги разработали классическую математическую модель для описания движения несмешивающихся жидкостей в пористых средах. Эта модель основана на предположении о локальном равновесии [1, с. 15].

Модель Маскета-Леверетта изначально разработана для описания процессов фильтрации нефти в пористых средах. Учет капиллярных сил и закона Лапласа позволяет более точно моделировать взаимодействие между флюидами в пористой среде и предсказывать ключевые параметры, такие как время прорыва или время безводной нефтеотдачи.

Теория Маскета-Леверетта играет большую роль в инженерной практике. Однако, со временем стало понятно, что она не всегда полностью отражает реальные условия.

Для случая низкой вязкости жидкости в 1931 году была разработана модель Ричардса, которая используется для описания распространения жидкости в гидромеханике. Эта модель также известна как уравнения ненасыщенной фильтрации [33].

Предположение о локальном равновесии справедливо, если насыщенность меняется незначительно на масштабах поровых каналов.

Следовательно, возникают задачи, такие как противоточная капиллярная пропитка, которые имеют важное значение в нефтедобыче, и задачи о неустойчивости гравитационных фронтов пропитки в сухих пористых грунтах, которые имеют важное значение в экологии.

Исследователи Самарский А.А., Монахов В.Н., Данаев Н.Т., Мухамбетжанов С.Т., Антонцев С.Н., Кажихов А.В. провели анализ разностных схем для модели Баклея-Леверетта. Эти исследования позволили определить, какие численные методы хорошо передают качества решения для такой сложной модели [34-37].

Вопросы разрешимости задач многофазной фильтрации и разработка вычислительных алгоритмов для приближенного решения таких задач были также исследованы в трудах Баренблатта Г.И., Желтова Ю.П., Кониной И.Н., Мейрманова А.М. [38, 39]. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. исследовали вопросы неограниченных решений в теории нелинейных уравнений [40].

Диссертационная работа опирается на идеи Баренблатта Г.И., Коновалова А.Н., Монахова В.Н., Мухамбетжанова С.Т.. В работе проведено распространение анализа разностных схем на математические модели вытеснения нефти водой с учетом тепловых и физико-химических эффектов в прискважинной зоне пласта. Эти методы исследования обладают перспективой и могут быть применены к аналогичным проблемам, связанным с родственными процессами.

**Современное состояние темы.** Современное состояние нефтяной промышленности можно охарактеризовать тем, что постепенно происходит переход на более интенсивные методы добычи нефти и новые условия ее эксплуатации. Поэтому в последнее время стали исследоваться методы, способствующие повышению нефтеотдачи пластов. Большое внимание стало уделяться задачам вытеснения жидкостей, а также проблемам с подвижными границами, большое внимание так же уделяется новым приближенным методам решения подобных задач. В последнее время происходит активное исследование в области гидромеханического обоснования увеличения добычи углеводородов из недр. Подобный интерес можно объяснить постепенным иссяканием легкодоступных запасов, а также получением новых экспериментальных данных о горно-геологических структурах и новых термобарических условиях при разработке месторождений. Поэтому современный этап развития подземной гидромеханики характеризуется тем, что основным приоритетом исследований становится достижение более высоких показателей нефтеотдачи от пластов. Один из подходов к математическому моделированию процесса добычи нефти включает создание инженерных моделей, которые упрощают сложные схемы фильтрации. Эти инженерные модели предоставляют более быстрые и доступные численные методы для решения задач, связанных с нефтяными пластами. Они могут быть полезными для инженеров и проектировщиков, так как позволяют проводить множество вариантов расчетов и анализировать различные сценарии добычи.

Численное моделирование на основе сеточных моделей позволяет более детально изучать неравновесные явления и их влияние на фазовые проницаемости и остаточную насыщенность в пористой среде.

В работах [41-42] исследуются модели фильтрации с учетом неравновесных эффектов. Для учета неравновесности в этих моделях используются различные подходы. В некоторых случаях, в уравнения вводятся дополнительные члены, чтобы учесть неравновесные процессы. В других случаях, равновесные соотношения корректируются с учетом взаимодействия фаз, при этом предполагаются определенные механизмы этого взаимодействия.

Эти исследования предлагают разнообразные методы и подходы для более точного описания неравновесных эффектов в моделях фильтрации, что может быть полезным при анализе и разработке нефтяных месторождений.

Подходы из работы [43] могли бы быть полезны для улучшения численных методов решения задач Стефана, особенно в их инверсных постановках. Движение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области было рассмотрено в [44]. К задачам фильтрации в пористых средах с учетом стохастических возмущений адаптированы методы анализа слабых решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений, предложенные в [45].

В моделях фильтрации, где возникают операторы с высоким порядком дифференцирования, например, при описании течений в анизотропных или многослойных средах, то используются методы из [46].

В неравновесной модели фазовых переходов Баренблатта Г.И. при стационарном условии, фазы перемещаются по каналам разного размера: смачивающая фаза движется через узкие поры, а несмачивающая - через более широкие. При начальной установке потока смачивающая фаза начинает вытеснять несмачивающую из узких каналов.

**Цель работы.** Разработка математических и численных моделей теории фильтрации, описывающих движение многофазной жидкости с учетом массообменных процессов и построение приближенных решений задачи со свободными границами.

**Задачи исследования:**

а) исследовать модель неравновесной изотермической фильтрации с учетом адсорбции;

б) исследовать поведение модели при малых значениях параметра релаксации;

в) построить приближенное решение задачи неравновесной неизотермической фильтрации на основе вариационного принципа;

г) исследовать качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;

д) провести численное исследование задачи неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил;

е) провести численное исследование одномерной задачи Стефана с подвижными границами в теплопроводности и диффузии.

**Объектом исследования являются** задачи изотермической и неизотермической неравновесной фильтрации.

**Предмет исследования является** задачи теории фильтрации с учетом массообменных процессов.

**Методы исследования.** Для задач, связанных с теорией фильтрации, характерно применение современных функциональных методов для решения задач с подвижными границами в задачах фильтрации многофазных сред. Основными методами исследования служат классические методы математической физики, разностные методы, автомодельный метод, вариационный метод и метод оптимизации. При этом также используются численные методы анализа.

**Научная новизна:**

а) обоснована математическая модель неравновесной фильтрации с полимерными растворами. Установлено, что система уравнений Маскета-Леверетта, дополненная уравнением диффузии и кинетическими соотношениями, позволяет описать процессы в пластах при добавлении активной примеси; установлены достаточные условия существования и единственности решения, доказана устойчивость решений. Обосновано, что задача разбивается на три автономные подзадачи;

б) установлены условия, при которых решение задачи неравновесной изотермической фильтрации стремится к обобщённому решению задачи типа Стефана;

в) представлено решение задачи неизотермической фильтрации с учетом массообмена приближенным методом решения на основе вариационного принципа;

г) указаны достаточные условия существования и единственности решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;

д) получены асимптотические оценки движения границы фазового перехода;

д) предложен вычислительный алгоритм решения задачи неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил;

е) разработан алгоритм решения задачи с подвижными границами, основанный на методе конечных элементов, позволяющий с высокой точностью отслеживать положение фазовых границ независимо от количества фаз или их изменения по времени.

**Положения, выносимые на защиту:**

* математическая модель неравновесной изотермической и неизотермической фильтрации;
* сходимость к обобщённому решению задачи типа Стефана;
* приближенное решение задачи неизотермической фильтрации;
* достаточные условия существования и единственности решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;
* асимптотические оценки движения границы фазового перехода;
* численные исследования с учетом капиллярных сил;
* алгоритм численного решения с подвижными границами;
* численное исследование в автомодельных переменных.

**Обоснованность и достоверность** исследования достигается за счет сочетания фундаментальных знаний о физических процессах с применением математических моделей и численных методов, а также за счет комплексного подхода, включающего в себя учет различных аспектов физических процессов, математических моделей и численных методов.

Исследование опирается на анализ физических процессов, происходящих в системе нефтедобычи и фильтрации через грунт. Это включает в себя рассмотрение явлений, таких как теплообмен, массоперенос, адсорбция в грунте, образование парафина и других.

Для описания физических процессов используются математические модели, которые формулируются на основе законов физики, гидромеханики и теории фильтрации. Для анализа и решения математических моделей используются вариационные методы, методы оптимизации, а также метод конечных элементов. Эти методы позволяют получить численные решения уравнений, аппроксимирующих физические процессы.

Достоверность и обоснованность подтверждена публикациями в индексируемых международных и отечественных журналах.

Кроме того, достоверность подтверждена апробацией результатов исследований на практике. Результаты диссертации по мере их получения докладывались на семинарах кафедры математики и на конференциях. Достоверность обоснована приведенными доказательствами теорем, корректностью проведения преобразований и подтверждена результатами вычислительных экспериментов. В работе используются результаты, полученные другими авторами ранее и отмеченные ссылками. Достоверность обусловлена также обсуждением результатов диссертационного исследования на научных семинарах.

**Теоретическая и практическая значимость исследования**:

- разработанная новая математическая модель позволяет более точно описывать процессы добычи остаточных запасов нефти;

- исследование достаточных условий существования и единственности решений для задач неравновесной фильтрации и фазовых переходов создает основу для дальнейших исследований и приложений в рамках теории фильтрации;

- установление связи между задачами неравновесной изотермической фильтрации и обобщёнными решениями типа Стефана позволяет углубить понимание динамики многофазных систем и их поведения при различных условиях;

- полученные асимптотические оценки для движения границы фазового перехода могут быть использованы для оптимизации технологических процессов и улучшения эффективности разработки месторождений.

Практическая значимость результатов: представленный алгоритм решения применен при решении задачи прогнозирования добычи нефти на месторождениях западного региона Республики Казахстан. Результаты послужили базовыми элементами в блоке программ «ИСАР-2» - это «Цифровая технология по разработке нефтегазовых месторождений ИСАР-2», акт внедрения которой был оформлен в 2023 году в ТОО «Норс Каспиан Ойл» «Информационная система анализа разработки нефтегазовых месторождений» [приложение А].

**Личный вклад автора** состоит в том, что все результаты исследования были получены самостоятельно. Научные консультанты оказывали помощь в формулировании задач, обсуждении и анализе полученных результатов.

**Апробация работы.** Полученные результаты были представлены на конференциях различного уровня. Ниже приведен список, где были доложены результаты диссертационного исследования:

1. IX Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», г. Актобе, 24-28.05.2022 г., доклад: «О совместном движении жидкостей в поровом пространстве»;
2. Международная математическая конференция «Functional Analysis in Interdisciplinary Applications», 02.07.2023 г., г. Анталья, Турция, доклад «Mathematical Modeling of Fluid Filtration Processes with Consideration of Mass Transfer Processes»;
3. Proceedings of the International University Scientific Forum «Practice Oriented Science: UAE – RUSSIA – INDIA», 25.08.2023 г.;
4. XII Международная научно-практическая конференция «Инновационные научные исследования в современном мире: теория, методология, практика», г. Уфа. 15.08.2023 г. доклад: «О разработке цифровой технологии для нефтегазовых месторождений»;
5. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан, г. Алматы, 16-19.04.2024 г., доклад: «Исследование математической модели неравновесной фильтрации»;
6. Actual problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khwarizmi 2024 г., г. Ташкент, Узбекистан, доклад: «Numerical Modeling of Fluid Filtration Processes with Free Boundaries».

Основные результаты диссертации были представлены на научном семинаре кафедры «Математика» Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова «Проблемы дифференциальных уравнений, прикладной математики и информатики» (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.А., секретарь семинара – к.ф.-м.н., доцент Абдикаликова Г.А.) 12.01.2024 г., 21.02.2024 г., 27.02.2024 г., 10.10.2024 г., 7.11.2024 г., 18.02.2025 г.

**Публикации.** По теме диссертации имеется 10 работ, в том числе 1 статья в международном рецензируемом научном журнале Scopus [приложение Б], 1 публикация, входящая в базу данных WoS (Q4), 2 публикации в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных результатов научной деятельности (список 1 и список 2), 1 статья в базе  RSCI, 6 публикаций в материалахмеждународных научных конференций.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения, списка использованных источников из 91 работы. Нумерация формул, теорем, определений двухзначная: первое число означает номер раздела, второе число номер пункта. Работа изложена на 106 страницах.

**Краткое содержание работы.** Во введении дан обзор литературы по теме диссертации, кратко изложено содержание работы, цель, объект, предмет и задачи исследования, сформулированы результаты, выносимые на защиту.

Первый раздел работы содержит пять подразделов. В первом подразделе освящается совместное движение жидкостей с учетом неравновесных эффектов. Приведены понятия и формулы, которые являются основой для понимания процессов.

Во втором подразделе рассмотрена математическая модель изотермической фильтрации. Исследована ее корректность, доказано существование, единственность, устойчивость решений. При решении задача разбивается на три подобласти и решаются три автономные задачи. Рассмотрена изотермическая задача неравновесной фильтрации в заданной конечной области .

Математическая модель имеет вид:

начальные условия:

Граничные условия включают:

а) условие непротекания:

(0.6)

б) условие концентрации:

Коэффициенты определяются следующим образом:

Существование решения системы уравнений было получено с помощью теоремы о неподвижной точке (Шаудера). Существование обобщенного решения сформулировано в теореме 0.1.

**Определение.**  *Обобщенным решением задачи (0.1) - (0.4), будем считать ограниченные измеримые в области функции  
если они удовлетворяют условиям:*

*а) на выполняются граничные условия (0.6)-(0.7),*

*б)*

*в) почти всюду в области ,*

*г) для функций таких, что:*

*,*

*при почти всех выполняются следующие равенства:*

**Теорема 0.1** *Если коэффициенты в системе уравнений (0.1) - (0.4), имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка, и при этом выполняется следующее условие:*

*где - измерима и тогда существует одно обобщенное решение задачи (0.1) - (0.4), и функции удовлетворяют почти всюду в области следующим неравенствам:*

.

**Теорема 0.2** *Если**выполнены условия (а) - (г) из определения и граница принадлежит пространству то функции при являются обобщенным решением задачи (0.1) - (0.4) с начальными и граничными условиями (0.5) - (0.7). Для этих решений выполняется следующее неравенство:*

*Для разностей решений в этом случае выполняются оценки*:

*где*

*где*  *- положительные константы, которые зависят от норм начальных данных.*

Эта модель стала основой для разработки более сложной модели, так как доказательство корректности исходной изотермической модели позволило использовать ее как основу для разработки более сложных моделей.

В третьем подразделе исследовано поведение исходной системы при малых значениях параметра , и поведение решения при предельном переходе

В ходе исследования был сделан вывод, что решение стремится к обобщенному решению задачи Стефана. В изотермической фильтрации подвижные границы отсутствуют, но при малых релаксациях изотермическая система начинает вести себя как неизотермическая. Задача Стефана описывает фазовые переходы. Таким образом, решение исходной задачи изотермической фильтрации переходит в решение задачи Стефана.

**Теорема 0.3** *Для решения регуляризованной задачи действуют следующие оценки*:

,

,

*при* .

**Теорема 0.4** *Если выполняется при то имеет место при*

Теорема 0.4 исследует поведение решения при предельном переходе.

В четвертом подразделе рассматриваются приближенные методы решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации. Рассмотрим в заданной ограниченной области с кусочно-гладкой границей фильтрационное течение. Пусть область , - это внешняя нормаль к границе .

Неизотермическая фильтрация - это процесс фильтрации, в ходе которого изменяется температура фильтруемой среды. В отличие от изотермической фильтрации, при которой температура остается постоянной, при неизотермической происходит изменение температуры в процессе фильтрации.

Принимаем следующие обозначения:

В случае несжимаемости жидкости считается, что и давления отличаются на величину капиллярного давления:

Приведенное давление будем рассматривать в качестве новой искомой функции:

Условия для жидкостей таких, как вода и нефть, на эквивалентны следующим тождествам:

=()

На задаем отсутствие некоторого потока вытесняемой фазы:

в этом случае суммарный расход будет:

В этом случае получаем систему уравнений относительно функций

Приближенные решения задачи (0.20) - (0.21) строятся на основе вариационного принципа [44-47].

Пусть - это будет разбиение отрезка [0, T]:

Пусть последовательность относительно насыщенности имеет вид:

таких , при которых минимизирует следующий функционал:

Для нахождения приближенного решения строим систему функций:

полную в некотором пространстве на котором будем рассматривать функционалы (0.24).

**Теорема 0.5** *Если предел последовательности при существует и не зависит от выбранного метода разбиения отрезка [0, T], и этот предел является решением нестационарной задачи, то справедлива следующая оценка:*

Функционалы (0.24) представлены по произвольным гладким функциям:

**Теорема 0.6** *Если утверждение теоремы 0.5 справедливо и градиенты функционала по отличны от 0, то справедливо равенство:*

В теоремах (0.5) и (0.6) рассматриваются качественные свойства задачи фазовых переходов и критерии сходимости. Изучаются условия термодинамического равновесия системы. Приближенные решения сходятся к точному решению задачи при уменьшении шага по времени, и это решение удовлетворяет определенным оценкам. Для нахождения приближенных решений задачи фазовых переходов используется метод двойственных функционалов.

В пятом подразделе исследуются качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации. В разделе исследована разрешимость задачи Стефана с конвективным теплопереносом.

Рассматриваются три фазы, водная, нефтяная и переходная, а также динамика перехода фаз. Положение свободной границы между жидкостью и твердой фазой, а также распределение температуры внутри каждой фазы описаны автомодельными функциями, доказано существование и единственность решения. В подразделе исследовано асимптотическое поведение решения задачи с учетом конвекции. Получены асимптотические оценки движения границы фазового перехода.

Конвекция может ускорять или замедлять фазовый переход, изменяя скорость движения границы раздела фаз. Построение данной математической модели является актуальной задачей для нефтедобычи. Изменения температуры в пластах, например при интенсификации добычи нефти могут приводить к фазовым изменениям нефти, таким как кристаллизация.

Эти процессы могут значительно повлиять на продуктивность месторождений. Моделирование таких процессов важно для оптимизации способов добычи. Найдены обобщенные решения с переходной фазой для задачи Стефана с конвективным переносом тепла. В вышеуказанной постановке получены теоремы существования и единственности, а также изучены качественные свойства решений.

Постановка задачи.

Имеется система дивергентных уравнений:

На поверхности предельные значения функций удовлетворяют системе уравнений:

из (0.28) получается следующее уравнение:

Функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми. По определению движения с сильным разрывом всюду вне линий

движение непрерывное, то есть в областях , уравнение (0.30) эквивалентно уравнению:



а в области - уравнению в общем случае, то есть при

и функции *, U* в соответствующих замкнутых областях обладают непрерывными производными.

Если учесть, что скорость перемещения поверхности есть производная по времени функций, и со стороны жидкой фазы на линии равен нулю, а со стороны твердой фазы на линии - величине, то получим следующие условия на границах:

где - расход смеси,

В переходной фазе удельная внутренняя энергия:

В этом случае в области температура удовлетворяет следующему уравнению:

(0.36)

и двум условиям на свободной границе:

(0.38)

в начальный момент времени условно:

(0.39)

- температура в области фазового перехода, - функция от температуры, связанная с плотностью внутренней энергии, - коэффициент скорости конвективного движения.

**Теорема 0.7** *Если , то задача (0.36) - (0.39) с данными при , имеет единственное решение:*

*с функцией непрерывно зависящей от параметра и при*

Функция , параметр находится из условий:

(0.40)

(0.41)

(0.42)

**Теорема 0.8** *Если выполнены условия теоремы 0.7. и условия:*

*с , то для решения задачи (0.36) - (0.39) будет справедливо равенство:*

*где - решение задачи (0.40) – (0.42).*

В разделе также исследовано асимптотическое поведение решения задачи с учетом конвекции.

Построение этой математической модели - актуальная задача для нефтедобычи. Изменения температуры в пластах, например при интенсификации добычи нефти могут приводить к фазовым изменениям нефти, таким как кристаллизация. Эти процессы могут значительно повлиять на продуктивность месторождений. Моделирование таких процессов важно для оптимизации способов добычи. Фильтрация и теплоперенос влияют на фазовые изменения.

Во втором разделе диссертационной работы содержатся два подраздела.

В первом подразделе рассматривается процесс, связанный с теплообменом в пористых материалах, численно исследована задача в автомодельных переменных. Численные расчеты показали, что водонасыщенность и концентрация поверхностно-активных веществ уменьшаются с увеличением пространственной переменной, что указывает на эффективный процесс фильтрации. Использованные численные методы демонстрируют высокую точность, что подтверждается стабильностью результатов при увеличении количества узлов в сетке. Это свидетельствует о корректности выбранного численного подхода.

Было проведено исследование изменения водонасыщенности и концентрации в пористой среде при неизотермической неравновесной фильтрации. По мере прогрессирования процесса фильтрации водонасыщенность падает, что указывает на снижение капиллярного давления.

Представлено численное решение задачи капиллярной пропитки в пористой среде с учетом процессов тепло- и массообмена. Основное внимание уделено построению разностной схемы и ее реализации в условиях неизотермической фильтрации. Используемая модель описывается системой дифференциальных уравнений, включающей члены диффузии, фильтрации и теплопередачи.

Основные этапы численного алгоритма включают дискретизацию расчетной области с равномерной сеткой по пространству и времени, применение метода конечных разностей для аппроксимации производных, учет граничных условий, задающих насыщенность на краях области, итерационный процесс расчета распределения насыщенности с учетом критериев устойчивости.

Численные эксперименты подтверждают стабильность и сходимость алгоритма. Поведение системы показывает ожидаемое уменьшение концентрации в пористой среде и подтверждает важность учета капиллярного давления и теплопроводности в задачах фильтрации. Разработан вычислительный алгоритм в автомодельных переменных для решения задачи неравновесной фильтрации. Основные результаты сформулированы в виде теоремы.

Учитывая, что имеется неизотермическая фильтрация, следующие уравнения описывают процесс, который подвергается исследованию:

(0.43)

(0.44)

+ (0.45)

Уравнения (0.43), (0.44) и (0.45) с учетом зависимостей (0.46) - (0.50) и есть система уравнений, которая исследуется.

(0.46)

(0.47)

(0.48)

(0.49)

(0.50)

Предполагается, что поверхностно-активная добавка растворима исключительно в водной фазе. Перейдя к однофазной модели, уравнения (0.43) - (0.50) примут следующий вид:

(0.51)

(0.52)

(0.53)

(0.54)

+ (0.55)

(0.56)

При описании взаимосвязи между тепловыми и фильтрационными процессами в пористой среде используем автомодельную переменную где *,* а решение задачи будет в таком виде система уравнений будет в дальнейшем приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Было проведено исследование разностной схемы на устойчивость. В разностных производных задача имеет вид:

где с граничными условиями и начальными условиями

**Теорема 0.9** *Если для разностной задачи (0.57) выполнены неравенства то решение задачи при сходится к точному решению .*

Было проведено исследование изменения водонасыщенности и концентрации в пористой среде при неизотермической неравновесной фильтрации.

Во втором подразделе представлен алгоритм численного решения одномерной задачи Стефана. Разработан алгоритм для решения задач с переменными границами, который может применяться к задачам теплопроводности и к задачам диффузии. Алгоритм основывается на методе конечных элементов.

Численный алгоритм является универсальным и может быть применен к задачам теплопроводности и диффузии независимо от количества фаз или их изменения по времени. Применение неявных разностных схем для аппроксимации производных по времени повышает устойчивость алгоритма и улучшает точность учета изменений в положении фазовых границ на каждом временном шаге. Использование итерационных методов для корректировки положения фазовых границ позволило точно отслеживать изменение фаз и учесть возможность появления новых фаз. Коррекция сетки и положения границ осуществлялась динамически на каждом временном шаге. Итерационный процесс численного решения обеспечивает сходимость, корректность решения проверяется на каждом шаге.

Применение неявных разностных схем для аппроксимации производных по времени повышает устойчивость алгоритма и улучшает точность учета изменений в положении фазовых границ на каждом временном шаге.

Использование итерационных методов для корректировки положения фазовых границ позволяет точно отслеживать изменение фаз и учитывать возможность появления новых фаз. Коррекция сетки и положения границ происходит динамически на каждом временном шаге. Итерационный процесс численного решения обеспечивает сходимость, корректность решения проверяется на каждом шаге.

Исходя из полученных результатов, следует, что диссертационная работа посвящена одной из приоритетных тем в теории фильтрации, поэтому тема работы является актуальной.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своим научным консультантам доктору физико-математических наук, профессору Мухамбетжанову Салтанбеку Талапеденовичу и доктору технических наук, профессору Воробьеву Александру Егоровичу за постановку задач, полезные замечания, советы при обсуждении полученных результатов и всестороннюю поддержку.

**1 ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ**

**1.1 Совместное движение жидкостей с учетом неравновесных эффектов в поровом пространстве**

Пористые среды, такие как грунты, горные породы, а также многие другие материалы, содержат множество пор и каналов, в которых могут перемещаться жидкости.

Одним из ключевых аспектов исследования являются не только равновесные состояния жидкости в порах, например, насыщенность порового пространства, но и неравновесные процессы, такие как диффузия, конвекция и проникновение жидкости в поровое пространство под воздействием различных физических и химических факторов [47, с. 51].

Равновесные эффекты в контексте фильтрации многофазной жидкости в пористых средах связаны с состоянием системы, когда все процессы, происходящие в ней, находятся в термодинамическом или механическом равновесии. Это означает, что давление, концентрация, температура и другие параметры не изменяются во времени и пространстве, а системы фаз, такие как нефть, вода и газ ведут себя в соответствии с определенными равновесными состояниями, при которых силы, действующие на границе фаз, уравновешены.

В классических моделях фильтрации, таких как модель Маскета-Леверетта и Баклея-Леверетта, предполагается, что фазы находятся в равновесном состоянии, и взаимосвязь между фазовой проницаемостью и насыщенностью можно описать через стандартные функции, которые не зависят от времени. Эти модели предполагают, что все процессы, происходящие в пористой среде, протекают достаточно быстро, чтобы фазы успели достичь равновесного состояния, и не принимаются во внимание динамические (временные) изменения, такие как релаксация насыщенности или давления.

Равновесные эффекты считаются важными для простых и устоявшихся ситуаций, например, при моделировании фильтрации в однородных и не очень сложных условиях. Однако, когда речь идет о более сложных системах, таких как неоднородные пористые среды, где возможны резкие изменения давления, температуры или химического состава, а также при наличии капиллярных сил, классическое равновесное приближение может не дать точных результатов.

Основными равновесными эффектами, которые учитываются в моделях фильтрации, являются: зависимость фазовой проницаемости от насыщенности и давления; равновесие между фазами; отсутствие зависимости от времени.

В равновесных моделях предполагается, что проницаемость каждой фазы зависит от её насыщенности и давления, и эта зависимость фиксирована. Это удобно для описания процессов фильтрации в идеализированных условиях, но не учитывает динамических изменений в системе.

В равновесном состоянии каждая фаза находится в термодинамическом равновесии с другими фазами. Это означает, что, например, газ и жидкость в пористой среде находятся в таком состоянии, что давление газа и жидкости уравновешивают друг друга, и такие системы не подвергаются значительным колебаниям.

В равновесных моделях не принимаются во внимание временные эффекты, такие как процессы релаксации или диффузии, и предполагается, что фазы быстро достигают равновесного состояния.

В реальных условиях фильтрации, особенно при разработке нефтяных месторождений, равновесные эффекты не всегда могут точно моделировать поведение системы. В таких случаях важно учитывать неравновесные эффекты, такие как временные изменения фазовых состояний, капиллярные силы, а также влияние химических и температурных факторов, которые могут существенно изменить поведение системы.

Тем не менее, равновесные модели остаются полезными и широко применяемыми в случаях, когда система близка к равновесию, и результаты таких моделей могут быть использованы как базовые для дальнейших усовершенствований и более точных расчетов с учетом неравновесных эффектов.

Неравновесные эффекты могут включать в себя:

а) диффузию, то есть процесс перемещения молекул жидкости от области с более высокой концентрацией к области с более низкой концентрацией. В пористых средах диффузия может быть значительно замедлена из-за сложной структуры порового пространства;

б) конвекцию, то есть перемещение жидкости вследствие разности давлений или температур в поровом пространстве. Конвективные потоки могут значительно влиять на перенос массы в пористых средах, особенно при наличии неравномерных физических свойств пор;

в) взаимодействие с поверхностью пор, когда жидкость может вступать во взаимодействие с поверхностью пор, что может приводить к адсорбции, десорбции или химическим реакциям. Эти процессы могут быть важными при рассмотрении транспорта веществ в пористых средах;

г) изменения в пористой структуре, например, из-за компрессии порового пространства под воздействием давления или изменений влажности. Эти изменения могут влиять на проницаемость и режимы движения жидкости.

В реальных условиях пористое пространство может быть заполнено различными жидкостями и газами одновременно. Исследование транспорта и взаимодействие различных фаз в пористых средах имеет важное значение для исследования движения нефти и газа в нефтяных месторождениях или фильтрации воды через грунт.

Структура и форма пор влияют на скорость проникновения и распределение жидкости в пористом материале. Например, в пористых средах с узкими каналами могут наблюдаться эффекты капиллярного поднятия, что может существенно изменять скорость и направление потока жидкости.

Для более точного описания совместного движения жидкостей в пористом пространстве с учетом неравновесных эффектов используются как математические модели, так и экспериментальные методы.

Развитие высокоточных численных моделей и методов визуализации помогает улучшить наше понимание процессов транспорта в пористых средах [47, с. 52].

Основное уравнение в теории фильтрации - это уравнение Дарси, которое описывает скорость фильтрации жидкости через пористую среду.

Уравнение сохранения массы описывает закон сохранения массы для жидкости в поровом пространстве. Изотерма Ленгмюра - это эмпирическое соотношение, описывающее зависимость количества адсорбированных молекул от их концентрации в растворе. Изотерма Ленгмюра часто используется для описания процессов адсорбции в пористых средах. Капиллярное давление - это давление, вызванное кривизной поверхности раздела между двумя фазами в узких порах пористой среды. Капиллярное давление играет важную роль в механизмах поднятия жидкости в узких капиллярах и влияет на процессы фильтрации [48, с. 63].

Гидродинамическое сопротивление - это сопротивление, с которым сталкивается жидкость при движении через пористую среду из-за трения с порами и частицами материала. Гидродинамическое сопротивление влияет на скорость фильтрации и распределение давления в пористой среде.

Коэффициент фильтрации - это параметр, характеризующий способность пористой среды пропускать жидкость при заданных условиях. Он определяется через коэффициент проницаемости и вязкости жидкости. Коэффициент фильтрации отражает скорость, с которой флюид может перемещаться через пористую среду, и является ключевым параметром в гидродинамических моделях фильтрации. Коэффициент фильтрации (или гидравлический коэффициент фильтрации) зависит от ряда факторов, включая проницаемость пористой среды, вязкость жидкости, пористость среды, а также от характеристик самой жидкости (например, её плотности) [48, с. 82].

В теории фильтрации изучается движение жидкостей и газов в пористых телах, содержащих систему пустот или пор, по которым происходит движение. Теория фильтрации опирается на фундаментальные законы, такие как закон Дарси, который описывает движение жидкости через пористую среду. Этот закон утверждает, что скорость фильтрации пропорциональна разнице давления и обратно пропорциональна вязкости жидкости и сопротивлению пористой среды.

В теории фильтрации вводится понятие пористости среды . В этом случае, учитывая уравнение неразрывности для однородной жидкости записывается в виде:

(1.1)

где - плотность потока, - скорость течения жидкости.

Проницаемость пористой среды отражает ее способность пропускать жидкость. Проницаемость пористой среды - это физическая характеристика материала, которая отражает его способность пропускать жидкости или газы. Она зависит от структуры пористой среды, таких как размер, форма, распределение и взаимное расположение пор, а также от свойств самой жидкости, таких как вязкость и плотность.

В контексте нефтяных и газовых месторождений проницаемость определяет, как эффективно флюиды (например, нефть, вода или газ) могут перемещаться через пористые горные породы или песчаники, являясь важным параметром при моделировании фильтрационных процессов. Производительность нефтяных скважин зависит именно от проницаемости, так как эта характеристика определяет, насколько хорошо жидкости и газы могут проникать через пористую среду и поступать в скважину [49].

Скорость течения флюида в пористой среде характеризуется соотношением: , где - объёмный расход флюида (см3/с), - площадь сечения образца.

Вектор скорости фильтрации движется в направлении уменьшения давления и зависит от градиента напора.

Закон Дарси:

(1.2)

где - коэффициент абсолютной проницаемости, - вязкость, Ф – напор, равный:

,

где *-* давление, - ускорение силы тяжести, - плотность среды, - расстояние от текущей точки пористой среды до заданной поверхности отсчёта.

На некоторых стадиях разработки нефтяных месторождений в определенный момент времени встает вопрос снижения нефтяной отдачи пласта. Причинами данной проблемы является уменьшение давления пласта и изменение температуры, а также повышение обводнённости пласта.

Одним из современных вариантов решения этой проблемы является закачка вместе с водой в нефтяной пласт поверхностно-активных веществ (ПАВ), которые представляют собой некоторую примесь [49, с. 456].

В потоке жидкости примесь будет либо растворена в воде, либо растворена в нефти, либо адсорбирована на стенках пор. Смешивание примеси обычно сопровождается процессом диффузии и массообменными процессами с компонентами пористой среды.

Квазистационарность свойств среды означает, что изменения во времени происходят настолько медленно, что систему в каждый момент времени можно считать находящейся в состоянии близком к равновесному. Временная составляющая изменения параметров (температуры, концентрации, насыщенности) не оказывает существенного влияния на динамику процессов в масштабах наблюдаемого времени.

Квазистационарность предполагает, что такие параметры, как температура, концентрация примеси, давление или насыщенность, могут быть рассмотрены как функции пространственных переменных в каждый момент времени, с учетом того, что временные изменения медленно приближаются к асимптотическому состоянию.

Такое предположение может быть справедливо в следующих условиях: в изотермических процессах, где теплопередача идет быстрее других процессов (например, диффузии); в системах, где параметры среды изменяются локально, но основные макропараметры сохраняют стабильность [50, с. 28].

При исследовании и решении задач теории фильтрации имеются два подхода, которые отличаются своими принципиальными концепциями. Первый из них, предполагает учет квазистационарности свойств среды ведет к усреднению всех параметров среды. Второй подход предполагает учет свойств неоднородности среды, который учитывает введение новых параметров, таких, как скорость деформации и тензор напряжения.

В первом случае возникают сложности выбора правильной математической модели усреднений. Во втором случае учет адекватности и точности модели приводит к тому, что появляется огромное количество параметров, требующих аппроксимации исходных данных, а это в свою очередь тоже в какой-то мере приводит к усреднению. «Для решения такой сложной задачи нужна разработка адекватной численной модели оценки и прогнозирования показателей нефтедобычи» [50, с. 29].

Модели растворения твердых веществ в пористых средах рассматривают влияние фильтрационного потока на процесс переноса растворенных веществ в порах горных пород.

Одномерные модели удобны для анализа процессов вдоль одной оси и часто используются для упрощения задач.

Веригин Н.Н. предложил модель, которая включает следующие основные элементы:

1. уравнение фильтрации, которое описывает поток флюида в пористой среде. Обычно это уравнение является уравнением Дарси или его модификацией;

б) уравнение переноса. Описывает перенос растворенных веществ в фильтрационном потоке через пористую среду. Здесь могут учитываться различные параметры, такие как концентрация, диффузия и т.д.;

в) граничные условия. Определяют влияние граничных условий на поведение системы. Например, условия на границе резервуара или на поверхности твердого вещества;

г) начальные условия. Определяют начальные значения концентрации растворенных веществ в пористой среде.

Модель Веригина учитывает особенности процесса растворения в условиях фильтрационного потока и может предоставить аналитическое или численное решение для описания этих процессов [51].

Модель Веригина является одной из стохастических моделей оценки нефтяных месторождений, основанной на предположении о том, что размер и объем добычи вторичных и третичных запасов нефти зависят от геологических параметров месторождения и применяемых технологий добычи.

Основные принципы модели Веригина включают в себя учет геологической структуры месторождения, распределение нефти в резервуаре, а также физико-химические характеристики, как нефти, так и породы, и эффективность применения различных методов добычи, таких как вторичное извлечение, гидравлический разрыв пласта и другие.

Модель Веригина может использоваться для прогнозирования будущей добычи из месторождений, а также для оптимизации различных стратегий разработки и управления процессом добычи нефти. Она представляет собой важный инструмент для принятия решений в нефтяной промышленности и управления запасами нефти.

Уравнение материального баланса массы:

где - концентрация полезного компонента, – скорость потока, - концентрация компонента, - расход компонента в процессе, - коэффициент скорости растворения. Это значение зависит от нескольких факторов, включая коэффициент диффузии растворимого компонента в растворе, скорость движения, температуру, удельную площадь поверхности реакции и ряд других параметров.

Если рассматривается процесс пленочного распределения растворимого компонента в твердой фазе, то удельная площадь поверхности реакции остается постоянной. Однако в случае дисперсного распределения, эта удельная площадь уменьшается с течением времени по мере уменьшения концентрации компонента в породе [52]. Разность между концентрациями действует как движущая сила для процесса реакции растворения.

Следовательно, уравнение кинетики растворения можно представить в следующем виде: где - концентрация в породе. Формируются три различные области во время процесса растворения.

В результате химической реакции происходит изменение физического состояния вещества, изменяется скорость химических реакций, граница между различными областями изменяется. Если это изменение границы связано с изменением температуры, то речь идет о задаче Стефана. А если изменение границы происходит из-за изменения давления, то это относится к задаче Веригина.

Решение задачи Стефана состоит в вычислении изменений температуры или концентрации на различных временных интервалах и в точном определении положения подвижных границ между фазами. Эта задача осложняется тем, что движущиеся границы создают изменяющиеся области, где требуется определять температуру или концентрацию.

Численные методы играют ключевую роль в решении задачи Стефана, так как они позволяют моделировать эти изменяющиеся области и следить за движением границ. Например, методы конечных разностей или конечных элементов позволяют аппроксимировать уравнения диффузии и учитывать условия на границах между различными фазами или состояниями.

Таким образом, решение задачи Стефана требует не только точного численного решения уравнений диффузии, но и учета движущихся границ и их влияния на распределение температуры или концентрации в пористой среде. [53, с. 39].

Капиллярные силы описывают взаимодействие между флюидами в порах горной породы, а закон Лапласа связан с изгибом поверхности раздела двух фаз. Эти факторы играют важную роль в понимании и прогнозировании процессов, связанных с фильтрацией и добычей нефти.

Маскет М. занимался исследованием движения в пористой среде нефти и газа и построением характеристического уравнения, связывающего плотность, давление и температуру [4, с. 485]. Жуковский Н.Е. выдвинул теорию, что на движение флюидов оказывают влияние внешние силы [54].

Проблемы подземной гидромеханики связаны с тем, что жидкость течет в сложных поровых каналах и поэтому изучение движения флюида в каждом отдельном поровом канале невозможно. В этом случае прибегают к осреднению, при котором рассматриваются средние скорости движения флюидов в пластах. Для этого было введено понятие скорости фильтрации, которая представляет собой расход жидкости через единицу поперечного сечения [55, с. 60].

Знание скорости продвижения несмешивающихся жидкостей важно, так как от него зависит дебит нефтяных скважин, их размещение, продолжительность эксплуатации месторождения и другие показатели, на основе которых составляется прогноз продвижения флюидов, проводится контроль их перемещения.

Это помогает оптимизировать систему разработки нефтяного месторождения, а также верно определить количество и размещение добывающих и нагнетательных нефтяных скважин.

Исследования корректности математических моделей в нефтегазовой индустрии являются важным этапом для обеспечения достоверности результатов и их пригодности для прогнозирования реальных физических процессов в пористых средах. Учет капиллярных сил и гравитационных эффектов может быть важным фактором для точного моделирования давления и насыщенности в подземных резервуарах [56, с. 116].

Капиллярные силы возникают из-за разницы в поверхностных напряжениях между жидкостью и твердой поверхностью порового пространства. Эти силы могут приводить к капиллярному поднятию или опусканию жидкости в пористой среде и оказывают влияние на распределение насыщенности некоторой жидкости в пласте.

Капиллярные силы играют ключевую роль в процессах, происходящих в пористых средах, например, в грунтах и нефтяных коллекторах, а также в тонких капиллярах [47, с. 55].

Гравитационные силы также оказывают влияние на перемещение жидкости и газа в подземных резервуарах. При фильтрации через пористую среду гравитация влияет на насыщенность порового пространства различными флюидами. Она может изменять распределение фаз в зависимости от их плотности, особенно в условиях, где происходят вертикальные миграции флюидов, например, в нефтяных пластах.

В более сложных моделях, где учитываются динамические процессы, такие как капиллярные и гравитационные эффекты, взаимодействие между фазами и их движение по времени, гравитационные силы могут влиять на скорость фильтрации и на то, как фазы будут двигаться через пористую среду в ответ на изменения в давлении, температуре и других факторах. В нефтяных месторождениях гравитационные силы важны для распределения нефти, воды и газа в пластах. Гравитация помогает разделять фазы на основе их плотности, что в свою очередь влияет на прогнозирование движения флюидов и разработку методов увеличенной нефтеотдачи.

Таким образом, гравитационные силы оказывают существенное влияние на процессы фильтрации, особенно в многокомпонентных системах, где фазы имеют различные плотности и находятся в сложном взаимодействии. Тяжелые компоненты, такие как нефть, могут скапливаться в нижних частях резервуара, тогда как легкие компоненты, такие как газ, могут накапливаться в верхних частях.

Интеграция капиллярных сил и гравитационных эффектов в моделировании позволяет более точно предсказывать поведение флюидов в подземных резервуарах и, таким образом, улучшает понимание процессов добычи и управления нефтяными месторождениями.

Методы, которые явно отслеживают движение межфазных границ, предоставляют точное определение положения границ в ходе расчета. Среди них есть методы, такие как метод функций уровня и метод фазового поля, а также методы, использующие метод конечных разностей на равномерных или неравномерных сетках.

Также существует подход, который включает в себя использование метода динамически адаптирующихся сеток, и метод конечных элементов также может быть применен для решения задачи Стефана.

Основными идеями диссертационного исследования являются задачи неравновесной фильтрации.

**1.2 Разрешимость математической модели изотермической фильтрации**

**1.2.1 Вывод уравнений**

В разделе рассматривается математическая модель неравновесной фильтрации, описывающая процесс вытеснения нефти с помощью полимерных растворов. Особое внимание уделяется влиянию активных примесей на данный процесс. Модель исследуется в одномерном случае.

Системы уравнений многофазной фильтрации используются для описания процессов перемещения двух различных фаз через пористую среду, такую как горная порода или нефтяные пласты. Такие системы уравнений имеют значение в нефтегазовой промышленности, геологии и инженерных науках. При рассмотрении физических особенностей движения многокомпонентных потоков в пористых средах следует выделить четыре ключевых механизма, которые управляют переносом химических веществ в проницаемых природных средах: вязкость, гравитация, диффузия и капиллярные силы.

Влияние вязкости, гравитации и диффузии обусловлено градиентами давления, плотности и концентрации соответственно. Капиллярные силы, или силы, связанные с поверхностью, возникают из-за наличия кривизны на границах между различными фазами. Эта кривизна обусловлена наличием пор внутри проницаемой среды, и капиллярные силы создают различные давления в каждой фазе однородной жидкости.

Уравнение неразрывности (1.1) и закон Дарси (1.2) в общем случае совместно формируют систему уравнений в изотермической фильтрации, которая позволяет определить распределение давления и скорости фильтрации в пористой среде и которая замыкается уравнением состояния или условием капиллярного равновесия:

(1.3)

Уравнение для давления является уравнением в частных производных. В случае однородной среды, оно сводится к уравнению Лапласа. Математическая модель (1.1) - (1.3) известна, как модель Маскета-Леверетта.

Данная модель разработана так, что в ней происходит учет воздействия капиллярного давления [57].

Для увеличения производительности скважин часто используется метод гидравлического разрыва пласта. В этой процедуре жидкость нагнетается в пласт под высоким давлением. Давление подбирается так, чтобы создать трещину в пласте, которая будет служить каналом для извлечения жидкости из пласта. Чтобы закрепить и усилить образовавшуюся трещину, вместе с жидкостью используются крупные твердые частицы, которые называют закрепителями.

Нефть извлекается из пласта через скважины, поэтому призабойная зона скважины играет ключевую роль в эффективности добычи. В этой области сосредотачиваются все основные процессы, связанные с извлечением или нагнетанием жидкости.

Призабойная скважина - это скважина, которая временно или постоянно не добывает или не интенсивно добывает углеводороды из подземных пластов.

Проблемы с призабойными скважинами могут включать в себя: засорение скважины, накопление твердых частиц, песка, глины или других материалов вокруг зоны продуктивного пласта, что может привести к ухудшению притока углеводородов и, следовательно, к снижению производительности скважины.

Оседание отложений, в результате которого происходит образование отложений, например, солей, парафина, асфальтенов внутри или вокруг скважины, что может привести к уменьшению дебита и давления в пласте. В редких случаях, даже при правильной технической эксплуатации, низкая продуктивность пласта может сделать скважину призабойной. Призабойная зона скважины - это область пласта, непосредственно прилегающая к стволу эксплуатационной или добывающей скважины. Эта зона играет ключевую роль в процессе добычи нефти, газа или воды, так как через нее осуществляется фильтрация флюида из породы в скважину [57, с. 59].

Для устранения или смягчения проблем с призабойными скважинами проводятся различные технологические мероприятия, такие как химическая обработка, промывка скважин, применение средств по уменьшению вязкости флюида и другие методы, направленные на улучшение производительности и увеличение добычи углеводородов из пласта.

Состояние призабойной зоны скважины оказывает значительное влияние на эффективность разработки всего месторождения. Сохранение низких фильтрационных сопротивлений в зоне является важной задачей, и для этого могут применяться различные методы воздействия на эту зону. Бурение скважины само по себе вносит некоторые изменения в распределение напряжений в окружающих породах.

Для снижения фильтрационных сопротивлений применяются различные методы воздействия, включая химические, механические и тепловые методы. Выбор метода зависит от характеристик конкретного месторождения, состава пород и жидкостей, и требует тщательного анализа термодинамических условий в призабойной зоне скважины.

В задачах о вытеснении нефти водой на практике происходит совместное течение несмешивающихся жидкостей через пористую среду. В качестве пористой среды может выступать нефтяной пласт, горная порода.

Для добычи нефти используются различные методы:

а) фонтанный способ. Это один из первых и наиболее естественных методов добычи нефти. Когда скважина пробурена нефть может самостоятельно подниматься на поверхность. Это явление называется «фонтанация». Этот метод часто используется лишь в начале эксплуатации месторождения, так как давление с течением времени снижается;

б) механизированный способ. Для механизированной добычи нефти применяют различные насосные установки, которые помогают поднять нефть на поверхность, если природного давления уже не достаточно для извлечения нефти. Этот метод широко используется на зрелых месторождениях;

в) паровый способ. Паровый метод - это технология, при которой в пласт закачивается пар (или горячая вода) с целью повышения давления в пласте и облегчения выкачивания нефти. Этот метод используется, когда нефть слишком вязкая для нормального подъема, метод помогает уменьшить вязкость нефти, разогревая ее.

Эти методы могут использоваться как по отдельности, так и в комбинации, в зависимости от особенностей месторождения и состава нефти. На этапе первичной добычи добавление поверхностно-активных веществ (ПАВ) в воду, подаваемую в пласт, может помочь улучшить вытягивание нефти из пористой среды. ПАВ помогают снизить поверхностное натяжение между нефтью и водой, что облегчает отделение нефти от воды, а также увеличивает проницаемость пласта для жидкости. На поздних этапах добычи нефти закачка ПАВ помогает извлекать остаточные запасы нефти, которая не может быть выкачана с помощью воды, пара или естественного давления. Они помогают разрушить водоотталкивающие свойства нефтяных пластов, улучшая смачиваемость пористых пород водой и растворителями, что позволяет извлечь остаточную нефть. Снижение поверхностного натяжения между нефтью и водой способствует лучшему выталкиванию нефти из пор [48, с. 114].

Далее будет рассмотрено именно такое течение. К нефти будет в дальнейшем применяться индекс «1», а к водной фазе индекс «2». Давления в каждой фазе отличны. Разность фазовых давлений называется капиллярным давлением [38, с. 60].

Система уравнений двухфазной фильтрации включает:

а) закон сохранения массы для каждой фазы или уравнения неразрывности в переменных Эйлера. Эти законы описывают изменение объема каждой фазы в пористой среде с течением времени:

(1.4)

где - плотности соответственно нефтяной и водной фазы, - насыщенность фаз, - скорость нефти и воды соответственно.

б) уравнение Дарси:

Этот закон устанавливает линейное отношение между скоростью фильтрации и градиентом давления, где - коэффициент проницаемости, - коэффициенты вязкости соответственно нефти и воды, которые зависят от температуры.

«Изотермическая фильтрация позволяет считать вязкость жидкости постоянной, и эффект изменения давления на вязкость оказывается незначительным» [58].

Однако капиллярное давление зависит:

а) от насыщенности водной фазы и оказывает существенное влияние на процессы фильтрации, где - относительные фазовые проницаемости нефтяной и водной фазы, - давление нефти и воды. Относительные фазовые проницаемости зависят от градиента давления, насыщенности, капиллярных сил. Предполагается, что капиллярные силы равны:

*,*

в) граничных и начальных условий. Эти условия определяют взаимодействие системы с окружающей средой и состояние системы в начальный момент времени;

г) от фазовых переходов.

В нашем случае будет иметь место отсутствие переноса между фазами, так как рассматриваются несмешивающиеся жидкости. Плотность воды и нефти постоянны.

Неравновесность фазовых проницаемостей, как правило, связана с процессами переноса между порами в пространстве. В большинстве моделей фильтрации, учитывающих неравновесные эффекты, применяются уравнения баланса массы, импульса и энергии.

Неравновесность в моделях учитывается введением дополнительных членов в систему уравнений:

(1.7)

где - массовая концентрация примеси в нефти, - адсорбированная примесь в пористой среде. Адсорбированная примесь в пористой среде - это вещество, которое оседает на поверхности пор или частиц пористой среды в результате адсорбции. Это может быть жидкая или газообразная примесь, которая прочно удерживается в порах из-за межмолекулярных сил.

Адсорбированная примесь может влиять на физико-химические свойства пористой среды, включая её проницаемость, а также на процессы фильтрации, диффузии и транспортировки флюидов. Численные методы здесь важны, так как они позволяют моделировать и анализировать эти сложные взаимодействия. Например, при моделировании транспорта флюидов через пористую среду с адсорбцией, численные методы могут учитывать изменения в проницаемости и скорости диффузии за счет взаимодействия молекул флюида с адсорбированными частицами. Это позволяет предсказывать, как изменения концентрации адсорбированных примесей будут влиять на процессы фильтрации и транспортировки вещества через пористую среду.

Для мицеллярных растворов процесс сорбции поверхностно-активных веществ при изотермических условиях вблизи критической концентрации мицеллообразования может проявлять неоднозначные изменения.

Мицеллярные растворы представляют собой специфический тип растворов, в которых поверхностно-активное вещество образует мицеллы - структурные образования, которые обычно не наблюдаются в чистых растворах. Поверхностно-активные вещества являются основными компонентами мицеллярных растворов [59].

В мицеллярных растворах молекулы ПАВ организуются таким образом, что их гидрофильные группы обращены к воде, а их гидрофобные хвосты складываются внутри мицеллы, формируя гидрофобное ядро. Эта структура позволяет мицеллам оставаться в растворе и эффективно смачивать гидрофобные поверхности [60].

Мицеллярные растворы обладают рядом уникальных свойств. Мицеллы могут образовывать структуры, которые эффективно диспергируют грязь и загрязнения, позволяя им оставаться в растворе и быть удаленными при промывке. Мицеллы способны стабилизировать эмульсии, обеспечивая смачивание гидрофобных жидкостей, таких, как масла, водой и наоборот.

Для решения проблемы неоднозначных изменений вблизи критической концентрации, введем следующую функцию: при, при и при, где - это критическая концентрация,

- активная концентрация примеси. Тогда уравнение с этой функцией запишется в виде:

где - время релаксаций [59, с. 209]. Чтобы получить равенство в (1.8) будут использованы леммы.

**Лемма 1.1** Если - в ограничена, и , , то почти всюду в

Доказательство.

1. Предположим, что существует точка в которой
2. Рассмотрим шар , целиком содержащийся в , где выбрано так, чтобы
3. Так как то дифференцируема почти всюду в , включая .
4. Рассмотрим функцию , где
5. По условию для всех , поэтому для всех
6. Так как дифференцируема почти всюду на то существует и равно
7. Но , что противоречит тому, что для всех
8. Следовательно, предположение о существовании точки , в которой , не верно.
9. Таким образом, почти всюду в

**Лемма 1.2** Если в ограничена, игде слабо в то почти всюду в .

Построена математическая модель (1.4), (1.5), (1.7), (1.8).

Границы между подобластями могут меняться относительно градиента температуры (задача Стефана) или из-за градиента давления (задача Веригина).

Исследования, представленные в монографии Антонцева С.Н., Кажихова А.В. и Монахова В.Н. [37, с. 240], показывают, что в данном случае модель приводится к вырождающейся системе дифференциальных уравнений при равенстве нулю относительных фазовых проницаемостей.

Это обстоятельство приводит к сложностям в определенном роде, которые связаны с постановкой граничных условий, а также при численной реализации данной модели.

**1.2.2 Постановка задачи. Существование, устойчивость и единственность решений**

Будем рассматривать математическую модель неравновесной фильтрации, которая описывает процесс вытеснения нефти с использованием полимерных растворителей. Полимерные растворители - это вещества, которые используются для растворения полимеров и создания полимерных растворов. Эти растворители могут быть как органическими, так и неорганическими жидкостями, способными расщеплять или растворять полимеры, образуя однородную жидкую систему. Полимерные растворители играют важную роль в различных технологических процессах, включая нефтедобычу, где они часто применяются для улучшения вытеснения нефти из пористых резервуаров.

Полимерные растворители могут воздействовать на текучесть раствора, изменяя вязкость и улучшая проникающую способность полимерных растворов в пористые среды.

Граница разбивается на несколько связных компонент , то есть граница в окрестности нагнетательной скважины, – граница в области, где происходит сорбция (нефтяная фаза), граница в окрестности эксплуатационной скважины. . Пусть - область, – границы области, n – нормаль к границе.

Систему уравнений классической модели Маскета-Леверетта:

дополним уравнением диффузии:

и кинетическим уравнением:

где - пористость, - коэффициент абсолютной проницаемости, - насыщенность фазы, - скорость фильтрации, - внешняя сила, - давление.

Гидрофильная среда - это среда, которая имеет высокую склонность к взаимодействию с водой. Такие среды обладают свойством хорошо растворять воду или впитывать её, благодаря наличию в своей структуре полярных групп или молекул, которые образуют водородные связи с молекулами воды.

Гидрофильная среда может иметь повышенную способность удерживать воду, что важно в процессах фильтрации, адсорбции или при взаимодействии с водными растворами. Гидрофильность также влияет на такие свойства материалов, как смачиваемость, адсорбция и транспортировка жидкости внутри пор.

Система (1.9) - (1.12) является исходной рассматриваемой системой.

Функция Хевисайда при ,при и при

Функция характеризует параметр растворения поверхностно-активных веществ; если - приведенное давление.

Приведённое давление - это давление, скорректированное с учётом влияния внешних факторов, таких как температура, состав среды или другие физические условия. Приведённое давление обозначает давление, приведённое к определённым стандартным условиям (например, к нормальным условиям температуры и давления). Это позволяет учитывать изменения, вызванные изменением температуры или других переменных, при сравнении различных систем или ситуаций.

Приведённое давление будем использовать для учета изменений плотности флюидов (нефти, воды) при изменении температуры, и в дальнейшем оно поможет в анализе процессов фильтрации и транспорта в пористых средах.

Коэффициенты из (1.9) и (1.10) определяются из отношений:

Таким образом, необходимо найти следующие функции - водонасыщенность, - давление, - скорость течения, - концентрацию примеси, - функцию адсорбции, которые определены в области при следующих начальных условиях:

и граничных условиях:

а) условие непротекания:

б) условие концентрации:

где – известная концентрация примеси.

**Определение.**  *Обобщенным решением задачи (1.9) - (1.12) являются ограниченные измеримые в области функции  
если они удовлетворяют условиям:*

*а) на выполняются граничные условия (1.15),*

*б)*

*в) почти всюду в области ,*

*г) для функций таких, что:*

*,*

*при выполняются следующие равенства:*

(1.16)

(1.16) - (1.18) – есть обобщенное решение задачи (1.9) - (1.12), с начальными условиями (1.14) и граничными условиями (1.14) - (1.15).

Существование решения.

Аппроксимируем функцию с помощью непрерывных монотонных функций , которые совпадают с при

С помощью теоремы Шаудера получаем:

+

при где

**Теорема 1.1** *Если коэффициенты в системе уравнений (1.9) - (1.12) имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка, и при этом выполняется следующее условие:*

*- измеримая функция, тогда существует одно обобщенное решение задачи (1.9) - (1.12), и функции удовлетворяют почти всюду в области следующим неравенствам:*

Доказательство.Приближенные решения для функций находятся в виде:

где нормированы системы функций:

в ( где - символы Кронекера.

В этом случае получаем:

(1.26)

в этой системе:

,

где - ортонормированные функции.

Задача (1.25) - (1.27) разрешима, так как были сделаны предположения на , т.е. они ограничены, а функции - интегрируемые по для всех значений

Можно выделить некоторую подпоследовательность , такую, что почти всюду в нашей области :

слабо в

,

слабо в

Из сходимости к  почти всюду в и определения функции следует, что почти всюду в , и также из леммы 2 следует, что на множестве функция .

Теорема доказана.

**Теорема 1.2** *Если**выполнены условия а) - г) из определения и граница принадлежит пространству то при являются обобщенным решением задачи (1.3) - (1.6) с начальными и граничными условиями (1.7) - (1.8). Для этих решений выполняется следующее неравенство:*

*Для разностей решений в этом случае выполняются оценки*:

*где*

*– положительные константы.*

Рассмотрим два решения системы уравнений и с начальными условиями и воспользуемся свойствами этих коэффициентов. Подставив начальные условия в систему уравнений, видим, что каждая переменная ограничена на некотором компакте в пространстве и времени.

Разность решений данной системы с начальными условиями обозначим, как, которая удовлетворяет уравнению Липшица.

Пусть начальные условия для этих решений также равны нулю:

Подставим разности решений в систему уравнений (1.9) - (1.12). Для уравнения водонасыщенности получим:

Аналогично для других уравнений системы.

Используем ограниченность решения в пространстве и времени, что означает, что все разности ограничены на компакте. В частности, можно утверждать, что существуют такие константы такие, что:

Для доказательства единственности воспользуемся уравнением Липшица. Уравнение Липшица предполагает, что существует постоянная , такая что: ,

поскольку начальные условия для разностей решений равны нулю:

Таким образом, разности решений равны нулю на всем интервале времени, что означает, что

Следовательно, решение данной системы уравнений с условиями единственно. Разность решений при нулевых начальных данных остается равна нулю, и, как следствие, любое решение этой системы с заданными начальными условиями является единственным.

Таким образом, рассмотрена математическая модель изотермической фильтрации, то есть модель, в которой процесс или явление рассматриваются при постоянной температуре. В таких моделях температура не изменяется с течением времени, что упрощает расчёты и позволяет сосредоточиться на других факторах, например, на давлении, концентрации или скорости реакции. Исследована корректность математической модели, доказано существование, единственность, устойчивость решений.

При решении задача разбивается на три подобласти и решаются три автономные задачи. Эта модель стала основой для разработки более сложной модели, так как доказательство корректности исходной изотермической модели позволило использовать ее как основу для разработки более сложных моделей.

Установлено, что система уравнений Маскета-Леверетта, дополненная уравнением диффузии и кинетическими соотношениями, позволяет описать процессы в пластах при добавлении активной примеси; установлены достаточные условия существования и единственности решения, доказана устойчивость решений. Обосновано, что задача разбивается на три автономные подзадачи.

**1.3 Качественные свойства решения задачи изотермической фильтрации несмешивающихся жидкостей**

В разделе будет рассмотрен предельный переход при .

Между фазами образуется фронт, который является границей между ними. Граница может меняться в зависимости от условий фильтрации и характеристик среды, в процессе фильтрации несмешивающихся жидкостей устанавливается динамическое равновесие между движущимися жидкостями и пористой средой.

Это равновесие определяет скорость фильтрации и распределение давления и насыщенности в среде.

Пусть - единичная функция Хевисайда, - пространство функций, которые определены в , и имеют норму:

Будем исследовать функции , которые удовлетворяют исходным уравнениям, начальным и граничным условиям:

,

где ), и Пусть

**Теорема 1.3** *Для решения регуляризованной задачи действуют следующие оценки*:

,

,

*при*  *а константы зависят только от и .*

**Теорема 1.4** *Если выполняется при то имеет место при*

Доказательство.

Из условия при получаем, что и . Поэтому, . Предположим, что - обобщенное решение задачи Стефана:

где

Определим подпоследовательность такую, что слабо в и слабо в слабо в . Тогда после предельного перехода получается, что выполняется и, следовательно, является обобщенным решением задачи Стефана в силу единственности решения, что и требовалось доказать.

Таким образом, получено, что найденное решение стремится к обобщенному решению задачи Стефана. В изотермической фильтрации подвижные границы отсутствуют, но при малых релаксациях изотермическая система начинает вести себя как неизотермическая. Задача Стефана описывает фазовые переходы. Таким образом, решение исходной задачи изотермической фильтрации переходит в решение задачи Стефана. При изотермическая система быстро реагирует на изменения, переходы между фазами происходят почти мгновенно и система начинает вести себя как неизотермическая система.

Установлены условия, при которых решение задачи неравновесной изотермической фильтрации стремится к обобщённому решению задачи типа Стефана.

**1.4 Приближенные методы решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации**

Уравнения неразрывности для каждой из фаз:

где - соответственно фазовые объемные расходы скорости фильтрации, давления, плотности и насыщенности, причем - вектор ускорения силы тяжести; - пористость среды; - тензоры фазовой проницаемости; - относительные фазовые проницаемости; - коэффициенты вязкости фаз.

Относительные фазовые проницаемости характеризуют способность пористой среды пропускать различные фазы при многокомпонентной фильтрации. Эти проницаемости зависят от того, какая фаза в данный момент является доминирующей в пористой среде и какие фазы находятся в сосуществовании.

Относительная проницаемость каждой фазы определяется как отношение фактической проницаемости этой фазы в присутствии других фаз к её проницаемости в случае, если эта фаза была бы единственной в пористой среде. Другими словами, она отражает способность каждой фазы проходить через пористую среду, учитывая присутствие других фаз, и зависит от насыщения [61-64].

В случае несжимаемости жидкости считается, что и давления отличаются на величину капиллярного давления:

Уравнения (1.28), (1.29) - замкнутая система относительно функций . Приведенное давление будем рассматривать в качестве новой искомой функции:

Далее примем следующие обозначения:

,

Относительно получаем новую систему уравнений:

(1.30)

(1.31)

Постановка задачи.

Из (1.31) получаем для следующих функций

Рассмотрим в заданной ограниченной области с кусочно-гладкой границей фильтрационное течение. Пусть область , - это внешняя нормаль к границе .

Как было указано выше, граница области разбивается на три связных компоненты , то есть - граница в окрестности нагнетательной скважины, - граница в области, где происходит сорбция, то есть нефтяная фаза, - граница в окрестности эксплуатационной скважины.

Тогда условия для жидкостей таких, как вода и нефть, на эквивалентны следующим тождествам:

=()

На можно также задавать отсутствие некоторого потока вытесняемой фазы:

в этом случае суммарный расход будет:

Давление вытесняемой фазы можно записать в виде:

В этом случае сложной задачей будет определение краевого условия на границе Можно предположить, что на границе до момента прорыва можно задать отсутствие потока вытесняющей жидкости, как в случае с (1.34), (1.35) и тогда суммарный расход смеси равен:

=

При этом должно выполняться следующее соотношение, которое обеспечивает корректность математической модели и вытекает из (1.33), а именно:

Таким образом, также задаем относительно функции насыщенности начальное условие:

Приближенные решения задачи (1.32) - (1.33) будем строить на основе вариационного принципа.

Пусть - разбиение отрезка [0, T]:

=T, (1.39)

где минимизирует следующий функционал:

где *.*

Функцию по времени обозначим:

Для нахождения приближенного решения используем систему функций:

Рассмотрим далее следующую последовательность:

в которой задает направление; - длина шага по направлению

Условие для остановки создания релаксационной последовательности рассматривают в следующем виде:

условие, определяющее функцию:

Далее строим минимизирующие последовательности такого вида:

В силу соотношений (1.43) - (1.47) справедлива следующая теорема:

**Теорема 1.5** *Если предел последовательности при существует и не зависит от выбранного метода разбиения отрезка [0, T], и этот предел является решением нестационарной задачи, то справедлива следующая оценка:*

Функционалы (1.41) представим в виде:

Теорема устанавливает существование предела последовательности, независимого от метода разбиения отрезка и дает оценку для решения нестационарной задачи.

**Теорема 1.6** *Если утверждение теоремы 1.5 справедливо и градиенты функционала по отличны от 0, то справедливо равенство:*

Таким образом, представлено решение задачи неизотермической фильтрации с учетом массообмена приближенным методом решения на основе вариационного принципа, связь между изменением распределения температуры и массообмена представлена в теореме 1.6.

**1.5 Качественные свойства решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации**

Задача Стефана с учетом конвективного теплопереноса возникает в рамках исследования теории неизотермической фильтрации.

Неизотермическая фильтрация - это процесс фильтрации, в ходе которого изменяется температура фильтруемой среды. В отличие от изотермической фильтрации, при которой температура остается постоянной, при неизотермической происходит изменение температуры в процессе фильтрации.

Система находится в термодинамическом равновесии, если она удовлетворяет двум условиям: механическое равновесие, то есть давления всех компонентов системы равны друг другу [65, с. 47]. Это означает, что нет ни спонтанных движений частиц внутри системы, ни перетекания частиц между её частями без внешнего воздействия. Это означает, что тепловые свойства системы остаются постоянными.

Конвективный перенос тепла - это процесс передачи тепла в среде или между средами в результате движения самой среды. Он основан на переносе энергии от одной области к другой за счет перемещения нагретых или охлажденных частиц среды.

Процесс конвективного переноса тепла происходит в жидких и газообразных средах и играет важную роль в теплообмене. Он может происходить по нескольким механизмам:

а) свободная конвекция, в этом случае движение среды происходит из-за разницы в плотности в результате неравномерного нагрева. Горячая часть среды становится менее плотной и поднимается, а холодная - более плотная и опускается, что приводит к циркуляции;

б) принудительная конвекция, возникающая при наличии внешнего источника энергии, который непосредственно воздействует на среду и вызывает ее движение. Примерами являются вентиляторы или насосы, которые создают поток воздуха или жидкости;

в) турбулентная конвекция, которая происходит в результате турбулентного движения среды, возникающего из-за нестабильности потоков и хаотического перемешивания. Турбулентная конвекция может существенно усилить теплообмен в системе [66, с. 46].

Кристаллизация вязкой нефти - это процесс, при котором компоненты нефти образуют кристаллические структуры при низких температурах. Этот процесс может происходить во время транспортировки, хранения или обработки нефти, особенно если она содержит высокие доли парафинов, а также других компонентов, которые могут кристаллизоваться при пониженных температурах.

Кристаллизация вязкой нефти может вызвать различные проблемы, такие как забивание трубопроводов, насосов и оборудования, что может привести к снижению производительности и повреждению оборудования. Для предотвращения этих проблем применяют различные методы, включая нагревание нефти, использование специальных присадок или добавок, изменение условий транспортировки и т. д.

В процессе извлечения нефти из пористых и неоднородных пластов важную роль играет движение воды. Оно способствует проникновению жидкости в малопроницаемые зоны коллектора, где нефть остается в остаточной фазе. Вода обладает большей смачивающей способностью по сравнению с нефтью, что облегчает ее распространение в породах. Однако в некоторых условиях поверхность породы может становиться гидрофобной из-за адсорбции содержащихся в нефти активных веществ. Это приводит к снижению капиллярного впитывания воды и уменьшает эффективность извлечения нефти.

Гидрофобность - это свойство материала отталкивать воду или не вступать с ней в значительные взаимодействия. Гидрофобные материалы плохо смачиваются водой, и вода на их поверхности образует капли, не растекаясь. Это поведение связано с низким уровнем адгезии между молекулами воды и молекулами гидрофобной поверхности. Гидрофильность - это свойство материала притягивать воду и легко с ней взаимодействовать. Гидрофильные материалы хорошо смачиваются водой, и вода на их поверхности распространяется, образуя тонкую пленку. Это поведение связано с высокой адгезией между молекулами воды и молекулами гидрофильной поверхности [28, с. 51].

Тем не менее, одним из методов увеличения нефтеотдачи является присоединение к закачиваемой воде поверхностно-активных веществ (ПАВ). Они адсорбируются на поверхности, делают породу гидрофильной [66, с. 96].

**1.5.1 Кинетика установления термодинамического равновесия**

Допустим, что параметры двухфазной системы заполняющей проточную компоненту гетерогенной среды, а именно водонасыщенность, температура, концентрация активной примеси в водной фазе фиксированы. Значения, относящиеся к проточной компоненте, будем отмечать индексом «1». Индексы (1) и (2) указывают на взаимосвязь с состояниями или условиями другой компоненты среды.

Через определенное время, в среде установится термодинамическое равновесие. Это означает, что в емкостной компоненте установятся значения термодинамических параметров: .

Эти величины согласно общим принципам термодинамики связаны с условием равенства химических потенциалов фаз в проточной и емкостной компоненте среды.

В частности, температуры должны быть равны: , и равны концентрации активной примеси: .

Водонасыщенность определяется из условия равенства давлений водной и нефтяной фазы в проточной и емкостной компоненте среды:

(1.50)

так что

где - это капиллярное давление в проточной компоненте среды, описывающее ее текущее состояние; - капиллярное давление в емкостной компоненте, определяемое равновесными условиями с проточной компонентой; - капиллярное давление в проточной компоненте, соответствующее равновесным условиям емкостной компоненты;- капиллярное давление в емкостной компоненте среды. Получается, что капиллярные давления в проточной и емкостной компоненте среды должны быть равны.

При известных параметрах таких, что

и (1.51)

из уравнений равенства давлений (1.50) можно определить , эти уравнения выражают условие капиллярного равновесия.

Если капиллярное давление в проточной компоненте среды пренебрежимо мало, уравнение для отыскания принимает более простой вид:

(1.52)

Обозначим равновесное значение водонасыщенности в емкостной компоненте среды, то есть решение уравнения (1.32) как:

(1.53)

В случае отсутствия таких активных факторов, как примесь и температура, равновесное значение водонасыщенности равно:

(1.54)

где - начальная температура пласта.

Разность характеризует возможный прирост нефтеотдачи из проточной компоненты среды под действием активной примеси и температуры.

Установление термодинамического равновесия между проточной и емкостной компонентами среды происходит посредством процессов капиллярной пропитки, теплопроводности и диффузии [67, с. 66].

При этом капиллярный массоперенос сопровождается переносом тепла и примеси, а температура и примесь, в свою очередь, оказывает влияние на капиллярное впитывание. Таким образом, задача о тепло- и массопереносе может быть решена только численно [68].

Однако имеются частные случаи, когда задача допускает существенное упрощение. Например, в изотермическом случае. Тогда принципиально отличными являются случаи гидрофильного и гидрофобного пласта.

В гидрофильном пласте при обычном соотношении параметров процесс капиллярной пропитки является более быстрым, чем процесс диффузии. Это приводит к тому, что капиллярная пропитка идет таким же образом, как и в отсутствие активной примеси [69-71].

Пусть - характерное время капиллярной пропитки. В случае в первом приближении распределение капиллярного давления по объему емкостной компоненты может быть принято равномерным. При этом активная примесь заполняет лишь внешнюю (прилегающую к проточной компоненте) часть объема емкостной компоненты среды. Это состояние так же является неравновесным, и начинается вторая стадия процесса - установления диффузионного равновесия.

На этой стадии капиллярное давление по всему объему емкостной компоненты среды постоянно, а распределение насыщенности подстраивается к распределению концентрации. В случае гидрофобного пласта стадия ведущей капиллярной пропитки отсутствует; идет одностадийный процесс диффузии с подтягиванием за диффузионной зоной области пропитки. Поступление примеси происходит с отставанием, определяемым условиями баланса примеси в проточной компоненте среды.

Пусть - время отставания примеси. Дальнейший ход решения существенно зависит от того, каково соотношение между и.

При проникновение примеси в емкостную компоненту среды идет по конвективному механизму, и за период на граничной части емкостной компоненты среды образуется слой с концентрацией примеси .

Общее количество примеси, поступившее в емкостную компоненту среды на этой стадии, составляет:

(1.55)

В единице объема емкостной компоненты содержатся примеси, так что:

(1.56)

Дальнейшее продвижение примеси в емкостную компоненту среды происходит благодаря диффузии. Для исследования кинетики этого процесса при очевидных упрощающих допущениях приходим к задаче:

(1.57)

Вывод задачи.

Имеем систему дивергентных уравнений:

Удельная внутренняя энергия - это термодинамическая величина, характеризующая количество внутренней энергии, приходящейся на единицу массы вещества. Внутренняя энергия включает кинетическую энергию движения молекул и потенциальную энергию взаимодействия молекул [56, с. 68].

Предельные значения указанных функций удовлетворяют соотношению:

уравнение (1.58) эквивалентно:

Пусть - произвольная область содержащая , и:

где - часть поверхности *Г*.

Воспользуемся вышеуказанными обозначениями и из (1.58) получим следующее уравнение:

– скорость фильтрации, – температура, – коэффициент теплопроводности.

Для простоты ограничимся случаем одной пространственной переменной. Уравнение (1.62) эквивалентно уравнению:



а в области - уравнению в общем случае, то есть при

и функции *, U* в соответствующих замкнутых областях обладают непрерывными производными, входящими в уравнения (1.63) и (1.64).

Из (1.58) получим следующие соотношения:

где - расход смеси через границу, - скрытая теплота фазового перехода, - функция, описывающая состояние системы на границе, - коэффициент теплопроводности твердой фазы, - коэффициент теплопроводности жидкой фазы, - поток тепла через границу со стороны твердой фазы, - поток тепла через границу со стороны жидкой фазы.

Этих условий совместно с начальными условиями на границах недостаточно для замыкания математической модели. Необходимы дополнительные условия. Исследуем возникновение переходной фазы, когда:

Оказывается, в этом случае при определенных условиях на данные задачи краевые условия (1.65) или (1.66) распадаются на два независимых условия, а сама исходная задача - на последовательное решение трех автономных задач. По предположению температура неположительна в области

равной нулю на ее правой границе.

Следовательно,

аналогично,

В переходной фазе удельная внутренняя энергия принимает значения из интервала т.е.

Сравнивая (1.66) с (1.69) и (1.70), видно, что:

Далее, сравнивая (1.65) с (1.68) и (1.70), видно, что:

Тогда из (1.67) следует, что, по крайней мере, на малом интервале времени:

Предположим обратное, пусть:

В силу (1.65), (1.68) и (1.70) последнее неравенство возможно, если только:

кроме того, из (1.66), (1.69) и (1.70) неравенство (1.74) справедливо при:

Для того чтобы узнать, когда какой вариант реализуется, продифференцируем равенство по времени:

Если выполняются соотношения (1.75), то из второго уравнения (1.75), последнего равенства и уравнения (1.63) следует, что:

Для функции при каждом фиксированном при справедливо неравенство:

Учитывая последние два соотношения и строгую отрицательность температуры при видим, что первый вариант (1.75) реализуется при

В вышеуказанной постановке получены теоремы существования и единственности, а также изучены качественные свойства решений. Указаны достаточные условия существования и единственности решения задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом.

**1.5.2** **Асимптотическое поведение по времени решения задачи типа Стефана**

Пусть в начальный момент времени вода заполняет область , а область занята нефтью.

В области температура удовлетворяет следующему уравнению:

, (1.77)

и двум условиям на свободной границе:

(1.79)

в начальный момент времени:

(1.80)

- функция от температуры, связанная с плотностью внутренней энергии, - коэффициент скорости конвективного движения.

**Теорема 1.7** *Если , то задача (1.77) - (1.80) с данными при , имеет единственное решение:*

*с функцией непрерывно зависящей от параметра и при*

Доказательство. Функция , параметр будем находить из локальных условий на границах фаз в условиях переходной зоны:

(1.81)

(1.82)

(1.83)

Для любого найдется , которая удовлетворяет уравнению (1.81) и заданным краевым условиям (1.82), (1.83).

Далее, вычислив в точке производную и подставив ее в левую часть (1.83), получим уравнение, решение которого  определяет решение поставленной задачи (1.81) – (1.83).

Для определения функции рассмотрим линейную краевую задачу:

решение V(ζ) зададим формулой:

Правая часть в (1.84) - это непрерывный оператор который определен на выпуклом замкнутом множестве:

Из того, что производные равномерно ограничены, то следует, что:

,

где по теореме Шаудера найдется хотя бы одна неподвижная точка *V* оператора такая, что

Функция будет удовлетворять (1.81) и (1.82), тогда уравнение имеет хотя бы одно решение так как для справедливо некоторое представление, которое аналогично (1.84).

Можно вывести:

Найдено решение в автомодельных функциях.

Единственность решения докажем из того, что функция припри , будет единственным ограниченным обобщенным решением задачи Стефана с конвективным переносом тепла.

Уравнение (1.81) умножим на и интегрированием по частям в пределах от 0 до *D\** с использованием условий (1.82) и (1.83) получим:

Равенство, которого подтверждает непрерывную зависимость от параметра.

При исследовании асимптотического поведения решения исходной задачи ограничимся случаем, когда:

**Теорема 1.8** *Если выполнены условия теоремы 1.7, а также условия (1.86) с то для решения задачи (1.77) - (1.80) будет справедливо равенство:*

*где - решение задачи (1.81) - (1.83).*

Доказательство.

Для оценки решения снизу фиксируем произвольно положительно малое число и пусть настолько большое, что:

при

Функция) определяет обобщенное решение которое не превосходит функцию на границе и функцию , равную , которая является собственным решением задачи (1.77) - (1.80) и совпадает с функциями и соответственно при и при , то можно воспользоваться теоремой о сравнении обобщенных решений задачи (1.77) - (1.80), и утверждать, что:

Для оценки функции сверху воспользуемся тождеством:

где

Оценим снизу с помощью неравенств (1.88) и получим:

Для второго слагаемого оценка сверху в (1.89) проводится следующим образом:

где

С другой стороны по теореме о среднем имеем:

, где .

Следовательно, получаем:

(1.90)

Далее воспользуемся тем, что при достаточно большом и В этом случае (1.90) ограничим сверху:

где

Применяя тождество (1.85), а также неравенство (1.91), имеем:

(

Переходя в последнем соотношении к пределу при , получим:

С другой стороны, из (1.91) следует, что:

Последние два неравенства, непрерывность функции и произвольный выбор величины доказывают утверждение теоремы.

Конвекция может ускорять или замедлять фазовый переход, изменяя скорость движения границы раздела фаз Построение этой математической модели - актуальная задача для нефтедобычи. Изменения температуры в пластах, например при интенсификации добычи нефти могут приводить к фазовым изменениям нефти, таким как кристаллизация.

Таким образом, положение свободной границы между жидкостью и твердой фазой и распределение температуры внутри каждой фазы могут быть описаны автомодельными функциями, и такие решения существуют и единственны.

В разделе также исследовано асимптотическое поведение решения задачи с учетом конвекции, то есть как скорость изменения фазы меняется с течением времени. Это полезно для прогнозирования стабильности фронта фазового перехода и для оценки влияния параметров среды и начальных условий на процесс теплопереноса в системе. Получены асимптотические оценки движения границы фазового перехода.

**2 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С УЧЕТОМ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ**

**2.1 Численное исследование в автомодельных переменных**

**2.1.1 Задача неравновесной неизотермической фильтрации**

В нефтедобыче капиллярное равновесие играет важную роль, особенно при извлечении нефти из пористых горных пород. Это происходит в контексте многофазных систем, где вода, нефть и газ находятся в поровом пространстве горных пород. Капиллярные силы играют важную роль в перемещении нефти через поровое пространство, позволяя ей проникать в пористую среду и заполнять поры и трещины. Вода также может двигаться через поровое пространство под воздействием капиллярных сил. В многофазных системах капиллярное действие может способствовать продвижению воды. Капиллярное равновесие важно для установления границы между различными фазами (нефтью, водой и газом) в горных породах [72 - 75].

Это помогает определить, какая фаза будет преобладать в определенных частях пласта, а также влияет на процессы миграции и добычи. Понимание и управление капиллярным равновесием важно для оптимизации процессов добычи нефти. Это включает в себя выбор оптимальных методов и технологий добычи, а также оценку потенциального выхода нефти из месторождений.

Следующая система уравнений демонстрирует, что выполняется условие термодинамического равновесия:

(2.1)

(2.2)

(2.3)

*,* (2.4)

(2.5)

(2.6)

(2.8)

(2.9)

(2.10)

, в зависимости от того к какой фазе относится, условились, что 1- это водная фаза, 2 - нефтяная фаза.

Так как исследуется процесс неизотермической фильтрации, вводится параметр «количество теплоты». Он характеризует уровень теплового обмена, возникающего из-за изменений температуры в пористой среде в ходе фильтрации:

(2.11)

здесь - это коэффициент теплопроводности, а - это температура, - конвективный перенос тепла. Его можно определить следующим образом:

(2.12)

где - суммарный объем двух фаз,  и  - это объемные теплоемкости воды и нефти.

Если - это объемная теплоемкость пористого грунта. Количество тепла в каждой фазе меняется по следующим законам:

(2.13)

Cоотношения (2.11) - (2.13) позволяют получить соотношение для баланса тепла:

+ (2.14)

где

(2.15)

(2.16)

(2.17)

где - это температуропроводность.

Температуропроводность - физическая величина, характеризующая способность вещества проводить тепло. Она определяет, насколько быстро тепло может распространяться через материал при заданном температурном градиенте [66, с. 285].

Вязкости водной и нефтяной фаз относительные фазовые проницаемости коэффициенты переноса и , капиллярное давление могут также зависеть от таких параметров, как концентрация закачиваемой примеси и ее температуры, поэтому получаем:

(2.18)

(2.19)

(2.20)

(2.21)

(2.22)

Уравнения (2.1), (2.2) и (2.14) с учетом зависимостей (2.18) - (2.22) и есть система уравнений, которая в дальнейшем будет исследована.

* + 1. **Постановка задачи**

Задача о капиллярной пропитке относится к области исследований в теории фильтрации, где изучается процесс распространения жидкости через пористую среду под воздействием капиллярных сил.

Перейдя к одномерной модели получаем:

(2.23)

(2.24)

(2.25)

(2.26)

+ (2.27)

(2.28)

В задаче о капиллярной пропитке в неизотермических условиях учитывается изменение температуры в пористой среде в процессе пропитки.

Учитывая, что имеется неизотермическая фильтрация, добавим к (2.23) - (2.28) уравнение баланса (2.14) и уравнения (2.15) - (2.17), поэтому получаем:

(2.29)

(2.30)

(2.31)

Данная система (2.23) - (2.27) описывает процесс, который подвергается исследованию.

Пласт считается невозмущенным при начале процесса. Граничные условия определяют взаимодействие пористой среды с внешней средой. В случае рассматриваемого невозмущенного пласта они включают условия на границах пласта, то есть условия непроницаемости или условия потока для границ, на которых происходит взаимодействие с другими слоями пористой среды или с окружающими системами:

(2.32)

(2.33)

При описании взаимосвязи между тепловыми и фильтрационными процессами в пористой среде используем автомодельную переменную где *,* а решение задачи будет в таком виде система уравнений (2.23) - (2.31) будет в дальнейшем приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида:

(2.34)

)

,

где - характерное значение капиллярного давления.

Краевые условия будут иметь вид:

(2.35)

(2.34) упростим, так как - коэффициент диффузии считается малым в сравнении с температуропроводностью и получим:

При данных краевых условиях (2.35) решение для будет иметь вид ступенчатой функции:

c=0,

, - это непрерывные функции, и при скачок концентрации будет сопровождаться скачком насыщенности. В этом случае будут иметь место условия на скачке:

Если будет выполняться вариант, что не зависит от , тогда из (2.37) следует, что на скачке концентрации примеси непрерывно, а разрыв терпит производная [76].

В дальнейшем будут применены модельные зависимости для .

Относительные фазовые проницаемости, а также капиллярное давление примут вид:

*.*

Вязкость воды и нефти:

где и - постоянные. В расчетах: Дарси, сПз, , объемные теплоемкости: кДж/, кДж/, коэффициент теплопроводности Вт/мС [77] соответственно.

Система уравнений (2.36) решается методом дифференцирования по времени, то есть проводится анализ стабильности вычислений границы раздела фаз.

Правильный выбор сетки позволяет достигнуть оптимального баланса между точностью и вычислительной эффективностью численного решения. Дискретизация расчетной области или сетка по пространственной переменной равномерная. Шаг по времени - выбирается из условия соблюдения устойчивости конечно - разностной схемы.

Сетка по пространственной переменной в численных методах представляет собой дискретизацию расчетной области на конечное число узлов или ячеек, которые используются для вычисления значений функции или решения дифференциальных уравнений.

От выбора сетки зависят как точность, так и вычислительная эффективность решения. Система уравнений, аппроксимирующая (2.36):

.

Капиллярное давление в системах с активной примесью может быть аппроксимировано различными способами в зависимости от конкретной физической модели и условий задачи.

В общем случае, когда капиллярное давление изменяется из-за наличия активной примеси, можно описать эту зависимость с помощью следующего уравнения, где учитывается влияние примеси на капиллярные явления:

. (2.41)

Краевые условия аппроксимируются в виде:

Критерием устойчивости в контексте численных расчетов с разными шагами по пространственной переменной было условие, при котором наблюдалось достаточно малое «размазывание» фронтов концентрации при использовании явной уголковой схемы.

Положение границы изменялось менее заметно при увеличении числа конечных элементов с 50 до 100, наблюдаемое численное решение практически не изменялось. Это указывает на достаточную пространственную разрешающую способность сетки при 100 узлах. Результаты для различных чисел узлов показаны в таблице 1.

В таблице указаны значения фронта концентрации и позиция фронта для разного количества узлов. Средняя ошибка между результатами для разных чисел конечных элементов сначала уменьшается при увеличении числа элементов, затем, хотя немного и увеличивается, но все же остается в пределах небольших колебаний, что может указывать на стабилизацию.

Таблица 1– Позиция фронта для различного количества узлов

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Время, t | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
| 0.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 0.1 | 0.2000 | 0.1995 | 0.1990 | 0.1988 | 0.1987 | 0.1986 | 0.1986 | 0.1985 | 0.1985 | 0.1985 |
| 0.2 | 0.2050 | 0.2045 | 0.2040 | 0.2038 | 0.2037 | 0.2036 | 0.2035 | 0.2035 | 0.2035 | 0.2035 |
| 0.3 | 0.2100 | 0.2095 | 0.2090 | 0.2088 | 0.2087 | 0.2086 | 0.2086 | 0.2085 | 0.2085 | 0.2085 |
| 0.4 | 0.2150 | 0.2145 | 0.2140 | 0.2138 | 0.2137 | 0.2136 | 0.2136 | 0.2135 | 0.2135 | 0.2135 |
| 0.5 | 0.2200 | 0.2195 | 0.2190 | 0.2188 | 0.2187 | 0.2186 | 0.2186 | 0.2185 | 0.2185 | 0.2185 |
| 0.6 | 0.2250 | 0.2245 | 0.2240 | 0.2238 | 0.2237 | 0.2236 | 0.2236 | 0.2235 | 0.2235 | 0.2235 |

Критерием установления являлось условие:

В расчетах значение

Уравнения, связанные с насыщенностью и температурой, сходятся (достигают установившегося режима) значительно быстрее, чем уравнения, описывающие концентрацию. Для экономии машинного времени можно сформулировать критерий (2.43) следующим образом:

После достижения необходимой точности можно ограничиться вычислением нескольких временных шагов только для уравнения концентрации до тех пор, пока не будет выполнено условие установления:

При этом значения , удовлетворяющие условию (2.44), считаются фиксированными.

Условие устойчивости разностной схемы:

Значение временного шага для вычисления следующего -го временного слоя выбирается таким образом [80], чтобы обеспечить выполнение

условия равенства или баланса между точностью численного решения и вычислительной эффективностью:

Это обеспечивает устойчивость численной схемы. Капиллярное давление задано следующим образом:

При капиллярном давлении, которое не зависит от концентрации при, скачок концентрации сопровождается скачком при скачок концентрации сопровождается скачком насыщенности .

Пример 1. Исследуем одномерное распределение насыщенности жидкости в пористой среде длиной . Исходные данные приведены в таблице 2.

Таблица 2– Исходные данные

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Параметр | Обозначение | Значение |
| Длина области |  | 1 |
| Число узлов по пространству |  | 100 |
| Число временных шагов |  | 500 |
| Пространственный шаг |  | 0.01 |
| Временной шаг |  | 0.001 |
| Коэффициент насыщенности |  | 0.01 |
| Параметр фильтрации |  | 0.005 |
| Начальная водонасыщенность |  | 1.0 |

Численное моделирование проведено описанным выше методом конечных разностей. В таблице 3 представлены изменения водонасыщенности вдоль длины области на различных временных этапах.

Таблица 3– Изменение водонасыщенности во времени (частичное представление данных)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Время | Насыщенность в центре области | Насыщенность у правой границы ) |
|  | 1.000 | 1.000 |
|  | 0.960 | 0.950 |
|  | 0.965 | 0.890 |
|  | 0.900 | 0.850 |
|  | 0.850 | 0.780 |

На начальном этапе водонасыщенность остается высокой, но постепенно снижается вдоль области. Фронт водонасыщенности перемещается в правую сторону, демонстрируя эффект фильтрации жидкости через пористую среду. Снижение водонасыщенности связано с уменьшением капиллярного давления, что подтверждает корректность численного метода [приложение В].

Изменение границы относительно водонасыщенности, концентрации, давления и температуры приведены на рисунках 1-8. В соответствии с рисунком 1 фронт водонасыщенности изменяется с течением времени.

Водонасыщенность уменьшается, что указывает на фильтрацию жидкости из пористой среды. Максимальное значение водонасыщенности наблюдается в начале процесса фильтрации, что связано с капиллярным давлением, способствующим продвижению жидкости через пористую среду.

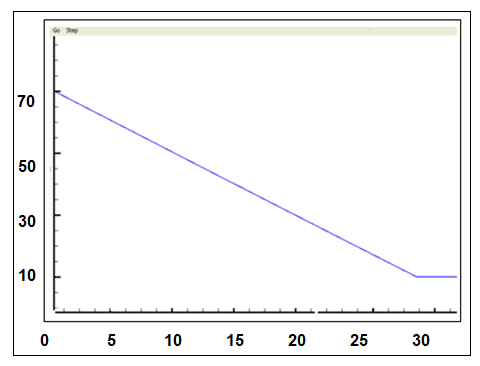


Рисунок 1 – Фронт водонасыщенности

Это соответствует процессу фильтрации, при котором вода уходит из пористой среды по мере того, как процесс распространяется в пространстве и времени. Падение водонасыщенности свидетельствует о снижении капиллярного давления и движении жидкости из пористой среды. Это важный показатель эффективности процесса фильтрации [приложение В].

В соответствии с рисунком 2 фронт водонасыщенности продвигается по мере увеличения времени, показывая, как вода заполняет поры среды [78].

Этот результат важен для оценки скорости процесса фильтрации и может быть полезен при проектировании технологических процессов, таких как нагнетание воды в нефтяные пласты.

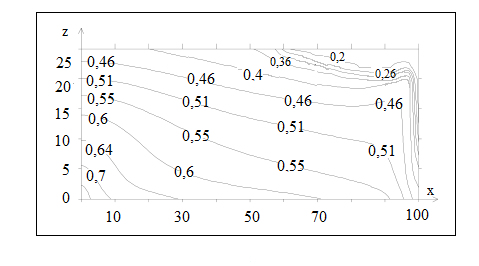


Рисунок 2 – Фронт водонасыщенности по времени

В соответствии с рисунком 3 значения водонасыщенности в различных узлах сетки позволяют оценить распределение жидкости по пространственной координате.

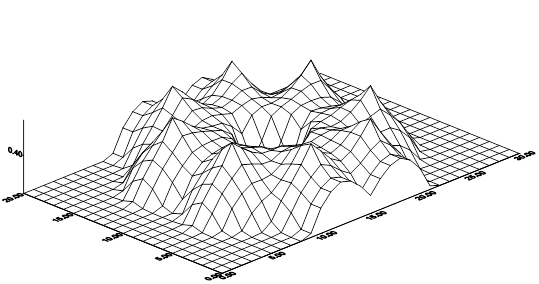


Рисунок 3 – Распределение водонасыщенности

Таблица 4 демонстрирует, как изменяется водонасыщенность на разных временных шагах для различных пространственных узлов. Это дало возможность проанализировать стабильность численного решения и уточнить параметры сетки для достижения большей точности [79].

Данные таблицы показывают, что с увеличением количества конечных элементов численное решение становится стабильным, что важно для подтверждения корректности и сходимости численного алгоритма.

В процессе закачки воды распределение водонасыщенности имело вид, отображенный на рисунке 4. В таблице 4 представлены значения в узлах сетки.

Таблица 4 – Значения водонасыщенности в узлах сетки



В соответствии с рисунком 4 наибольшая концентрация наблюдается у нагнетательных скважин, и с увеличением времени она уменьшается по мере продвижения фронта.

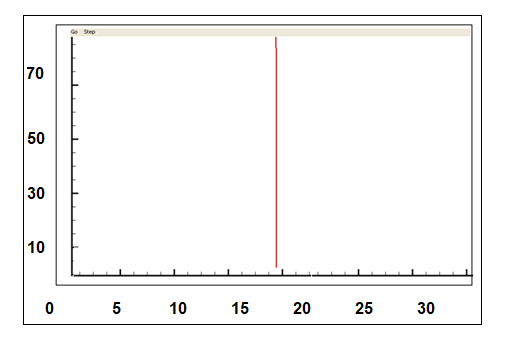


Рисунок 4 – Фронт изменения концентрации.

В соответствии с рисунком 5 начальное распределение давления в пористой среде при начале фильтрации отображает изменение давления по мере прохождения флюида через пористую среду. Начальное распределение давления представляет собой стартовую картину, когда фильтрация только начинается, и давление еще не достигло стационарного состояния.

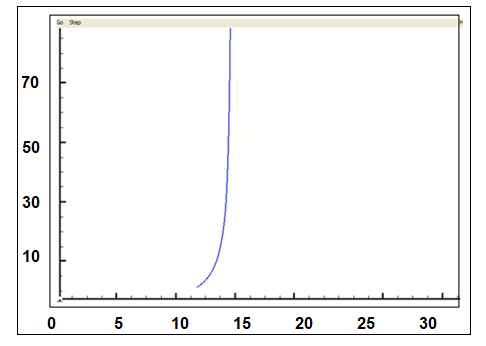


Рисунок 5- Изменение границы относительно давления

(в начале расчета)

Рисунок 6 демонстрирует изменения границы давления в конце расчета. График показывает динамику падения давления с течением времени, отражая процесс фильтрации и влияние капиллярных сил на давление в системе.

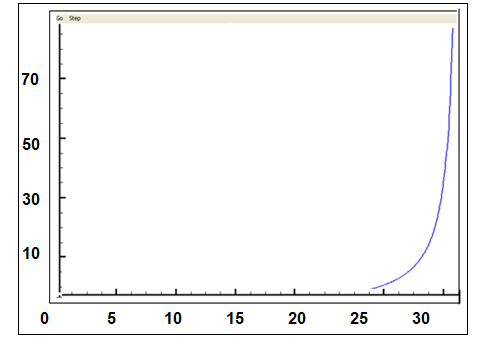


Рисунок 6 -Изменение границы относительно давления

(в конце расчета)

График на рисунке 7 показывает изменения границы температуры в начале расчета. Он иллюстрирует, как температура меняется в пористой среде в начальный момент времени, что важно для учета теплообмена в фильтрационных процессах.

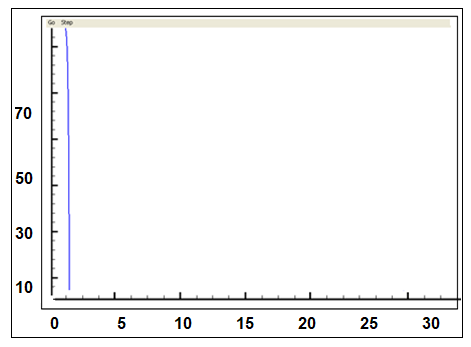


Рисунок 7 - Изменение границы в начале расчета

(относительно температуры по времени)

Рисунок 8 изображает изменения границы температуры в конце расчета. Здесь видно, как температурное распределение стабилизируется по мере продвижения процесса фильтрации, и как изменения температуры влияют на параметры фильтрации.

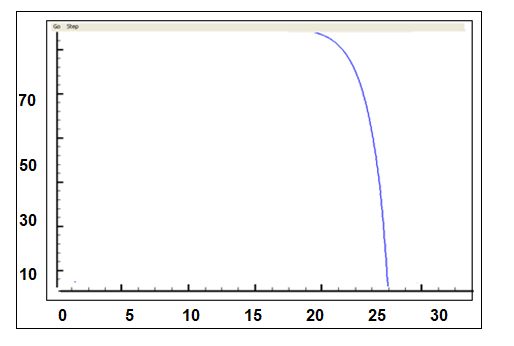


Рисунок 8 -Изменение границы в конце расчета

Таким образом, была численно исследована задача в автомодельных переменных. Численные расчеты показали, что водонасыщенность и концентрация ПАВ уменьшаются с увеличением пространственной переменной, что указывает на эффективный процесс фильтрации. Использованные численные методы демонстрируют высокую точность, что подтверждается стабильностью результатов при увеличении количества узлов в сетке. Это свидетельствует о корректности выбранного численного подхода.

Исследование задачи в автомодельных переменных позволило упростить и адаптировать исходную систему уравнений. Было проведено исследование изменения водонасыщенности и концентрации в пористой среде при неизотермической неравновесной фильтрации. Водонасыщенность и концентрация уменьшаются с увеличением что указывает на фильтрацию жидкости и изменение концентрации растворенных веществ. По мере прогрессирования процесса фильтрации водонасыщенность падает, что указывает на снижение капиллярного давления.

Представлено численное решение задачи капиллярной пропитки в пористой среде с учетом процессов тепло- и массообмена. Основное внимание уделено построению разностной схемы и ее реализации в условиях неизотермической фильтрации. Используемая модель описывается системой дифференциальных уравнений, включающей члены диффузии, фильтрации и теплопередачи. Уравнение (2.34) является развитием и уточнением существующих подходов к моделированию фильтрационных процессов, добавляя новизну за счет учета сочетания капиллярного давления с изменением температуры и концентрации примесей.

Основные этапы численного алгоритма включали дискретизацию расчетной области с равномерной сеткой по пространству и времени, применение метода конечных разностей для аппроксимации производных, учет граничных условий, задающих насыщенность на краях области, итерационный процесс расчета распределения насыщенности с учетом критериев устойчивости.

Численные эксперименты подтверждают стабильность и сходимость метода. Графики демонстрируют изменение насыщенности во времени, продвижение фронта фильтрации, а также влияние параметров модели на процесс.

Поведение системы показывает ожидаемое уменьшение концентрации в пористой среде и подтверждает важность учета капиллярного давления и теплопроводности в задачах фильтрации. Разработан вычислительный алгоритм в автомодельных переменных для решения задачи неравновесной фильтрации, который может быть использован для дальнейших исследований, а также послужил базовым элементом в блоке программ «ИСАР-2» - это «Цифровая технология по разработке нефтегазовых месторождений ИСАР-2».

* + 1. **Исследование разностной схемы на устойчивость**

В разностных производных задача имеет вид:

где с граничными условиями

и начальными условиями

**Теорема 2.1** *Если для разностной задачи (2.48) выполнены неравенства то решение задачи при сходится к точному решению .*

Доказательство.

Решение (2.48) будем искать в виде имеем:

Разделяя обе части равенства на получим:

Принимая во внимание граничные условия, для нахождения воспользуемся вспомогательной краевой задачей:

Частные решения ищем в виде После подстановки в уравнение (2.50) получим

Дискриминант этого квадратного уравнения есть +4. Пусть D<0, тогда:

Общее решение имеет вид Имеем ,

Для нахождения , используя (2.49) запишем разностное уравнение второго порядка ( Его общее решение будет иметь вид .

Частное решение этого уравнения будем искать с помощью подстановки , которая приводит к квадратному уравнению ( откуда получаем:

Аналогичным образом находим, что:

при этом

Аналогично, для коэффициенты Фурье

Поэтому

,

В итоге решение разностной схемы имеет вид:

Поскольку представлена рядом Фурье по ортонормированной системе собственных функций, то в имеет место равенство:

Верно, что поэтому:

Обозначая имеем, что:

Поскольку , то

откуда следует, что

После преобразований получаем:

Поскольку:

A,

то

,

следовательно:

,

тогда получаем, что:

,

поэтому

В итоге получаем

Далее, поскольку , то:

.

В силу монотонного возрастания функции как функции переменной имеем, что . Это позволяет согласовать нормы и .

Используя неравенство Коши-Буняковского и тот факт, что , получаем

Заменим на максимальное значение и получим, что .

В результате получаем, что:

Принимая во внимание найденную ранее оценку , окончательно получим, что

Из последнего неравенства получаем утверждение теоремы [81, с. 338].

**Лемма 2.1** *Пусть выполнены условия для задачи (2.48), тогда разностная схема для задачи (2.48) является устойчивой при*

**Лемма 2.2** *Пусть для параметров разностной схемы (2.48) выполнены условия а также пусть – приближенное решение задачи (2.48). Тогда для любого существует такое что при разностное решение удовлетворяет неравенству: || где - точное решение исходной задачи.*

**2.2 Алгоритм численного решения одномерной задачи Стефана**

Проблема задач со свободными (неизвестными) границами в теории фильтрации связана с явлениями, где границы между различными фазами или состояниями вещества неизвестны и подлежат изменениям в процессе времени.

Методы численного решения задач фильтрации с подвижными границами можно классифицировать на две основные группы:

1. методы сквозного счета. Эти методы позволяют решать задачи многофазной и многомерной задачи теплопроводности, но они обычно имеют ограниченную точность определения положения свободных границ. Такие методы могут включать в себя метод конечных объемов, метод конечных разностей и другие. В задачах со свободными границами они могут сталкиваться с трудностями в точном отслеживании и предсказании движения границ;
2. методы с явным выделением фронтов, которые обладают более высокой точностью в определении положения свободных границ, так как они явным образом выделяют интерфейсы между различными фазами. Однако, такие схемы могут быть алгоритмически сложными и требовать дополнительных вычислительных ресурсов [82].

Одна из наиболее точных схем сквозного счета построена с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Известно, что такая схема имеет низкий порядок аппроксимации вблизи свободных (неизвестных) границ. С другой стороны, в задачах многофазной диффузии не только градиент, но и само решение терпит разрывы на границах фаз.

Простая замена переменных часто позволяет снять разрывы решения и использовать какой-нибудь из методов сквозного счета[83, 84].

Представлен эффективный алгоритм численного решения одномерной задачи Стефана. Разработан вычислительный алгоритм для задач со свободными границами, который применим к моделям с произвольным и изменяющимся числом фаз, включая как теплопроводность, так и процессы диффузии.

«Основой алгоритма является использование конечных элементов. Вычисления выполняются по однородной схеме, что делает его универсальным и позволяет отнести к классу сквозных численных методов» [85]. Точное отслеживание границ осуществляется аналогично подходам, основанным на выделении фронтов, что обеспечивает высокую точность вычислений, свойственную методам данного типа.

Пусть за время от 0 до число фаз изменяется раз в некоторые, неизвестные заранее, моменты времени

Предположим, что

Будем предполагать, что внутри каждой фазы выполняется условие решение обладает достаточной гладкостью и удовлетворяет уравнению:

Заданы значения решения по обе стороны подвижных границ:

и краевые условия:

Движение фронтов описывается следующим условием:

В задачах диффузии , - коэффициент диффузии [76, с. 139]. Количество возможных типов фаз, а также значения концентрации по обе стороны границы раздела определяются фазовой диаграммой состояния и могут изменяться со временем в зависимости от температурных колебаний:

Будем применять метод конечных элементов (МКЭ) только по , а перед разностью аппроксимацией производных по времени воспользуемся формулой:

Интегрируя (2.56) по частям и учитывая соотношения (2.51), (2.54), (2.55) и (2.57), получим, что решение задачи (2.52) - (2.55) удовлетворяет для любой функции интегральному тождеству:

Формулировка задачи в виде вариационного тождества позволяет снизить требования к гладкости решения. [81, с.34, 86].

Аппроксимация.

Введем на отрезке дискретную сетку Проведем неявную разностную аппроксимацию по времени:

Здесь описывает вклад конечного элемента в систему уравнений. - приближённое значение интеграла , представляет приближенное значение , полученное в рамках метода конечных элементов [87]. Это значение строится на основе пробных функций, которые аппроксимируют исходное решение внутри каждого конечного элемента.

Уравнения МКЭ получим после вычисления и суммирования вкладов конечных элементов в (2.59).

Введем следующие обозначения:

и

для любой функции.

При вычислении вкладов конечных элементов можно воспользоваться формулами:

где на (),

Значения известны из (2.53). Уравнения, получающиеся на каждом временном слое, запишем в виде:

где Элементы трехдиагональной матрицы и вектора могут, в случае квазилинейных уравнений и нелинейных краевых условий, зависеть также и от [88-91].

Отметим, что для узлов сетки, вблизи которых нет межфазных границ, в системе (2.61) получаются обычные соотношения, аппроксимирующие (2.52).

Пусть, после - ой итерации известны и .

Обозначим через . Выберем наименьший отрезок с концами в узлах сетки, такой, что:

[]

Если , положим иначе .

Аналогично вводим величины справа от .

Для всех а также для при условии, что , значение находим после решения разностного уравнения:

аппроксимирующего (2.55), и усреднения: , где - параметр усреднения итераций.

Остановимся подробнее на решении уравнения (2.62). Это уравнение приводится к кубическому относительно :

Его корни удобно находить с помощью тригонометрических формул, без явного использования формулы Кардано. При малых уравнение имеет три действительных корня, средний из которых стремится к при .

После сходимости итераций производится проверка соответствия получившихся значений и имеющимся на концах отрезка [0, 1] фазам.

Если соответствие нарушилось, то в точке или устанавливается новая межфазная граница. Таким образом, было исследовано решение задачи с произвольным и переменным числом фаз [92-94].

Для изучения эффективности описанного алгоритма было решено несколько задач многофазной диффузии и теплопроводности. Наиболее точный расчет позволил рассчитать движение границы с хорошей точностью (около трех верных знаков) при использовании 40 конечных элементов по х. Решение начиналось в момент, когда обе фазы существовали.

Таким образом, выше описан алгоритм численного решения задачи с подвижными границами, основанный на методе конечных элементов. Алгоритм позволил с высокой точностью отслеживать положение фазовых границ. Это было достигнуто путем сочетания методов сквозного счета и методов явного выделения фронтов, это дает точные результаты при решении задач с подвижными границами. Численный алгоритм является универсальным и может быть применен к задачам теплопроводности и диффузии независимо от количества фаз или их изменения по времени. Применение неявных разностных схем для аппроксимации производных по времени повышает устойчивость алгоритма и улучшает точность учета изменений в положении фазовых границ на каждом временном шаге. Использование итерационных методов для корректировки положения фазовых границ позволило точно отслеживать изменение фаз и учесть возможность появления новых фаз. Коррекция сетки и положения границ осуществлялась динамически на каждом временном шаге. Итерационный процесс численного решения обеспечивает сходимость, корректность решения проверяется на каждом шаге.

**Заключение**

**Краткие выводы по результатам диссертационного исследования.** Диссертационная работа посвящена разработке моделей теории фильтрации, описывающих движение многофазной жидкости с учетом массообменных процессов.

В работе получены следующие результаты:

* разработаны математические модели, описывающие неравновесную изотермическую и неизотермическую фильтрацию многофазных жидкостей с учетом массообменных процессов;
* проведен анализ поведения моделей при малых значениях параметра релаксации, что позволило выявить условия, при которых задача переходит к задаче типа Стефана;
* представлено решение задачи неизотермической фильтрации с учетом массообмена приближенным методом решения на основе вариационного принципа;
* исследованы качественные свойства решений задачи фазовых переходов при неизотермической фильтрации с конвективным теплопереносом;
* установлены критерии для предсказания поведения фазовых переходов;
* задача неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил с помощью автомодельных переменных приведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и предложен вычислительный алгоритм.

При рассмотрении предельного перехода в задаче неравновесной фильтрации к задаче равновесной фильтрации с использованием параметра релаксации, учитывалась адсорбция в грунте. Адсорбция учитывается как дополнительный фактор, влияющий на процесс фильтрации. Медленное изменение важных параметров системы, таких как концентрация растворенных веществ или характеристики грунта, может влиять на процесс адсорбции и, следовательно, на характеристики фильтрации.

В изотермической фильтрации подвижные границы отсутствуют, но при малых релаксациях изотермическая система начинает вести себя как неизотермическая. Задача Стефана описывает фазовые переходы. Таким образом, решение исходной задачи изотермической фильтрации переходит в решение задачи Стефана. При изотермическая система быстро реагирует на изменения и переходы между фазами происходят почти мгновенно.

Были исследованы качественные свойства задачи фазовых переходов и критерии сходимости. Проанализированы условия термодинамического равновесия системы. Приближенные решения сходятся к точному решению задачи при уменьшении шага по времени, и это решение удовлетворяет определенным оценкам. Для нахождения приближенных решений задачи фазовых переходов можно воспользоваться методом двойственных функционалов.

Решение задачи Стефана с конвективным переносом тепла описывает распределение температуры и положение границы фаз в зависимости от времени. Положение свободной границы между жидкостью и твердой фазой и распределение температуры внутри каждой фазы были описаны автомодельными функциями, и такие решения существуют и единственны.

Таким образом, поставленные в диссертации задачи были решены. Полученные результаты свидетельствует о необходимости широкого применения при разработке нефтегазовых месторождений Республики Казахстан.

**Оценка полноты решения поставленных задач.**

Вопросы исследования полностью решены. Обобщая исследования в этой области, представляется более глубокое понимание взаимосвязи между свободной границей, скоростью распространения неоднородных растворов и внешними параметрами. Усовершенствование математических моделей позволяет более точно моделировать и анализировать такие процессы в пористых средах.

**Рекомендации и исходные данные по конкретному использованию результатов.**

Результаты могут быть использованы при решении научных задач, где исследуются качественные свойства изотермической и неизотермической задачи для многомерного случая.

Представленный алгоритм решения применен при решении задачи прогнозирования добычи нефти на месторождениях западного региона Республики Казахстан. Результаты расчетов доказали эффективность численных алгоритмов и послужили базовыми элементами в блоке программ «ИСАР-2» - это «Цифровая технология по разработке нефтегазовых месторождений ИСАР-2», акт внедрения которой был оформлен в 2023 году в ТОО «Норс Каспиан Ойл» в виде «Информационная система анализа разработки нефтегазовых месторождений».

**Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области.**

В ходе работы разработаны новые математические модели, которые эффективно описывают как изотермическую, так и неизотермическую фильтрацию с учетом фазовых переходов и конвективного теплообмена, что является значимым вкладом в теорию фильтрации многофазных жидкостей.

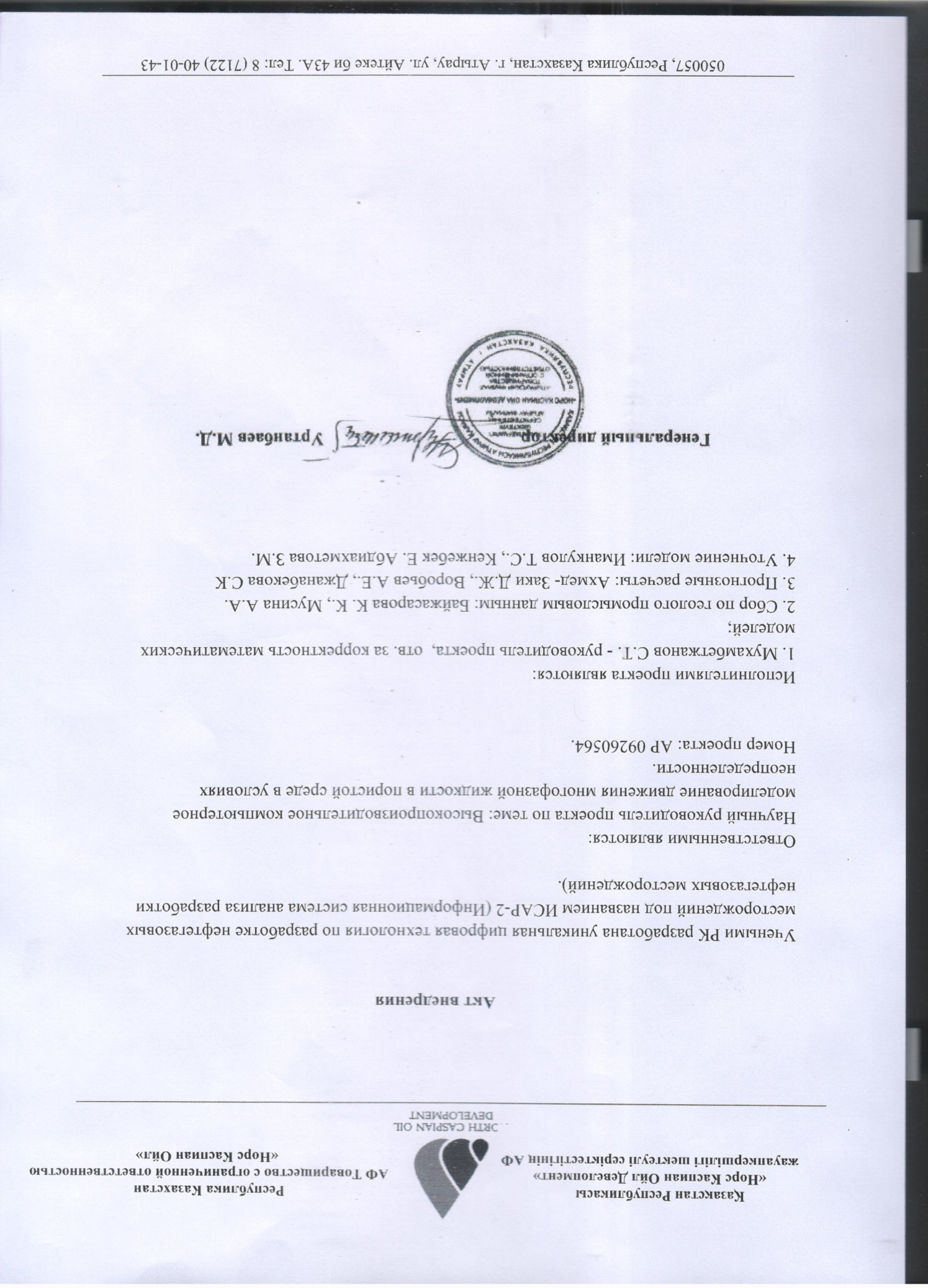
В сравнении с текущими достижениями в данной области, работы, посвященные динамике фазовых переходов и массообменным процессам в пористых средах, достаточно ограничены. Большинство существующих моделей либо не учитывают нелинейность процессов, либо слишком упрощены, что ограничивает их применимость в сложных реальных задачах, таких как разработка нефтегазовых месторождений. Диссертация вносит значительный вклад в улучшение точности моделирования этих процессов, особенно в части фазовых переходов и влияния капиллярных сил, что не всегда отражается в существующих моделях.

Важным результатом работы является создание алгоритма решения задачи неизотермической фильтрации с учетом капиллярных сил и массообмена, который был успешно применен в нефтегазовой отрасли. Кроме того, подход к решению задач через использование автомодельных переменных и вариационного принципа позволяет добиться более строгих приближенных решений, чем существующие методы, и улучшить сходимость численных методов. Это дает возможность повысить точность расчетов и улучшить эффективность алгоритмов в сравнении с традиционными подходами, которые применяются в настоящее время.

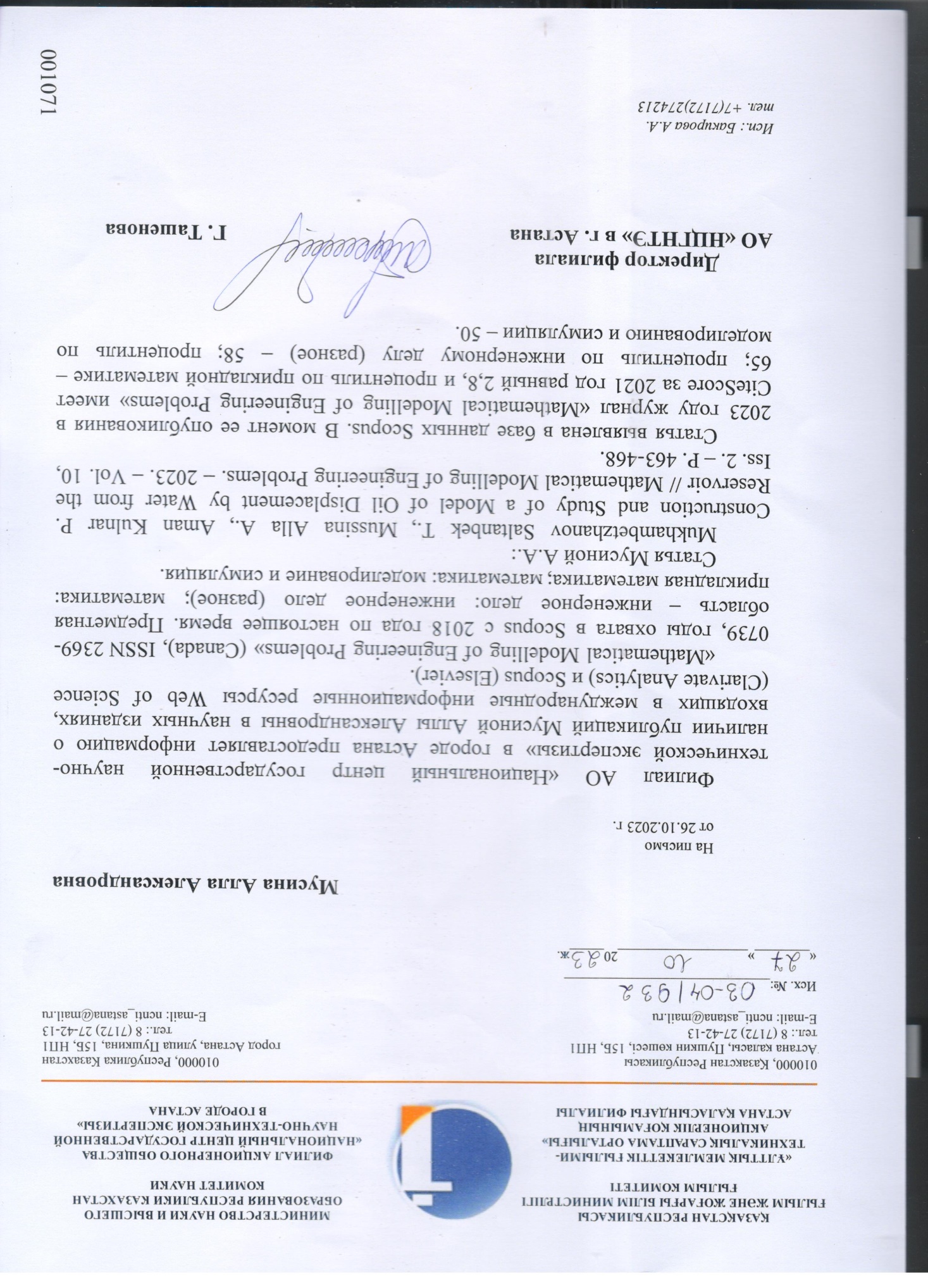
**Список использованных источников**

1. Muskat M. The flow of homogeneous fluid through porous media. - London: N.Y., 1937. - 763 p.
2. Leverett M.C. Flow of oil-water mixtures through unconsolidated sands. - London: Trans. AIME, 1939. – 171 p.
3. Buckley S., Leverett М.С. Mechanism of fluid in sands. - London: Trans. AIME, 1942. - 116 p.
4. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. - Л.: Гостехиздат, 1953. - 603 с.
5. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. - М.: Недра, 1972. - 288 с.
6. Бочаров О.Б., Телегин И.Г. Сравнительный анализ некоторых разностных схем для задач двухфазной фильтрации без учета капиллярных сил. - Новосибирск: Вычислительные технологии, 2003. - 131 с.
7. Ентов В.М. Теория фильтрации // Соросовский образовательный журнал. - 1998. - № 2. - С. 121-128.
8. Баренблатт Г.И., Гильман А.А. Математическая модель неравновесной протовоточной капиллярной пропитки // ИФЖ. - 1987. - Т. 52, № 3. - С. 456-461.
9. Цыбульский Г.П. Уравнения макронеравновесной фильтрации. Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: Наука, 1985. - 140 с.
10. Манучарянц Э.О., Юдин В.А., Мишина А.Ю. Численное моделирование неравновесного вытеснения несмешивающихся жидкостей в пористой среде. - Новосибирск: ИТПМ, 1987. - 195 с.
11. Булгакова Г.Т., Жибер А.В., Файзуллин Т.А. Математическое моделирование неравновесной двухфазной фильтрации // Математическое моделирование. - 2006. - Т. 18, № 10. - С. 19-38.
12. Меликов Г.X., Азизов М.Г. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах // Изв. вузов. Нефть и газ. - 1988. - № 10. - С. 35-38.
13. Медведков В.И. Условия устойчивого термодинамического равновесия и релаксации системы пористый «скелет-вода-нефть». - Новосибирск: ИТПМ, 1980. - 164 с.
14. Файзуллин Т.А. Об одной модели неравновесной двухфазной фильтрации. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. - 138 с.
15. Файзуллин Т.А. Приближенно аналитическое решение нелинейной задачи неравновесной двухфазной фильтрации // Вестник УГАТУ. - 2005. - Т. 6, № 2. - С. 209-213.
16. Николаевский В.Н. Математическое моделирование физико-химического воздействия на нефтеводонасыщенные пласты. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. - 346 с.
17. Ентов В.М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах. Математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов // Успехи механики. - 1981. - Т. 4, № 3. - С. 41-79.
18. Мухамбетжанов С.Т., Хусаинов Р.Н. О разрешимости одной модели неравновесной фильтрации // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Таймановские чтения». - Алматы, 2007. - С. 132-137.
19. Жумагулов Б.Т., Зубов Н.В., Монахов В.Н., Смагулов Ш.С. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче. - Алматы: Гылым, 1996. - 167 с.
20. Мухамбетжанов С.Т., Неверный А.М. Обоснование вычислительного алгоритма для одной нелинейной задачи двухфазной фильтрации // Матер. конф. «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика». - Алматы, 2001. - С. 151-152.
21. Билалова Г.А., Билалова Г.М. Применение новых технологий в добыче нефти. - Волгоград: Изд. дом «ИнФолио», 2009. - 272 с.
22. Буканова А.С. Нефти Казахстана для производства масел // Вестник АГТУ. - 2008. - № 2. - С. 121-128.
23. Воробьев А.Е., Абдинов Р.Ш., Воробьев К.А. Историческое прошлое, современное состояние и перспективы нефтяной отрасли Казахстана // Вестник Атырауского гос. Ун-та им. Х. Досмухамедова. - 2019. - № 4. - С. 184-201.
24. Воробьев А.Е., Воробьев К.А., Ходжаев Р.Р. Конструирование и обоснование природоподобных технологий возобновления минеральных ресурсов // Горный журнал Казахстана. - 2020. - № 5. - С. 11-15.
25. Акжигитов А.Ш., Бисенова Т.М. Нефти новых месторождений триасовых горизонтов полуострова Мангышлак // Нефть и газ. - 2000. - № 3. - С. 92-98.
26. Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. - Москва: Печатник, 1913. - 228 с.
27. Павловский Н.Н. Гидравлический справочник. – Ленинград: Лениздат, 1937. - 910 с.
28. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977. - 664 с.
29. Лейбензон Л.С. Нефтепромысловая механика. Ч. 2: Подземная гидравлика воды, нефти и газа. - М.: Горногеолнефтеиздат, 1934. - 352 с.
30. Коновалов А.Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. - Новосибирск: Наука, 1988. - 166 с.
31. Леви Б.И., Станкевич Н.А. О вытеснении нефти оторочкой водорастворимых полимеров // Известия вузов. Нефть и газ. - 1971. - № 4. - С. 47-50.
32. Чарный И.А. Нагревание призабойной зоны при закачке горячей жидкости в скважину // Нефтяное хозяйство. - 1953. - № 2. - С. 18-23.
33. Richards L.A. Capillary conduction of liquids through porous mediums // Physics. - 1931. - Vol. 5. - P. 318-333.
34. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.
35. Монахов В.Н. Сопряжение основных математических моделей фильтрации двухфазной жидкости // Математическое моделирование. - 2002. - Т. 14, № 40. - С. 109-115.
36. Данаев Н.Т., Мухамбетжанов С.Т. Определение распространения бурового раствора с помощью математической модели в прискважинной зоне пласта // Матер. междунар. науч.- практ. конференции «Инженерная наука на рубеже 21 века». - Алматы, 2001. - С. 125-126.
37. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. - Новосибирск: Наука, 1983. - 316 с.
38. Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Конина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах // Прикл. матем. и механ. - 1960. - Т. 24, № 5. - С. 58-73.
39. Мейрманов А.М. Задача Стефана. - Новосибирск: Наука, 1986. - 239 с.
40. Айтжанов С.Е., Жанузакова Д.Т. Разрешение решений обратной задачи для параболического уравнения // ҚазҰТУ хабаршысы. Техникалық ғылымдар сериясы. - 2019. - № 3. - С. 586-593.
41. Ахмедов К.А. О применении идентификационных моделей при расчете фазовых превращений // Изв. вузов. Нефть и газ. - 1978. - № 6. - С. 26-30.
42. Баренблатт Г.И. Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в однородной пористой среде // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1971. - № 5. - С. 144-151.
43. Kasenov S.E., Demeubayeva Z.E., Temirbekov N.M., Temirbekova L.N. Solution of the Optimization Problem of Magnetotelluric Sounding in Quaternions by the Differential Evolution Method // Computation. - 2024. - Т. 12, № 127.
44. Temirbekov N.M., Zhaksylykova Z.R. An iterative method for solving nonlinear Navier-Stokes equations in complex domains taking into account boundary conditions with uniform accuracy // AIP Conference Proceedings. - 2018. -Т. 1997. - № 020036.
45. Khaletska Z.P., Ospanov M.N., Perestyuk Y.M., Pravdyvyi O.A. On uniqueness and continuous dependence of the weak solutions of neutral stochastic functional differential equations in infinite-dimensional spaces // Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA). - 2024. - Т. 32, № 2. - С. 156-174.
46. Ospanov M., Ospanov K. Maximal Regularity Estimates and the Solvability of Nonlinear Differential Equations // Mathematics. - 2022. - Т. 10. № 1717.
47. Коновалов А.Н., Монахов В.Н. О некоторых моделях фильтрации многофазных жидкостей // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. Новосибирск: ИГиЛ СО АН. - 1976. - Вып. XXVII. - С. 51-65.
48. Бан А., Богомолова А.Ф., Максимов В.А. и др. Физика нефтяного пласта. - М.: Гостехиздат, 1962. - 275 с.
49. Баренблатт Г.И., Гильман А.А. Математическая модель неравновесной протовоточной капиллярной пропитки // ИФЖ. - 1987. - Т. 52, № 3. - С. 456-461.
50. Мухамбетжанов С.Т., Мирманова Ж.К., Кусаинова А.А. Моделирование процессов фильтрации жидкости в пористой среде с учетом массообменных процессов // Вестник Атырауского гос. Ун-та им. Х. Досмухамедова. - 2017. - Т. 46, № 3. - С. 28-34.
51. Веригин Н.Н., Шестаков В.М. Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде. - М.: Недра, 1954. - 47 с.
52. Бабалян Г.А. Физикохимические процессы в добыче нефти. - М.: Недра, 1974. - 199 с.
53. Гиматудинов Ш.К. Нефтеотдача коллекторов. - М.: Недра, 1970. - 127 с.
54. Жуковский Н.Е. Гидродинамика. - М.: Печатник, 1913. - 512 с.
55. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967) / Под ред. П.Я. Кочиной. - М.: Наука, 1969. - 545 с.
56. Ентов В.М., Шыганаков Н. О капиллярной пропитке гидрофобных нефтенасыщенных пород раствором активной примеси // ПМТФ СО АН СССР. - 1981. - № 4. - С. 116-118.
57. Мартос В.Н., Рыжик В.М. Определение динамических кривых капиллярного давления методом стабилизированной зоны // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1972. - № 2. - С. 57-60.
58. Васильева М.В., Прокопьев Г.А. Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов // Математические заметки СВФУ. - 2017. - Т. 24, № 2. - С. 46-62.
59. Мухамбетжанов С.Т., Корнилов В.С., Орунханов М.К. О восстановлении параметров одной математической модели геофизики в прискважинной зоне пласта // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Вопросы прикладной физики и математики». - Алматы, 2003. - С. 209-213.
60. Ентов В.М., Турецкая Ф.Д., Хавкин А.Я., Шыганаков Н. Численное исследование процессов повышения нефтеотдачи пластов с помощью химреагентов в неизотермических условиях. - М., 1984, - 154 с.
61. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1980. - 520 с.
62. Мухамбетжанов С.Т., Кусайнова А.А., Мирманова Ж.К. Об одном приближенном методе решения математической модели двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде // Фундаментальные науки и образование: матер. VI Всерос. науч.-прак. конф. с международным участием. - Горно-Алтайск: Алтайский государственный гуманитарно-педагогический университет имени В.М. Шукшина, 2016. - С. 103-109.
63. Wyckoff R.D., Sotset H.F. The flow of gasliquid mixtures through consolidated sands // Physics. - 1938. - Vol. 10. - P. 74-81.
64. Маделунг Э. Математический аппарат физики. - М.: Наука, 1968. - 618 с.
65. Курбанов А.К. Об уравнениях движения двухфазных жидкостей в пористой среде. Теория и практика добычи нефти. - М.: Недра, 1968. - 286 с.
66. Кричлоу Г.Б. Современная разработка нефтяных месторождений – проблемы моделирования. - М.: Недра, 1979. - 303 с.
67. Хасанов М.М. Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1994. - № 2. - С. 66-72.
68. Медведков В.И. Условия устойчивого термодинамического равновесия и релаксации системы пористый «скелет-вода-нефть». - Новосибирск: ИТПМ, 1980. - 164 с.
69. Турецкая Ф.Д., Хавкин А.Я. Численное исследование двухмерных задач вытеснения нефти растворами активных примесей // Тезисы докл. Всесоюз. семинара по современным проблемам и математическим методам теории фильтрации. - Москва, 1984. - С. 104-105.
70. Зиновьева Ю.А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтей // Тр. ВНИИ. - 1954. - Т. 6. - С. 254-269.
71. Васильева М.В., Прокопьев Г.А. Численное решение задачи двухфазной фильтрации с неоднородными коэффициентами методом конечных элементов // Математические заметки СВФУ. - 2021. - Т. 24, № 2. - С. 46-60.
72. Леви Б.И., Сурков Ю.В., Зайдель Д.М., Шахмаева А.Г. Методы математического моделирования на ЭВМ процесса заводнения нефтяных месторождений. - Уфа: БашНИПИнефть, ОНТИ, 1975. - 52 с.
73. Абросимов А.Г., Михайлов В.В., Соловьев М.О., Чекалин А.Н. Исследование неизотермической двухфазной фильтрации в слоистых пластах, вскрытых системой скважин, с помощью вычислительного эксперимента // Тезисы докл. Всесоюз. семинара по современным проблемам и математическим методам теории фильтрации. - Москва, 1984. - С. 24-28.
74. Мухамбетжанов С.Т., Унаспеков Б.А. Об уточнении параметров конструкции многослойных футеровок промышленных печей // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Инженерная наука на рубеже 21 века». - Алматы, 2021. - С. 141-142.
75. Мухамбетжанов С.Т., Уразмагамбетова Э.У. О применении метода слабой аппроксимации для одной модели изотермической фильтрации // Матер. междунар. науч.-практ. конф. «Вопросы прикладной физики и математики». - Алматы, 2003. - С. 213-217.
76. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A.A., Aman K.P. Construction of effective computational algorithms for solving free boundary problems // Вестник национальной инженерной академии РК. - 2023. - № 2. - С. 135-141.
77. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A.A., Baiganova A.M. The state of the problem of the joint movement of fluid in the pore space // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. - 2022. - Vol. 114, № 2. - P. 43-52.
78. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A.A., Aman K.P. Construction and study of a model of oil displacement by water from the reservoir // Mathematical Modelling of Engineering Problems. - 2023. - Vol. 10, № 2. - P. 463-468.
79. Мусина А.А. Об основных математических моделях и приближенном методе теории фильтрации // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. - 2021. - № 3. - С. 25-31.
80. Konovalov A.N. Filtration problems of multiphase incompressible fluid. - Novosibirsk: Nauka, 1988. - 235 p.
81. Сушков А.С. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей одну краевую задачу гиперболического типа // Челябинский физико-математический журнал. - 2019. - Т. 4, № 3. - С. 333-344.
82. Kaliev I.A., Sabitova G.S. Neumann boundary value problem for system of equations of nonequilibrium sorption // Ufa Math. J. - 2016. - Т. 11. - С. 33-39.
83. Bader G. Fourier splitting methods for the dynamics of rotating Bose-Einstein condensates // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2018. - Vol. 10, № 2. - P. 267-280.
84. Ike C. Exponential Fourier integral transform method for stress analysis of boundary load on soil // Mathematical Modelling of Engineering Problems. - 2019. - Vol. 5, № 1. - P. 33-39.
85. Al Khaled K., Taha S.N. Efficient solutions for nonlinear diffusion equations appeared as models of physical problems // Mathematical Modelling of Engineering Problems. - 2022. - Vol. 9, № 6. - P. 1508-1514.
86. Henry B.C. Modern Reservoir Engineering. - New Jersey: Prentice Hall Incorporation, 1980. - 523 p.
87. Zhou J.K. Differential Transformation and Its Application for Electrical Circuits. - Wuhan: Huazhong University Press, 1986.- 421 p.
88. Escandon Panchana P., Morante Carballo F., Herrera Franco G., Pineda E., Yagual J. Computer application to estimate PVT conditions in oil wells in the Ecuadorian Amazon // Mathematical Modelling of Engineering Problems. - 2021. - Vol. 8, № 5. - P. 207-218.
89. Мухамбетжанов С.Т., Мусина А.А. О совместном движении жидкостей в поровом пространстве // Тезисы докл. IX междунар. науч. конф. по проблемам дифференциальных уравнений, анализа и алгебры. - Актобе, 2022. - С. 174-180.
90. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A.A. Estimation of fluid volume displacement in the reservoir using mathematical model // Proceedings of the International University Scientific Forum «Practice Oriented Science: UAE RUSSIA INDIA». - Dubai, 2023. - С. 131-135.
91. Жумагулов Б.Т., Куттыкожаева Ш.Н., Мусина А.А. О разработке цифровой технологии для нефтегазовых месторождений // Матер. XII междунар. научн.-практ. конф. «Инновационные научные исследования в современном мире: теория, методология, практика». - Уфа, 2023. - С. 30-37.
92. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A.A. Mathematical Modeling of Fluid Filtration Processes with Consideration of Mass Transfer Processes // Int. math. conf. «Functional Analysis in interdisciplinary applications 2023». - Antalya, 2023. - P. 79-80.
93. Мусина А.А. Исследование математической модели неравновесной фильтрации // Традиционная междунар. апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан: матер. междунар. науч.-практ. конф. - Алматы, 2024. - С. 176-177.
94. Mukhambetzhanov S.T., Mussina A., Baizhasarova K.K. Numerical Modeling of Fluid Filtration Processes with Free Boundaries // Actual problems of applied mathematics and information technologies Al Khwarizmi 2024: abstracts of the int. scientific conf. - Tashkent, 2024. - 346 p.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**



**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**



**ПРИЛОЖЕНИЕ В**

А) import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

# Параметры задачи

nx, nt = 100, 500

dx, dt = 0.01, 0.001

alpha, beta = 0.01, 0.005

s\_initial = np.ones(nx)

saturation = np.zeros((nt + 1, nx))

saturation[0, :] = s\_initial

for n in range(nt):

for i in range(1, nx - 1):

ds\_dx2 = (saturation[n, i + 1] - 2 \* saturation[n, i] + saturation[n, i - 1]) / dx\*\*2

saturation[n + 1, i] = saturation[n, i] + dt \* (alpha \* ds\_dx2 - beta \* saturation[n, i])

saturation[n + 1, 0] = 1.0 # Граничное условие слева

saturation[n + 1, -1] = saturation[n + 1, -2] # Граничное условие справа

# Визуализация

plt.figure(figsize=(10, 6))

x = np.linspace(0, 1, nx)

for t in range(0, nt + 1, nt // 5):

plt.plot(x, saturation[t, :], label=f"t = {t \* dt:.2f}")

plt.xlabel("Координата x")

plt.ylabel("Насыщенность")

plt.legend()

plt.grid()

plt.show()

Б) import numpy as np

import matplotlib.pyplot as plt

def solve\_filtration\_with\_details(nx, nt, dx, dt, alpha, beta, s\_initial):

"""

Параметры:

nx: int - количество узлов сетки по пространству.

nt: int - количество временных шагов.

dx: float - шаг по пространству.

dt: float - шаг по времени.

alpha: float - параметр насыщенности.

beta: float - параметр фильтрации.

s\_initial: np.ndarray - начальное распределение водонасыщенности.

Возвращает:

saturation: np.ndarray - массив насыщенности во времени.

x: np.ndarray - координаты пространства.

times: np.ndarray - временные шаги.

"""

# Дискретизация пространства и времени

x = np.linspace(0, 1, nx)

times = np.linspace(0, nt \* dt, nt + 1)

# Инициализация массива насыщенности

saturation = np.zeros((nt + 1, nx))

saturation[0, :] = s\_initial

# Итерационный процесс расчета насыщенности

for n in range(nt):

for i in range(1, nx - 1):

# Вычисление второй производной по пространству (метод конечных разностей)

ds\_dx2 = (saturation[n, i + 1] - 2 \* saturation[n, i] + saturation[n, i - 1]) / dx\*\*2

# Интеграция во времени с учетом параметров alpha и beta

saturation[n + 1, i] = saturation[n, i] + dt \* (alpha \* ds\_dx2 - beta \* saturation[n, i])

# Граничные условия: насыщенность постоянна на краях

saturation[n + 1, 0] = saturation[n, 0]

saturation[n + 1, -1] = saturation[n, -1]

return saturation, x, times

# Параметры задачи

nx = 100 # Число узлов по пространству

nt = 500 # Число временных шагов

dx = 0.01 # Шаг по пространству

dt = 0.001 # Шаг по времени

alpha = 0.05 # Параметр насыщенности

beta = 0.01 # Параметр фильтрации

s\_initial = np.linspace(1.0, 0.5, nx) # Начальное распределение водонасыщенности

# Численное решение задачи

saturation, x, times = solve\_filtration\_with\_details(nx, nt, dx, dt, alpha, beta, s\_initial)

# Визуализация

plt.figure(figsize=(10, 6))

for n in range(0, nt + 1, nt // 5):

plt.plot(x, saturation[n, :], label=f"t = {times[n]:.2f}")

plt.title("Изменение водонасыщенности с течением времени")

plt.xlabel("Координата x")

plt.ylabel("Водонасыщенность")

plt.legend()

plt.grid(True)

plt.show()