Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.958:550.3 Қолжазба құқығында

# КОЙКЕЛОВА ДИНАРА КАМЕНОВНА

**Сығылатын орта арқылы үшөлшемді сығылмайтын ортаны**

**асимптотикалық моделдеу**

6D070500 – Математикалық және компьютерлік модельдеу

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесші

физика-математикалықғылымдарының

кандидаты,

доцент

М.М. Букенов

Шетелдік ғылыми кеңесші

физика-математикалық ғылымдарының

кандидаты

А.Г. Фатьянов

(РҒА СБ Есептеу математикасы және

геофизика институты, Ресей )

Қазақстан Республикасы

Астана, 2024

# МАЗМҰНЫ

|  |  |
| --- | --- |
| **КІРІСПЕ** ………………………………………………………………..…… | 3 |
| **1 СҰЙЫҚТЫҚ ДИНАМИКАСЫ**………………………………………… | 7 |
| **2 әЛСІЗ СЫҒЫЛАТЫН СҰЙЫҚТЫҚ**..................................................... | 12 |
| **3 сЫҒЫЛМАЙТЫН СҰЙЫҚТЫҚТЫҢ ҚОЗҒАЛЫСТАРЫН ЕСЕПТЕУДІҢ НЕГІЗГІ САНДЫҚ ӘДІСТЕРІ**........................................ | 18 |
| **4 СТАТИКАЛЫҚ СЫҒЫЛАТЫН ОРТА ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ**.................................................................................... | 53 |
| **5 сЫҒЫЛМАЙТЫН ОРТА ҮШІН СЕРПІМДІЛІК ТЕОРИЯСЫНЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ**.................................................................................... | 63 |
| **6 Ричардсон БОЙЫНША СЫҒЫЛМАЙТЫН ОРТА ҮШІН ЖУЫҚ ШЕШІМДЕРДІҢ ДӘЛДІГІН АРТТЫРУ**.................................... | 75 |
| **ҚОРЫТЫНДЫ**................................................................................................ | 83 |
| **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**........................................... | 84 |
| **ҚОСЫМША**  – Сандық асимптотика............................................................ | 87 |
|  |  |

**КІРІСПЕ**

**Теориялық гидродинамика** бұрыннан әртүрлі мамандықтардағы ғалымдардың назарын өзіне аударды. Оның тәжірибелерінің көрнекілігі, негізгі теңдеулердің салыстырмалы қарапайымдылығы және есептердің анық тұжырымдалуы сұйық ортада болатын динамикалық құбылыстардың толыққанды сандық сипаттамасын алуға үміт тудырды. Ал шын мәнінде, есептердің қарапайымдылығы алдамшы болды. Осы күнге дейін екі негізгі іргелі мәселені шешуге бағытталған күш-жігер толығымен жетістікке жеткен жоқ. Олар – мыналар:

1) қосымша шекаралық және бастапқы шарттар кезінде гидродинамика теңдеулерінің бірегей шешімі бар ма;

2) осы теңдеулердің шешімдері нақты ағындарды қаншалықты қанағаттанарлық сипаттайды.

**Гидродинамикада** жинақталған ең бай теориялық және тәжірибелік материал сұйықтықтарда болатын құбылыстарды қатаң математикалық талдау үшін жеткіліксіз болар. Гидродинамиканың көптеген парадокстары, мысалы, кезеңдері, оның пайда болуынан бастап жүріп өткен ұзақ және қиын жолын көрсетеді.

**Диссертациялық жұмыс** тақырыбы Қазақстан Республикасы Үкіметі жанындағы Жоғары ғылыми-техникалық комиссия бекіткен «Геология, минералды көмірсутекті шикізатты, жаңа материалдарды, технологияларды, қауіпсіз өнімдер мен құрылымдарды өндіру және өңдеу» ғылымды дамытудың басым бағытына сәйкес келеді.

**Дербестілік деңгейі** өте жоғары, себебі априорлық бағалауды алу үшін белгілі дәрежеде математикалық эрудиция және компьютерде сандық есептеулерді жүргізу қажет.

**Диссертациялық жұмыс** серпімділік теориясының айырмашылық схемаларын пайдалана отырып, гидродинамикалық есептерді сандық түрде орындауға мүмкіндік беретіндіктен, тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтардың ағындарын дамытуға үлкен үлес қосады.

**Жұмыстың өзектілігінің** негіздемесі гидродинамикалық есептерді шешудегі жаңа көзқарасқа негізделген.

**Диссертациялық жұмыстың** бірінші бөлімдерінде қазіргі уақытта қолда бар ғылыми нәтижелерге шолу жасалып, іске асырылу тұрақтылығы тұрғысынан талдау жасалған. Әрі қарай диссертациялық жұмыстың төртінші, бесінші, алтыншы бөлімдерінде гидродинамика есептерін шешудің жаңаша көзқарасы берілген, алынған нәтижелерге талдау жасалған. Ғылыми нәтижелер мен ұстанымдар толығымен жаңаша болып табылады. Серпімді сығылатын ортаны шешудің айырмашылық схемалары бұрын зерттелген және негізделген. Сондықтан олардың сығылмайтын ортаны сандық іске асыру үшін қолдануы кезінде негізделген.

Нақтылық принципі және априорлық бағалауларды алу әдістемесі негізделген және жеткілікті түрде егжей-тегжейлі сипатталған.

Бірінші ұзақ кезең идеалды сығылмайтын сұйықтықтың потенциалдық ағындары деп аталатын зерттеумен байланысты болды. Мұндай ағындардың жиынтығы айтарлықтай кең болып шықты, ал оларды зерттеудің математикалық мүмкіндіктері (күрделі айнымалы функциялар теориясы) ерекше мүлтіксіз. Дегенмен, потенциалдық ағындағы денеге әсер ететін нөлдік толық күш туралы әйгілі Эйлер-Даламбер парадоксы идеалды сұйықтық теориясының жетілмегендігін көрсетті. Және оны жою талпыныстары мен идеал сұйықтық теориясы аясындағы басқа да бірқатар парадокстарды жою әрекетінің бәрі бекер болып шықты. Сол кезде Навье-Стокстың негізгі теңдеулерімен тұтқыр сұйықтықтың математикалық моделі жасалды. Ол, сабауға түскен бала тәрізді, идеалды сұйықтық теориясындағы барлық жинақталған қисынсыздақтарға (көтергіш күш, қарсылық, турбуленттік із және т.б. беру) жауапты болуы керек еді. Бұл «бала» белгілі бір уақытқа дейін өзіне тағылған кәнарат-талаптар алдында үнсіз және жауапсыз еді. Ол бұлардың көпшілігіне не иә, не жоқ деп толық сенімді жауап бере алмады, өйткені Навье-Стокс теңдеулері үшін орай ағу есептерін дәл шешу тіпті ақырғы өлшемдердің ең қарапайым денелері үшін де мүмкін болмады. Идеал сұйықтықтан айырмашылығы, жабысу шарттарын қанағаттандыратын Навье-Стокс теңдеулері үшін потенциалды ағындар жоқ. Табылған нақты шешімдер өте аз еді. Олардың барлығында дерлік есептің сызықты еместігінің спецификасы жоқ (Навье-Стокс теңдеулеріндегі сәйкес сызықты емес мүшелер нөлге тең)[1].

Бірақ Навье-Стокс теңдеулері туралы осы аз ақпарат қоры көптеген тәжірибелер мен шамамен есептеулермен бірге тұтқыр сұйықтықтың математикалық моделі мен ондағы нақты құбылыстар арасындағы бірқатар сәйкессіздіктерді анықтауға мүмкіндік берді. Тұтқыр сұйықтықтың парадокстары осылай пайда болды, біз олардың екеуін ғана келтіреміз.

Бірінші парадокс келесідей: кез келген R Рейнольдс саны үшін шексіз ұзын құбырдағы (ол х осі бойымен бағытталсын дейік) Навье-Стокс теңдеулерінің жалғыз мүмкін болатын шешімдері, ол үшін v құбыр осіне параллель және оның шекарасында нөлге тең екені белгілі,

*,*

мұнда c – құбыр радиусы,

– бос сандық параметр. Алайда, оларға сәйкес келетін белгілі бір критикалық мәннен аспайтын, осылар арқылы өткенде турбулентті болатын ағындар (Пуазейль ағындары) R үшін байқалады.

Екінші парадокс Куэтт ағындарында байқалды - өстес айналмалы цилиндрлер арасындағы стационарлық ағындар, цилиндрлер осі айналасындағы айналуларға және оның бойымен жылжуларға қатысты инвариантты ағындар. Мұндай симметриялық шешімдер барлық R үшін бар, бірақ тек кіші R-де байқалады, ал үлкен R-де олар симметриялы ағындармен емес, ламинарлы ағындарменмен ауыстырылады. Бұл парадокста симметриялы себептер симметриялы салдар тудыруы керек деген берік сенім қарама-қайшылыққа ұшырады. (Екі парадокста да үлкен R-де байқалатын ағындар Пуазейль және Куэт ағындарына қарағанда құбырдың шексіз қашық ұштарында басқаша әрекет ететінін ескерейік, яғни үшін әртүрлі шеттік мәндерді қабылдайды).

Дәлірек айтқанда, белгілі бір R санынан аспайтын R үшін шексіз құйынды жазықтықпен өзара әрекеттесу есебі үшін есептің деректеріне тән симметрияға ие бірегей шешім бар, ал үлкен болатын R үшін мұндай шешім жоқ.

Дегенмен, тұтқыр сұйықтықтың осы және басқа парадокстары Стокс жасаған тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың математикалық моделі шеңберінде жеткілікті қанағаттанарлық түсіндірме таба алатын сияқты болды. Атап айтқанда, Навье-Стокс теңдеулері сызықты емес. Сызықты емес теңдеулер үшін стационарлы емес есептердегі жақсы шешім барлық интервалда болмауы мүмкін екені белгілі. Соңғы уақыт аралығында ол не «шексіздікке» ұласады, не «ыдырап», жүйелілігін жоғалтады, теңдеулерді қанағаттандыруын тоқтатады, тармақтала бастайды. Егер бұл шешім аралығында бар болса, онда ол шекаралық шарттар мен сыртқы әсерлер тұрақтанған кезде стационарлық есепті шешуге бейім болмауы мүмкін. Стационарлық шеттік есептердің өз параметрлерінің кейбір мәндері үшін бірегей шешімі болуы мүмкін, басқалары үшін бірнешеу, ал үшіншілері үшін ешқайсысы да болмауы мүмкін.

Навье-Стокстеңдеулері үшін шеттік есептерді бұрын зерттелгендермен салыстырудан келесі қорытындылардың ұсынылуы ретті болып табылады: Навье-Стокс теңдеулерінің сызықты еместігіне байланысты, стационарлық есеп қандай да бір-ден ең кіші R үшін жалғыз шешімі бар; аралығында бірнеше шешімі болуы мүмкін; ал үшін ешқандай да шешім болмайды. (Шын мәнінде ол есеп деректеріне сәйкес симметриясына негізделген зерттеуші өзі белгілеген симметрияға ие шешімнің болуының тоқталатынын ғана көрсетеді. Бұл есептің симметриялық емес шешімі бар ма, жоқ па, ол да белгісіз.)Стационарлы емес есептің шешімдері, тіпті біркелкі бастапқы режиммен және тегіс сыртқы әсерлермен, олар уақыт өте келе азайып, «тұрақты емес», «турбулентті» режимдерге ауысады, тармақталады және шешімнің бір немесе басқа тармағының нақты орындалуы Навье-Стокс теңдеуінде ескерілмеген бөгде себептерге байланысты болады.

Дегенмен, Навье-Стокс теңдеулерінің нақты сұйықтықтардың қозғалысын сипаттау үшін шын мәнінде не беретінін тексерудің жалғыз жолы, ең алдымен, гидродинамикада олар үшін қойылған шеттік есептердің шешілуіне қатаң математикалық талдау жүргізу. Сығылмайтын сұйықтықтар мұндай талдау үшін ең қолжетімді болып шықты. Олар үшін бірқатар толық нәтиже алуға мүмкіндік туды.

Стационарлық шеттік есептерге келетін болсақ, олардың кез келген R Рейнольдс сандары үшін ең болмағанда бір «жақсы» шешімі (ламинарлық ағынға сәйкес) бар екендігі дәлелденеді, егер сұйықтықтолтырылған аймақтың S шекарасының әрбір оқшауланған компонент үшін келесі шарт орындалса:

.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы.**

Нақтылық принципі және априорлық бағалауларды алу әдістемесі негізделген және жеткілікті түрде егжей-тегжейлі сипатталған.

Диссертациялық жұмыстың нәтижелері қазіргі заманғы ғылыми зерттеулер мен деректерді өңдеу және интерпретациялау әдістерін қолдану арқылы алынды.

Диссертацияның негізгі ойлары:

1. Бағалаулар алынды, мұндағы - серпімді сығылатын ортаның шешімі, u,p – сығылмайтын ортаның шешімі.

дәлелденген.

2. Динамика үшін алынған асимптотикалық бағалар дәлелденді.

3. Жуық шешімнің дәлдігін жақсарту үшін 1/параметрі бойынша Ричардсон экстраполяция әдісін қолдану негізделген.

Дәлелденген ұстанымдар тривиалды емес.

Диссертацияның теориялық және практикалық маңызы бар, өйткені ұсынылған алгоритмдер гидродинамикалық есептерді сандық шешуде қолданыла алады.

Тәжірибе бойынша ұсыныстар жаңа және академиялық жазбаның сапасы жоғары.

Диссертацияда алынған нәтижелер тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтардың ағындарының сандық орындалуына одан әрі қолданылуы мүмкін. Және оларды гидродинамиканың басқа есептерінде қолдануға болады.

**Зерттеу жұмысының сыннан өтуі және мақұлдануы.** Диссертациялық зерттеу жұмысы бойынша 4 ғылыми мақала жарық көрді. Атап айтсақ, ҒЖБМ Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті ұсынған арнайы журналдарда - 3 мақала; скопус базасында индекстелген нөлдік емес импакт факторы журналда (Journal of Theoretical and Applied Information Technology)(E-ISSN 1817-3195/ISSN 1992-8645) Vol.100.No 8– 1 мақала жарық көрген

**Диссертация құрылымы** кіріспеден, алты бөлімнен, қорытынды, пайдаланылған әдебиеттер тiзiмiнен және қосымшадан тұрады.

1. **СҰЙЫҚТЫҚ ДИНАМИКАСЫ**

осыдан Эйлер айнымалыларындағы үздіксіздік теңдеуін табамыз:

(1.1)

Ақырғы көлем үшін массаның сақталу заңын келесі түрде жазу арқылы да осындай қорытындыға келуге болады:

(1.2)

Дифференциалдау жасау арқылы алдыңғысы негізінде келесіні аламыз:

осыдан интегралдау көлемінің еріктілігіне байланысты қайтадан (1.1) теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеудің екі бөлігін де оның ішінде берілген нүктесі бар көлемге бөліп, көлем нөлге ұмтылып және берілген нүктеге қысқарған кезде шекке өту арқылы бірдей нәтиже алуға болады [2].

Бұдан әрі біз тұтас орта механикасының екі түрлі теңдеуін кездестіреміз:

1) кейбір шекті көлемдердегі шамалар мен оларды шектейтін беттер арасындағы қатынасты білдіретін интегралды теңдеу, және

2) шамалардың және олардың туындыларының берілген нүктедегі мәндерін байланыстыратын дифференциалды теңдеу. Интегралдық түрдегі теңдеулердің мысалы ретінде массаның сақталу теңдеуі (1.2) болса, дифференциалдық түрі - (1.1) болып табылады.

Теңдеудің интегралдық түрінен дифференциалдыға өту келесі екі әдістің бірімен жүзеге асырылады: теңдеудің екі бөлігін де көлемнің мәніне бөлу, содан кейін көлемді кеңістікте таңдалған нүктеге дейін қысқарту, немесе барлық интегралдарды бір көлемдік өрнекке келтіру және көлемнің еріктілігіне байланысты интегралдық өрнекті нөлге теңестіру арқылы. Бұл амалдардың екеуі де (1.1) теңдеуді шығаруда ғана қолданылған.

Сұйықтық пен газ динамикасы теңдеулерінің дифференциалдық формасының негізгі ерекшелігі, оларға кіретін шамалардың элементар немесе шекті көлемге қатысты шамалардың өзін емес, массаның, көлемдік және беттік күштердің және т.б. таралу тығыздықтарын бейнелеуінде.

Дифференциалдық формадан интегралдық формаға кері көшу көлем элементіне көбейту және шекті көлемге интегралдау арқылы орындалады.

Интегралдық форма дифференциалдық формадан артықшылығы бар, егер теңдеудегі шамалар орта ішінде үздіксіздіктің үзілуіне ұшыраса. Бұл жағдайда теңдеулердің дифференциалдық формасын сұйық ортамен толтырылған кеңістікте қолдануға болмайды, ал интегралдық формасы сәтті қолданылады.

(1.1) теңдеудегі тығыздықтың уақыт бойыншажеке туындысын оның жергілікті және конвективті туындыларының белгілі өрнегімен алмастыру арқылы:

(1.3)

Одан әрі векторлық талдау формуласын еске түсіре отырып:

соңында біз Эйлер кескініндегі үзіліссіздік теңдеуін ең жиі қолданылатын түрін табамыз:

(1.4)

немесе декарттық координаттарда:

(1.5)

Сығылмайтын сұйықтықтың нақты жағдайында (=const) үзіліссіздік теңдеуі сығылмайтындық теңдеуіне айналады:

=

Сұйық немесе газ қозғалысының негізгі динамикалық теңдеуін шығару үшін көлемгематериалдық бөлшектер жүйесінің қозғалыс шамаларының өзгеруі туралы теореманы қолданамыз. К көлемі бөлшектерінің қозғалыс санының негізгі векторы олардың элементар массаларының dm көбейтінділерінің интегралына және V бөлшектердің жылдамдық векторларының интегралына тең екенін ескеріңіз:

K=

Қозғалыс санының бас векторының жеке туындысын сыртқы массаның және беттік күштерінің бас векторына теңестіре отырып, мынаны аламыз:

(1.6)

Қозғалыс санының бас векторының жеке туындысы мынаған тең:

(1.7)

Өйткені массаның сақталу заңы негізінде екінші интеграл жойылады.

(1.6) оң жағындағы беттік интегралды көлемдік интегралға айналдыру үшін интегралдық формуланың екі бөлігін де х осіне проекциялаймыз және оның ішіне кезек-кезек ах, ау, тең болатын саламыз; сонда одан алатынымыз:

содан кейін бірінші теңдіктің екі бөлігін де i-ге, екіншісін - j-ге, үшіншісін - k-ға көбейтіп және қоссақ, біз мынаны аламыз:

y және z-ке қатысты туындылармен ұқсас есептеулерді қайталай отырып, соңында келесі интегралдық формулалар тобын аламыз:

(1.8)

пайдалана отырып, (1.6) теңдеудегі беттік интегралды келесі түрде қайта жазамыз:

немесе(1.8) бойынша ең соңында:

(1.6)-ға оған енгізілген шамаларға (1.7) және (1.8) формулаларына сәйкесмәндер енгізе отырып және барлық мүшелерді бір жаққа тасымалдай отырып, интегралдық түрдегі тұтас орта қозғалысының негізгі динамикалық теңдеуін аламыз:

(1.9')

немесе т көлемінің еріктілігін пайдаланып және қозғалыс облысының барлық нүктелерінде интегралдық функцияны нөлге теңестірсек, дифференциалдық түрде бірдей теңдеу аламыз:

(1.10)

Бұл векторлық дифференциалдық теңдеу немесе проекциялардағы үш дифференциалдық теңдеулердің эквивалентті жүйесі:

(1.11)

кернеулердегі динамиканың теңдеулері деп аталады және сұйықтық пен газ динамикасының теңдеулерінің әртүрлі жеке түрлерін шығаруда негізгі рөл атқарады [3, 4]. Егер (1.11) теңдеудің сол жағына кіретін жылдамдық проекцияларының уақытқа қатысты жеке туындыларын былай өрнектесек,

онда (1.11) теңдеулерін кеңейтілген түрде жазуға болады:

(1.12)

1. **әЛСІЗ СЫҒЫЛАТЫН СҰЙЫҚТЫҚ**

Әлсіз сығылатын сұйықтықтың стационарлық сызықтық теңдеулері келесідей болады:

(2.1)

(2.2)

(2.2) мұндағы >0 «кіші». (2.1)-(2.2) теңдеулер де серпімділік теориясындағы Ламе стационарлық теңдеулері болып табылады.

Біз (1.1)-(2.2) есебінің әрбір белгіленген > 0 үшін бірегей шешімі болатынын және кезінде Стокс есебі мен шешіміне жақындайтынын көрсетеміз.

Бастапқыда (2.1)-(2.2) теңдеулері Стокс теңдеулері үшін «аппроксимациялаушы» ретінде пайдаланылды — қиындықты жеңудің бір жолы Стокс теңдеулерінің өзін шешудің орнына жеткілікті кіші -мен (2.1)-(2.2) теңдеулерін шешу болды. Қазіргі уақытта Стокс теңдеулерін шешудің көптеген тиімді алгоритмдері белгілі болғандықтан және (2.1)-(2.2) теңдеулерін дискретизациялау өте кіші үшін нашар шартталған матрицаға әкелетіндіктен, керісінше әрекет етуге болады: Стокс теңдеулерін қолдана отырып, кіші үшін есептеу.

Теорема 2.1. - ішіндегі Липшиц шектелген аймағы болсын. Кез келген белгіленген > 0 үшін бірегей элемент (болады, ол (2.1) қанағаттандырады. Егер 0 болса, онда:



нормада (2.3)

нормада (2.4)

мұнда

(2.5)

Дәлелдеу. (2.1)-(2.2) есебінің келесі вариациялық есептерге эквивалентті екенін көрсету оңай болды:

табу

(2.6)

болатындай Шынында да, егер(2.1)-(2.2) қанағаттандырса, онда (2.6)-ды әрбір үшін қанағаттандырады. Үздіксіздігі үшін (2.6) және оған қоса қанағаттандырады. Керісінше, егер

()-(2.6) шешімі болса, онда үлестірімдер теориясы мағынасында (2.1) және із теоремаларының мағынасында (2.2) қанағаттандырады.

(2.6)-ны қанағаттандырушы -нің бар болуы мен бірегейлігі проекциялар теоремасының салдары болып табылады:

W=), a(u,v)= ((u,v))+(div, divv)

< = (

a-ныңкоэрцивтігіжәне a-ныңүздіксіздігіжәне айқын.

(2.3) дәлелдеуүшін (2.1) шегереміз; бұдан шығатыны:

-=grad p (2.7)

сонда

(div

(2.8)

үшін(2.8) теңдеуінің орындалуы (2.7)-ден шығады. Үздіксіздік бойынша (2.8) әр қанағаттандырылады. = (2.8) сала отырып, келесіні аламыз:

сондықтан

(2.9)

Осымен (2.3) дәлелденеді. Енді (2.7) көрсететіні келесі:

(2.10)

нормасында , i=l, …n, өйткені (2.3)-ке сәйкес() кезінде нольге жуықтайды. Төмендегі дәлелденетін леммаға сәйкес,



│p+│ ( p+) (2.11)

болғандықтан, бұл (2.5)-тен және d-де нольге тең болуынан келіп шығады. Осылайша (2.4) жинақтылығы дәлелденді.

Лемма 2.1. - ішіндегі Липшиц шенелген аумағы болсын. Сонда тек-тен тәуелді, с = с(), константасы болады. Ол-нан кез келген үшін



│ │()



(2.12)

Дәлелдеу. (2.12)-нің оң жағындағы фигуралық жақшадағы өрнекті арқылы белгілейміз; -нің ішінде әлдбір норманы белгілейді; шынында да, бұл жартылай норма екені анық, ал егер болса, онда (себебіi = l, . . . , п), және бұл константа нольге тең, өйткені Бұдан әрі константаның бар екені анық, ол мынадай:

(2.13)

Егер біз -нің нормасы бойынша толық екенін көрсетсек, онда тұйық график теоремасы арқылы-нің ішінде және -эквивалентті нормалар болып табылады және (2.12) дәлелденетін болады [5-8].

-нің нормасы бойынша толық екенін дәлелдейік. —осы нормадағы ерікті Коши тізбегі болсын. Сонда интегралдары R ішінде Коши тізбегін құрайды, ал туындылары -нің ішіндегі Коши тізбектері болады:

болғанда (2.14)

болғанда в , . (2.15)

екені белгілі, және (2.15)-ке байланысты,

=0 (2.16)

Біз -ні болатындай етіп таңдай аламыз және тізбегі -нің ішінен [] нормасында элементіне жақындайтынын анық көре аламыз:

Осыдан бастап, (2.5) қанағаттандыратын Стокс есебінің шешімін , (, р орнына) арқылы белгілейміз. асимптотикалық жіктеуге ие екенін көрсетейік:

(2.17)

мұнда барлық -ге тиесіліфункциялары және кейбір көмекші функциялар рекуррентті түрде келесідей анықталады:

, бұрыннан белгілі (2.18)

егер, (m≥1) белгілі болса, онда біртекті емес Стокс есебінің шешімі ретінде анықталады:

(2.19)

-ν∆ (2.20)

div (2.21)

(2.22)

(2.22) шарты екі жағынан пайдалы: ол бірегейлігіне кепілдік береді, әйтпесе тек аддитивті тұрақтыға дейін бірегей болар еді; ол сондай-ақ (m + 1)-ші қадам үшін қажетті сәйкестік шарттарына кепілдік береді:

(2.23)

, арқылы белгілейміз, N ≥1, шамалар [9, 10].

, = nт (2.24)

,=pт. (2.25)

Теорема 2.2. – Rn ішіндегі класының шектелген аймағы болсын. Сонда әрбір m1 үшін uт, рт белгіленген функциялары болады, олар (2.19) – (2.22) қатынастарын қанағаттандырады . → 0 кезіндегі әрбір N0 үшін:

нормасындағы → 0 (2.26)

L2() нормасындағы →0 (2.27)

Дәлел. Бар болу мен бірегейлікті жоғарыда дәлелдедік. (2.20)-ны т=1, … , N-ға көбейтіп, кейін барлық теңдеулерді қосайық. Кейіннен пайда болған теңдеуге және бұрын n және р арқылы белгіленген) қанағаттандыратын теңдеуді қосамыз: . нәтижесінде мынаны аламыз:

.

(2.3)-пен салыстыра отырып, мынаны табамыз:

, (2.28)

(2.29)

(2.8)-дегі дәлел сияқты (2.29)-дың мына теңдеуге эквивалентті екеніне көзіміз жетеді:

) (2.30)

(2.30) ішіндегі деп ойлап, келесіні аламыз:

сондықтан:

(2.31)

(2.31)-тегі теңсіздіктен, әлбетте (2.26) қатынасы шығады. Ал одан өз кезегінде (1/) шығады, сондықтан (2.29) келесіні көрсетеді:

, 1 (2.32)

Дегенмен

бұдан,(2.32) ескере отырып, мынаны шығарамызегер:

div (2.33)

(2.34)

мұнда келесі шартты қанағаттандырады:

(2.35)

және р бар болу мен бірегейлік бұдан әрі белгілі.

Алгоритм кез келген

(2.36)

басталады.

**3 сЫҒЫЛМАЙТЫН СҰЙЫҚТЫҚТЫҢ ҚОЗҒАЛЫСТАРЫН ЕСЕПТЕУДІҢ НЕГІЗГІ САНДЫҚ ӘДІСТЕРІ**

Бұл бөлімде тікбұрышты ақырлы-айырымдық торымен жабылған тұрақты шекаралары бар аймақтағы сығылмайтын сұйықтықтың ағымы туралы есептерді шешудің негізгі сандық әдістері қарастырылған. Мұнда айтылғандардың көпшілігі сығылатын сұйықтықтың ағыны есептерінде де қолданылады, өйткені бірдей модельдік теңдеулер екі жағдайда да тасымалдау теңдеулері үшін қолданылады. Консерватизмнің қасиеті және мұнда анықталған басқа да қасиеттер, шекаралық шарттардың рөлін талқылау, сондай-ақ тұрақтылық пен жинақтылықты зерттеу сығылатын сұйықтықтың ағынының міндеттеріне бірдей қатысты.

Бөлшектерді, жеке есептерді, нұсқаларды және қосымша мәселелерді зерттеуден бұрын гидродинамиканың толық мәселесін шешудің бүкіл процедурасын сипаттау керек. Нақтылық үшін есептеу циклын тек стационарлық емес теңдеулерді шешуге негізделген қарапайым тәсіл үшін сипаттаймыз.

Зерттелетін ағын аймағы ақырлы-айырымдық тормен жабылған. Ақырлы-айырымдық шешімі тор сызықтарының қиылысында орналасқан тор түйіндерінде анықталады.

Шешім t=0 уақыт кезінде тордың барлық түйіндерінде , , және функциялар үшін бастапқы шарттардың қойылатынынан басталады. Бұл бастапқы шарттар нақты бастапқы жағдайға (егер стационарлық емес мәселені шешуге қатысты болса) немесе стационарлық шешімге біршама жақындауға (егер бұл тек тұрақты режим туралы болса) сәйкес келуі мүмкін.

Әрі қарай, есептелетін аймақтың барлық ішкі нүктелеріндегі /tжуықталған анықтама үшін құйын тасымалының дифференциалдық теңдеуінің белгілі бір ақырлы-айырымдық аналогы қолданылған кезде есептеу циклі басталады. Уақыт бойынша құйын тасымалының теңдеуін алға жылжыта отырып, жаңа мәндер уақыттың өсуіне сәйкес келетін жаңа уақыт қабатында есептеледі, мысалы, (жаңа ) = (ескі ) +деп есептесек. Есептеу циклінің келесі қадамы мынау болып табылады (1-сурет).

Басы

Ақырлы-айырымдық тор құрылады

t = 0 кезінде бастапқы шарттар қойылады

Жаңа есептеледі, теңдеуі бойынша ішкі нүктелерде жаңаесептеледі

Барлық нүктелерде жаңақолдану көмегімен теңдеуі бойынша белгіленген жаңаүшін итерациялық жолмен жасалады. Жаңа Vмына формулалармен есептелінеді

және ішкі нүктелерін қолданумен жаңа шекаралық мәндер есептеледі

Уақыттың берілген мәніне қол жеткізіледі немесе шешім белгіленген мәнмен стационарлық мәнге шығады

Шешім соңы

Сурет 1 – Есептеу циклінің блок-схемасы

Есептеу циклінің келесі қадамыток функциясының жаңа мәндерін анықтау үшін Пуассон теңдеуінің ақырлы-айырымдық аналогын шешу болып табылады, бұған қоса теңдеудің дереккөз мүшесінде тордың ішкі түйіндерінде жаңа мәндер қолданылады. Жаңа үшін Пуассон теңдеуі әзірге белгілі емес жаңаүшін шекаралық шарттарына байланысты емес екендігі маңызды.

Әдетте жаңа үшін шешім итерациялық жолмен алынады, сондықтан табу үшін итерациялық процесс жалпы есептеу цикліне енеді. Енді өлшемсіз айнымалылардағы теңдеулердің ақырлы-айырымдық аналогын қолдана отырып, жылдамдықтың жаңа компоненттерін табамыз. Есептеу циклінің соңғы қадамы ретінде қарастырылып отырған аймақтың шекараларында жаңа мәндерді есептеу болып табылады. Әдетте, бұл жаңа шекаралық мәндер аймақтың шекарасына жақын орналасқан ішкі нүктелеріндегі және жаңа (есептелген) мәндерге байланысты болады. Содан кейін есептеу циклі берілген уақыт мәніне жеткенге дейін немесе шешім белгіленген дәлдік деңгейімен стационарға шыққанға дейін қайталанады [11-13].

*Құйынды тасымалдау теңдеуін шешу әдістері.* Құйынның параболалық теңдеуі мен Пуассонның эллиптикалық теңдеуін бөлек қарастыру керек, өйткені оларды шешу әдістері әр түрлі. Алайда, гидродинамика есебін сандық түрде шешкен кезде, бұл теңдеулер арасында кері байланыс бар екенін бірден атап өткен жөн. Мысалы, бұл теңдеулер циклдік түрде шешілетіндіктен, Пуассон теңдеуін итерациялық жолмен шешу кезінде құйынды тасымалдау теңдеуі үшін қолайлы уақыт қадамдарының ұлғаюы итерация санының артуымен өтелуі керек. Бір теңдеудегі шекаралық шарттарды дұрыс қолданбау екіншісіндегі жинақтылықтың бұзылуына әкелуі мүмкін.

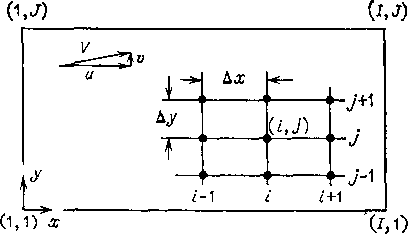
Одан да басты жағдай, ол шешімді ішкі нүктелерде табуды шекаралық шарттарды есептеуден жасанды түрде ажырату керектігі болып табылады, өйткені бұл екі процедура да бірге орындалуы керек. Дегенмен, шешімді бір нәрседен бастау керек.

Құйынды тасымалдау теңдеуін шешу әдісін түпкілікті таңдау көптеген факторларға байланысты.

Бұл бөлімнің мақсатыәдістердің кластарын анықтау, осындай кластардың әрекеттерін зерттеу және осы әдістерді зерттеу жолдарын көрсету, яғни, жалпы алғанда, оқырманға әдістерді бағдарламалауды емес, орнына әдістерді түсінуге үйрету.

*Кейбір негізгі ақырлы-айырымдық формулалары. Тейлор қатарына жіктеу.*Жеке туындылар үшін ақырлы-айырымдық формулаларын Тейлор қатарына жіктеу арқылы алуға болады. Пайдаланылған тікбұрышты тор 2-суретте көрсетілген,i және j төменгі индекстері х және у-ке тиесілі, ал жоғарғы n индексі уақыт қабатына сәйкес келеді. i және j бағыттарындағы тор қадамдары сәйкесінше х және арқылы белгіленеді. f айнымалысы кез-келген функцияны білдіреді.





Сурет 2 – Тікбұрышты ақырлы-айырымдық тор

Бірінші туынды үшін бір жақты айырымдық көріністерінің формаларын келесідей алуға болады. Біз туындылардың үздіксіздігін болжаймыз және Тейлордың қатарына (i,j) нүктесінің маңайында орналастырамыз. Жоғарғы индексті (уақытша) қарапайымдылық үшін алып тастаймыз. Сонда:

*+…=* (3.1)

мұнда ЖРМ деп белгіленген қысқарту жоғары ретті мүшелерді білдіреді.

қатысты (3.1) шеше отырып, одан алатынымыз

│

немесе:

(3.2)

мұндағы жазбасы былай оқылады: « ретті мүшесі» және , және т.с.с көбейткіштері бар мүшелерге қатысты.

f/х ақырлы-айырымдық аналогын арқылы белгілейік. Сонда алға қарай айырымдық аппроксимация кезіндегі үшін мына өрнекті аламыз:



= (3.3)

ретті аппроксимация қатесімен, яғни бірінші ретті дәлдікпен.

нүкте маңайындағы жіктей отырып, кері қарай айырымдық аппроксимация кезіндегі үшін келесі өрнекті аламыз:

(3.4)

Ол да бірінші ретті дәлдікке ие. орталық (симметриялық) айырымдық аппроксимациясы жіктеу айырмалары ретінде пайда болады:

+ (3.5)

және

+ (3.6)

(3.6)-дан (3.5) шегере отырып, алатынымыз:

қатысты есептей отырып, келесі болады:

(3.7)

Осылайша, орталық айырымдық аппроксимацияның беретіні:

(3.8)

ретті аппроксимация қатесімен, яғни екінші ретті дәлдікпен. Нақ осы жолмен және туындылары үшін өрнек алуға болады, мысалы, орталық-айырымдық аналог келесі түрде болады:

(3.9)

Енді орталық-айырымдық аналог алып шығарайық (3.5) және (3.6)-ны қоса отырып, алатынымыз:

(3.10)

қатысты (3.10)-ды есептей отырып, алатынымыз:

(3.11)

(3.11)-ден үшін келесі болады:

(3.12)

Екінші ретті дәлдікпен.

Екінші ретті дәлдікпен.

қолдансақ (3.8) формуласы мына түрге енеді:

(3.13)

ал, мына түрде жазылады:

(3.14)

(3.14) формуласы бойынша анықталған үздіксіз функцияларүшін ережені қанағаттандыратынын ескереміз.Барлық нәрселер тең болған кезде, ақырлы-айырымдық теңдеулері дифференциалдық теңдеулердің сапалық әрекетін жақсы модельдеген жөн. Осындай көптеген жағдайлар төменде атап өтіледі [14, 15].

Жеке туынды үшін алынған ақырлы-айырымдық өрнектердің комбинацияларын жеке туындылардағы дифференциалдық теңдеулердің формулаларын жазу үшін қолдануға болады (3-сурет).

Сурет 3 – Лаплас теңдеуінің бес нүктелі аналогының схемалық көрінісі;

= х/. Сол жақ схема ерікті мәнге сәйкес келеді-, оң жағы– =1



Мысалы, Лаплас теңдеуі = 2𝑓/2 + д2/ду2 = 0 айырымдық аналогқа ие болады:

+ = + = 0,

немесе

(3.15)

мұнда – қадамдардың өлшемдерінің қатынасы, = х/у. Бұл аталмыш Лаплас теңдеуінің бес нүктелі аналогы. = 1 үшін белгілі теңдеу шығады:



= ( (3.16)

Демек, деген төрт көршілес нүктелердегі 𝑓-тің орташа мәні екенін білдіреді. Бұл формулалар сызбалық түрде 3.2-суретте бейнеленген.

Кеңістіктік туындылар мен уақыт туындысын жуықтау үшін екінші ретті дәлдік айырмашылық өрнектерін қолдана отырып, (3.18) сызықтық модельдік теңдеуді жазуға болады:

(3.17)

Ол -ді алдыңғы уақыт қабаттарындағы айнымалылардың мәндері арқылы нақты білдіруге мүмкіндік береді.Алайда, мұндай схема іс жүзінде қолайсыз.Барлық және мүмкін болатын үшін бұл схема сандық тұрақсыз, яғнидифференциалдық теңдеуді шешуге қатысы жоқ хаотикалық шешімдердің пайда болуына әкеледі. Бұндай әрекет туындылар үшін нақты ақырлы-айырымдық аналогтар мен дифференциалдық теңдеудің нақты аналогы арасындағы айырмашылықты көрсетеді.

Егер стационарлық емес мүшедегі орталық айырмашылықтардың орнына уақыт бойынша алға қарай айырмашылық қолданылса, онда кеңістіктік айнымалы бойынша екінші және уақыт бойынша тек бірінші ретті дәлдікті қамтитын сызықтық модельдік теңдеудің айырмашылық аналогы алынады:

(3.18)

Бұдан әрі бұл схема тұрақты екендігі көрсетіледі (, және және -ке жүктелген кейбір жағдайларда). Бірақ тұрақтылықты зерттеуді бастамас бұрын, ақырлы-айырымдық теңдеулеріне қатысты басқа да мәселелерді қарастырамыз.

*Негізгі ақырлы-айырымдық формулалары; полиномиальды аппроксимация*. Ақырлы-айырымдық өрнектерін алудың тағы бір әдісі тордың түйіндеріндегі мәндерге негізделген, содан кейін аналитикалық түрде сараланатын еркін параметрлері бар жуықтау аналитикалық функциясын қолдануға негізделген. Бұл эксперименттік мәліметтер бойынша туындыларды табудың әдеттегі әдісі. Ең дұрысы, жуықтау функциясының түрін жуық аналитикалық шешіммен анықтау керек, бірақ әдетте полиномдар жуықтау функциялары ретінде қолданылады. Біз параболалық аппроксимация мысалында нақты әдісті көрсетеміз.

функцияның мәндері , i және нүктелерде берілген делік, және функцияның параболалық аппрксимациясын жүргізейік:

f (х) = а + bх + сх2, (3.19)

сонымен қатар, ыңғайлы болу үшін (X = 0) координаталардың басы ретінде i нүктесін аламыз. Сонда i-1, i және i + 1 нүктелерінде сәйкесінше жазылған (3.19) теңдеуіберетіні келесі:

, (3.20)

Осы теңдіктердің бірінші және соңғысын қосу арқылы, біздің алатынымыз:

(3.21)

оларды b -ға қатысты шеше отырып, біздің табатынымыз:

(3.22)

iнүктеде (3.19)-дағы бірінші туындының мәні былай болады:

(3.23)

ал екінші туындының мәні:

(3.24)

(3.23) және (3.24) формулалары (3.21) және (3.22) ескере отырып, екінші ретті (3.8) және (3.12) формулаларымен Тейлор қатарына жіктеу арқылы алынған орталық айырмашылықтармен дәл сәйкес келеді. Егер бірінші дәрежелі полином, яғни деп ойласақ, онда а және bанықтау үшін қандай мәндер қолданылатынына байланысты:және немесе және мәндер, үшін сәйкесінше алға немесе кері айырмашылықтары бар формулалар алынады. Сызықтық аппроксимация кезінде үшін өрнекті алу мүмкін емес екені анық. Алайда, егер алғашқы туындылардың айырмашылық аналогтарын құру үшін сәйкесінше алға және кері айырмашылықтармен ұсынылған бірінші дәрежелі полином қолданылса, онда үшін орталық айырмашылықтармен (3.12) өрнекке сәйкес келетін өрнек аламыз.

Жоғары ретті туындыларға арналған айырмашылық формулалары жоғары реттік полиномдар көмегімен шығарылады. Екіншіден жоғары реттік полиномдар көмегімен алынған өрнектер енді Тейлор қатарындағы жіктеу арқылы алынған өрнектермен бірдей емес, және әр жағдайда жуықтау қатесі Тейлор қатарына жіктеу арқылы тексерілуі керек. Есептеу гидродинамикасында полиномиялдық жуықтау әдісі, әдетте, тек шекараларға жақын туынды шамалардың сандары үшін қолданылады [16].

Сонымен, графигі бір сызықта дәл орналасқан жеті нүктеден өтетін алтыншы дәрежелі полином 4а-суретте көрсетілген түзу түрінде аппроксимацияға әкеледі.

а

ә

а – алгебралық идеалды мәліметтер; ә – шу ауытқулары бар мәліметтер

Сурет 4 – Алтыншы ретті полиномиалды аппроксимация

Алайда, аппроксимацияланатын мәндерге шу ауытқулары қосылған кезде полином коэффициенттері осы бұрмаланған деректермен анықталады, содан кейін нүктедегі туындыларды аналитикалық есептеу абсурдтық нәтижелерге әкелуі мүмкін, оны 4ә-суреттен көруге болады.

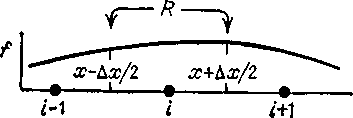
Квадраттық аппроксимация қарастырылған мәліметтерде иілу нүктесінің болуын көрсете алмайды, яғниболатын нүктелер. Осы себепті, үшінші ретті полиномиялдық аппроксимацияларды қолдану қолда бар деректерді талдау үшін негізделуі мүмкін. (Көбінесе бір түйіндік нүктеден екіншісіне ауысу кезінде туындылардың үздіксіздігін қамтамасыз ететін сплайн функциялар қолданылады.) Біздің жағдайда қарастырылып отырған физикалық құбылысты сипаттайтын теңдеулер иілу нүктесінің болуына немесе үшінші туындыға тәуелді емес, сондықтан бұл мәселеде тоқтаудың қажеті жоқ.

*Негізгі ақырлы-айырымдық формулалары; интегралдық әдіс.* Интегралдық әдісте дифференциалдық емес, интегралдық түрде жазылған негізгі теңдеулерді қанағаттандыру қажет. Кеңістіктік координат үшін х төменгі индексін, ал уақыт үшін *t* жоғарғы индексін сәйкесінше i және nорнына пайдалану ыңғайлы. Сызықтық модельдік теңдеуді консервативті түрде жазамыз:

α (3.25)

5-суретте көрсетілгендей, бұл теңдеуді уақыт бойынша t-дан t+-ге дейін және R кеңістіктік аймақ бойынша х –х/2-ден х +х/2-ге дейінинтегралдау жасаймыз. Себебі t және х бойынша интегралдау реті интегралдау әдісі





Сурет 5 – Интегралдық әдіс үшін R интегралдау аймағы

маңызды емес, біз оны бір дәл интеграцияны жасай алатындай етіп таңдаймыз, атап айтқанда:

(3.26)

Біз квадрат жақшада жазылған өрнектерді біріктіреміз:

(3.27)

Қалған интегралдар сандық түрде анықталады. Орташа теорема бойынша жазуға болады:

мұнда []. Жинақтылық 0 кезінде кепілдендірілген. (3.27) теңдеуінің сол жағындағы интегралдарды жуықтап есептеу кезінде х орташа нүктесін, ал оң жағында төменгі шегі бар интегралдық функциялардың мәнін, яғни t (тіктөртбұрыштардың формуласы) ала отырып, мынаған жетеміз:

(3.28)

туындыларын мына қатынастан табуға болады:

.

мәнін орташа арифметикалық ретінде есептеп алуға болады

Бұдан, орташа теоремасын пайдаланып, мынаны аламыз немесе

(3.29)

арифметикалық:

; (3.30)

Ұқсас өрнек үшін де орынды(3.29) және (3.30)-ды (3.28)-ге қоя отырып, мынаны аламыз:

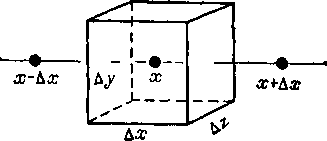
Соңғы теңдеуді , бөлу арқылы, одан алатынымыз:

(3.31)

i және n индекстеріне ауыса отырып, (3.31) теңдеуі Тейлор қатарындағы жіктеу арқылы алынған (3.18) теңдеуімен сәйкес келетінін көреміз. Әрине, кез-келген әдіспен ақырлы-айырымдық теңдеулерін шығаруда үлкен озбырлық бар.Егер, мысалы, уақыт бойынша t-дан t+ t- t+ және орташа нүкте ретінде t алсақ, онда (3.17) теңдеуі шығады. Жоғарыда айтылғандай, бұл теңдеу сөзсіз тұрақсыз.

Интегралдық әдістің артықшылығын консерватизмнің қасиеті зерттелгеннен кейін бағалауға болады. Интегралдық әдіс пен Тейлор қатарларына жіктеу әдісінің арасындағы айырмашылық тікбұрышты емес координаттар жүйесін қолдану кезінде айқын көрінеді.

*Бақылау көлемі әдісі.*Ақырлы-айырымдық теңдеулерін алуға арналған бақылау көлемі әдісі интегралдық әдіске өте ұқсас,бірақ одан гөрі физикалық. Бұл әдіс "сандық модельдеу" процесін айқын көрсетеді. Бұл тәсілдің ең жақсы мысалдары кеңінен танымал ұяшықтардағы бөлшектер әдісі (PIC әдісі) және ұяшықтардағы сұйықтық әдісі болып табылады:



Сурет 6 – Х нүктесіндегі бақылау көлемі

6-суретте көрсетілгендей, x нүктесінде центрі бар кеңістіктегі бақылау көлемін таңдаймыз.

Тордың түйіндік нүктесіндегі мән ретінде біз осы функцияның орташа мәнін бақылау көлемі(БК) бойынша аламыз. меншікті мән (яғни, көлемі бойынша орташаланған) үшін, мұндағы енді кез-келген айнымалы мән ретінде қарастыруға болады. = Г/көлем деп жазайық.

Мысалы, егер -р-дің тығыздығы болса, онда Г–х нүктесіндегі орталықпен берілген бақылау көлемінінің ішіне енгізілген толық масса. Егер –құйын болса, онда Г циркуляцию болып табылады.Енді келесі сақтау заңының ауызша тұжырымын жазамыз:

БК-дегі Г мәнінің толық өсімі = Конвекции есебінен БК-дегі Г-ның таза ағыны + Диффузия есебінен БК-дегі Г-ның таза ағыны.

Г мәнінің толық өсімі = уақыт аралығындағы БК-дегі X (көлем) тең:

*X (*

Уақыт бірлігіне сол жақ сызық арқылы БК-не енетін Г мәнінің конвективті ағыны:

(аудан) = ,

мұнда и айнымалы болуы мүмкін, ал х–х/2 жағының функциялар мәні, оларды әлі де анықтау керек, ішінде қандай да бір орташалар болуы керек. Уақыт бірлігі ішінде ағып жатқан конвективті ағыстың осы шамасына сүйене отырып, х жағы арқылы уақыт аралығында БК-дегі Г мәнінің толық конвективті ағысын былай жазуға болады:



Солсияқты,х + х/2 арқылы БК-нен ағып шығатын Г толық конвективті ағысымынаған теңболады:



ал БК-не Г-ның құйылуы жалпы құйылатын ағысы мен жалпы шығатын ағысының айырмашылығы ретінде алынады, яғни:

[ - ]

Диффузия есебінен БК-дегі ағысты есептеу үшін диффузия жылдамдығының заңы болуы керек. Мұндай қарапайым заң (құйынның тасымалдану теңдеуіне сәйкес келеді) сызықтық болып табылады және q деп атайтын уақыт бірлігіне ζ шамасының диффузиялық ағысы ζ градиентке пропорционал екенін айтады. (Фик Заңы):

q = -α

мұнда минус x бағытындағы ζ-нің ұлғаюы қарама-қарсы бағытта диффузияны тудыратынын көрсетеді.

Уақыт бірлігіндегі сол жақ бет арқылы БК-не құйылатын диффузиялық ағыс мынаған тең

q

ал уақыт бірлігі ішінде оң жағы арқылы БК-нен ағып шығатын ағыс мынадай:

q

мұнда уақыты ішіндегі x ± х/2 жақтар қандай да бір орташаларды білдіреді, олар әлі де анықталу керек. уақыт аралығындағы диффузия есебінен БК-дегі ағыс шамасы тең:



α

Осы өрнектерді қолдана отырып, конвекция мен диффузияның бір өлшемді жағдайы үшін ауызша тұжырымдалған сақтау заңын келесідей жазуға болады:

(3.33)

-ке бөлу арқылы алатынымыз:

(3.34)

Интегралдық әдіс сияқты, ақырлы-айырымдық өрнектерін одан әрі шығару кезінде көлемнің шеттеріндегі функциялардың мәндерін анықтауда белгілі бір әрекет еркіндігі пайда болады. Көлемнің жағындағы мәндер ретінде п уақыт кезіндегі көрші түйіндердегі арифметикалық орташа мәнді алуға болады; сонда

және градиенттер:

орталық айырмашылықтарды пайдаланып есептеуге болады:

Нәтижесінде (3.34) теңдеуі келесі түрде болады:

Немесе

. ( 3.35)

Егер *i және n*индекстеріне оралсақ, онда бұл теңдеу бұрын алынған теңдеумен сәйкес келеді (3.18).

Осылайша, жеке туындылардағы дифференциалдық теңдеулердің ақырлы-айырымдық аналогтарын шығарудың барлық төрт әдісі – Тейлор тізбегіне жіктеу, полиномиалды аппроксимация әдісі, интегралдық әдіс және бақылау көлемі әдісі бірдей айырмашылық өрнектеріне әкелуі мүмкін екендігі байқалады. Бұл барлық осы әдістерге сенімділік арттырып, үміттендіреді. Бірақ олардың әрқайсысында белгілі бір әрекет еркіндігі бар, сондықтан дифференциалдық теңдеудің ақырлы-айырымдық аналогын шығару әдісін таңдау бұл аналогты жалғыз жолмен анықтамайды. Шынында да, қолданылатын аналогтар көп. Олардың көпшілігі кішігірім бөлшектерде ерекшеленетініне қарамастан (бейхабарларға солай көрінуі мүмкін), олар әрекеттері бойынша қатты ерекшеленуі мүмкін. Автордың жеке пікірі бойынша, есептеу гидродинамикасының таңғажайып аспектілерінің бірі-бұл шындыққа үйлесетін схемалардың болуы, алайда олар (3.17)-де көрсетілгендей жұмыс істемейді. Бұл негізгі (яғни ішкі нүктелерді есептеуге арналған) айырымдық схемларға да, сол сияқты шекаралық нүктелерді есептеуге арналған схемаларға да қатысты [17].

Бақылау көлемі әдісінің артықшылығы оның қандай да бір қасиетімен емес, белгілі бір мағынада ең жақсы болуымен анықталады. Бұл әдістің артықшылығы – үздіксіз функциялардың математикалық аппаратын қолдануға емес, макроскопиялық физикалық заңдарға негізделгендегінде болып табылады. Бұл әсіресе сирек кездесетін газдармен немесе соққы толқындары бар тұтқыр емес газ ағындарымен айналысқан жағдайларда өте маңызды. Мұндай жағдайларда дифференциалдық теңдеулерде барлық жерде үздіксіз шешімдер болмайды, оларды әр нүктеде Тейлор тізбегін ұсынуға болады. Алайда, мысалы, масса әлі де сақталады және теңдеудің конвективті бөлігі (3.35) әлі де әділ болып қала береді. Бірақ үздіксіз шешімдер болған жағдайда да, бақылау көлемінің әдісінде назар нольге ұмтылатын х и академиялық шекте ғана емес, сондай-ақ макроскопиялық физикалық заңдардың нақты орындалуына да аударылады. Бұл ақырлы-айырымдық әдісінің консервативті тұжырымдамасының негізінде жатыр, біз оны талқылауға көшеміз.



*Консервативтілік қасиеті.*Ақырлы-айырымдық әдісі, егер ол бастапқы дифференциалдық теңдеулер үшін жарамды белгілі бір интегралды сақталу заңдарының орындалуын қамтамасыз етсе, консервативті болып табылады.

1/Re= деп есептей отырып, құйынды тасымалдау теңдеуін қарастырамыз:



-. (3.36)

Бұл теңдеуді белгілі бір R кеңістіктік аймаққа интегралдаймыз:

. (3.37)

t кеңістіктік айнымалыларға тәуелді емес болғандықтан, бізде келесі болады:

. (3.38)

Остроградский-Гаусс формуласын қолдана отырып, біздің алатынымыз:

. (3.39)

мұнда дR –R шекарасы;

п – бетке нормальдің бірлік векторы (оң бағыт сыртқы нормальға сәйкес келеді) және

ds –дR доға шекарасының дифференциал ұзындығы. Сол сияқты, осы (3.40) формула бойынша:

. (3.40)

Сонда (3.37) теңдеу келесідей түрге ие болады:

(3.41)

(3.41) теңдеуі R аймағында шаманың жинақталу жылдамдығы бір бірлік уақыт аралығында арқылы R ішінде шамасының конвективті және диффузиялық ағындарының қосындысына тең екенін көрсетеді. Консервативтіліктің талабы – ол осы интегралдық арақатынастың ақырлы-айырымдық схемасында бірдей сақтау болып табылады.



Қарапайымдылық үшін (3.36) теңдеуден алынған тұтқыр емес сұйықтықтың шекті жағдайы үшін бір өлшемді модельдік теңдеуді қарастырамыз және ол келесідей түрде болады:

(3.42)

(Егер басқа тараптаншамасын массалық тығыздық ретінде түсіндірсе, онда (3.42) теңдеуі сығылатын орта үшін үзіліссіздік теңдеуі болады.) Уақыт бойынша алға қарай айырмашылықтарын және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтарды қолдана отырып, (3.42) теңдеуінің ақырлы-айырымдық аналогын келесі түрде жазуға болады:

(3.43)

(мұнда қарапайымдылық үшін пжоғарғы индексі алынып тасталды). Енді бір өлшемді R аймағын қарастырайық (және i-ден -ге дейін өзгереді) және соманы есептейміз:

(3.41) теңдеуіндегі интегралға сәйкес келетін

(3.44а)

Оң жақтағы сомалау келесі түрде болады:

(3.44б)

Сонда (3.44а) теңдеуі келесі түрге ие болады:

(3.44в)

Бұл теңдеу R аймағында шаманың жинақталу жылдамдығының шекаралары арқылы R аймағындағы шаманың ағынына дәлме-дәл тең екенін көрсетеді (бұл (3.41) теңдеуінен де шығады, = 0 кезінде). Осылайша, алынған ақырлы-айырымдық аналогы дифференциалдық теңдеу үшін Остроградский — Гаусс формуласының білдіретін интегралдық қасиетін сақтайды және біз бұл аналогтың консервативтілік қасиеті бар деп айтамыз [9, с. 37-68].

Консервативтілік қасиеті дифференциалдық теңдеудің қолданылатын формасына да, қабылданған ақырлы-айырымдық схемасына да байланысты. Мысалы, = 0 кезінде бір өлшемді модельдік теңдеудің консервативті емес формасы келесідей:

(3.45)

Алдыңғы мысалдағыдай схеманы, яғни уақыт бойынша алға қарай және кеңістіктік айнымалы бойынша центрлік айырмашылықтардықолдана отырып, біздің алатынымыз:

(3.46)

Сонда (3.44а)-ке сәйкес келетін сомалардың түрі келесідей:

(3.47а)

Снова суммируем:

+

++

+…. (3.47б)

Демек, бастапқы дифференциалдық теңдеудің бұл түрінде іргелес ұяшықтардың шеттері арқылы ағыстарға сәйкес келетін мүшелер өзара жойылмайтынын көруге болады, мысалы:

(+2.) 0, (3.47в)

жеке жағдайды қоспағанда, = const болғанда. Сонымен, бұл жағдайда, ақырлы-айырымдық аналогы дифференциалдық теңдеу үшін Остроградский-Гаусс формуласының орындалуын қамтамасыз ете алмайды.

Бірінші жағдайда консервативтілік ақырлы-айырымдық өрнектерді шығару кезінде бақылау көлемінің әдісін қолдану арқылы қамтамасыз етіледі. Консервативті форманы пайдалану кезінде уақыт бірлігінде нүктесінде орталығы бар бақылау көлемінен i+ жағы арқылы ағатын шаманың конвективті ағыны (+) құрайды және дәл сол сызық арқылы уақыт бірлігі нүктесінде орталығы бар бақылау көлеміне өтетін конвективті ағынға тең болады. Жоғарыда көрсетілгендей, консервативті емес нысанда бұл орынды болмас еді.

> 0 кезінде жалпы жағдайда жалпы ағыстың сақталуын қамтамасыз етудің жалғыз жолы (кеңістіктік айнымалының функциясы болған кезде) конвективті және диффузиялық мүшелерді тәуелсіз сақтау болып табылады; біркелкі емес жағдайда әр кеңістіктік айнымалы үшін осы мүшелердің консерватизмін қамтамасыз ету қажет.

Консервативтілік қасиетінің маңыздылығын сығылатын орта үшін үздіксіздік теңдеуінің мысалынан түсінуге болады. Өткізбейтін қабырғалары бар толығымен жабық ыдыстағы табиғи конвекция мәселесін қарастырамыз. Уақыттың бастапқы сәтінде біз барлық көлемде V = 0 деп санаймыз. Жылу ыдыстың төменгі қабырғасына жеткізіледі және табиғи конвекция жүреді, мүмкін стационарлық күйге де жетеді. Егер есептеулер үшін консервативті емес схема қабылданса, онда зерттелетін көлемдегі толық масса өзгереді. Егер консервативті схема қолданылса, онда толық масса өзгермейді. Бірінші жағдайдағы бір жұбаныш-бұл массаның сақталуының бұзылуынан туындаған қателіктер х0 кезінде азаяды, бірақ х соңғы шамасы бар практикалық есептеулерде мұндай жұбаныш әлсіз.



Консервативтілік қасиеті схеманың дәлдігін арттырумен ғана байланысты емес. Мысалы, консервативті теңдеулердің тұрақсыз шешімдері консервативтілік қасиетін сақтайды. Сонымен қатар, консервативті емес әдіс белгілі бір мағынада консервативті болуы мүмкін. Мысалы, функцияларды тор түйіндеріндегі мәндер бойынша көрсету үшін жоғары ретті полиномдармен бір өлшемді аппроксимацияларды қолдануға болады, ал кеңістіктік айнымалылардың туындылары жоғары ретті қатемен анықталуы мүмкін. Алайда, осылайша салынған схема консервативті емес болуы мүмкін, ал егер дәлдік критерийі консервативті жағдайды қамтыса, консервативті емес схема дәлірек болмайды.

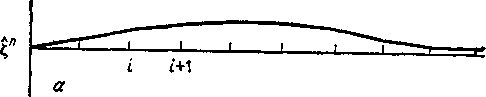
Осы уақытқа дейін тәжірибе көрсеткендей, консервативті схемалар дәлірек нәтиже береді. Консервативті схеманың көмегімен Бюргерс теңдеуінің и кейбір шешімдері үшін едәуір дәл нәтижелер алынады. Эллиптикалық теңдеулер үшін консервативті схема консервативті емес теңдеулерге қарағанда дәлірек нәтиже береді. Торранстың бір жылжымалы шекарасы бар жабық тікбұрышты аймақтың ішіндегі ағын есебінің мысалында консервативті түрдегі теңдеулер үшін дәлдіктің бірінші ретті схемасы консервативті емес түрдегі теңдеулер үшін екінші ретті схемаға қарағанда дәлірек нәтиже беретініне көз жеткізді. Соққы толқындарды теңдеулердің консервативті формасымен есептеудің артықшылықтары белгілі, бірақ Гаридің еңбегінде сирек кездесетін толқындар консервативті емес схемаға сәйкес дәлірек есептелгенін атап өткен жөн. Сонымен қатар, теңдеулердің дивергентті формасы физикалық тұрғыдан мағыналы және сығылатын сұйықтық ағындарының шекаралық жағдайларын орнатуды жеңілдетеді.

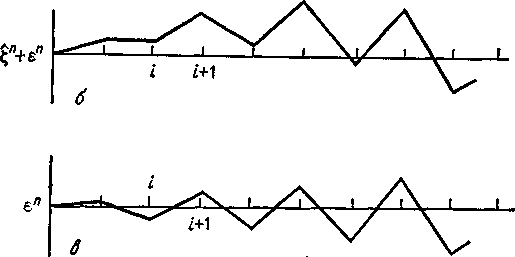
Метеорологтар консерватизм идеясын қозғалыс мөлшеріне байланысты шамаларға таратты. Брайен құйынның ғана емес, кинетикалық энергияның да сақталуын қамтамасыз ететін схемаларды ұсынды. Аракава тізбегі құйынды, құйынның квадратын, қозғалыс мөлшерін және кинетикалық энергияны сақтайды. Бірақ схемалардың мұндай қосымша қиындықтары әрдайым ақталмайды және пайдалы емес. Мұндай күрделі схемалар шынайы мәліметтерге қатысты шамалы жақсартулар береді және сонымен бірге толқын жылдамдығында үлкен қателіктерге әкелуі мүмкін. Алайда, шектеулі тұтқыр емес жағдайда кинетикалық энергияны сақтау кинетикалық энергия мен (метеорологиялық) толық статикалық тұрақтылық арасындағы айырмашылықты сақтайтын "сызықты емес" тұрақсыздықты болдырмауға мүмкіндік береді, бұл үлкен ауырлық градиенттері бар есептерде пайдалы.

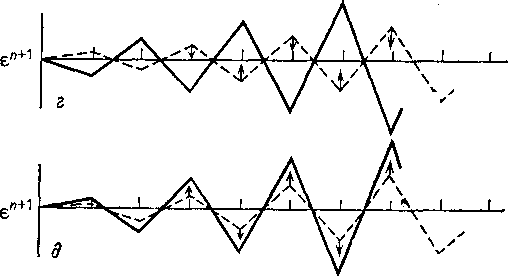
Әдетте құйын, масса, қозғалыс мөлшері немесе жалпы энергия сияқты негізгі шамалардың сақталуын қамтамасыз ететін схемалар көп еңбекті қажет етпейді. Құйынды тасымалдау туралы екі өлшемді есепте қосымша жұмыс ток функциясы мен екі қосымша көбейту үшін шешімнен жылдамдықты құрайтын екі қосымша ақырлы-айырымдық операцияларын орындау болып табылады. Сығылатын ортаның қозғалысы туралы есептерде қосымша жұмыс көп, бұл кейбір жағдайларда консервативті схеманы қолданудан бас тартуға себеп болуы мүмкін. Сипаттама әдісінің барлық схемалары консервативті емес екенін және шекара қабатының ақырлы-айырымдық теңдеулерін әр түрлі шешуде консервативті схема әдетте қолданылмайды. Мұндай жағдайларда консервативті қасиет есептеулердің дәлдігін тексеру үшін қызмет ете алады.

Консервативті схемалардың фетишизациясынан сақтану үшін, ауыспалы диффузия коэффициенті бар мүшеге арналған консервативті емес форма консервативті емес нәтижеге әкелуі мүмкін деп қорытынды жасаймыз.

*Тұрақсыздықтың сипаттамасы.* Сандық тұрақсыздықтың кейбір феноменологиялық аспектілерімен танысу мақсатында үшін бір өлшемді сызықтық теңдеуді қарастырамыз. 7а-суретте п уақыт қабатындағы стационарлық шешім және 7б-суретте ауытқуының -ке қабаттасуы көрсетілген, ал оның формасы 7в-суретте ұсынылған. Мұндай ауытқулар дөңгелектеудің машиналық қателерінен немесе нақты екі өлшемді есептегі көлденең қозғалыстардан туындауы мүмкін. Уақыт бойынша алға қарай айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схеманы қолдана отырып, қабаттасқан ауытқудың дамуын қадағалаймыз.







а – уақыт бойынша n-ші қабаттағы стационарлық шешім; б – n-ші қабаттағы ауытқу шешімі; в – n-ші қабаттағы ауытқу; г-тым үлкен қадаммен (динамикалық тұрақсыздық) байланысты қатенің тербелмелі өсуі; д-конвективті мүше үшін орталық айырмашылықтарды қолдануға байланысты қатенің монотонды өсуі (статикалық тұрақсыздық)

Сурет 7 – Конвекция мен диффузияны сипаттайтын модельдік теңдеу үшін уақыт бойынша айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтармен ақырлы-айырымдық схемасын қолданудағы қатенің өсуі

Консервативті түрдегі сызықтық модельдік теңдеу келесідей:

Ал айырмашылықтың түры – келесі:

= -+ (3.48)

шамасын стационарлық компонента пен ауытқуының сомасы ретінде елестетейік:

(3.49)

осыдан кейін (3.48) теңдеу келесідей жазылады:

(3.50)

(3.50) теңдеуінің оң жағындағы алғашқы екі мүшенің қосындысы n-ші уақыт қабатында стационарлық шешім бар деген болжамға байланысты нөлге тең болатын ақырлы-айырымдық мәні болып табылады. Содан кейін (3.50) теңдеу келесідей болады:

(3.51)

(3.51) теңдеуінің оң жағындағы бірінші мүше конвекцияға байланысты өзгерісті береді, ал екіншісі диффузияға байланысты.

(3.51) теңдеуді тек бір диффузиялық мүшемен қарастырып, оны i нүктесінде бағалайық. болғандықтан, келесідей өрнек болады:

(3.52)

Демек, барлық үшін өсім оң болады және теріс ауытқуды түзетуге ұмтылады.

Сол сияқты, i+1 нүктесінде -ді қарастыра отырып, бізде болатыны , ; сондықтан:

(3.53)

яғни, оң ауытқу теріс өсу арқылы түзетіледі.

(сондай-ақ ) өсімі қадамға пропорционалды. Егер қадам тым үлкен болса, онда өсім есебінен түзету шамадан тыс болады. Мұндай тым үлкен үшін жаңа шамасы 7г-суретте көрсетілгендей бастапқы ауытқудан үлкен болады:

(3.54)

Және сондай

(3.55)

Уақыттың шамадан тыс үлкен қадамынан туындаған өсіп келе жатқан амплитудалық осцилляциялардың пайда болуы динамикалық тұрақсыздық деп аталады, оны «уақыт бойынша қандай да бір критикалық қадамнан» аз ете отырып, уақыт бойынша қадамның азаюы арқылы жоюға болады.

Енді (3.51) теңдеуді тек бір конвективті мүшемен қарастырайық. Бұл теңдеуді нүктеде бағалайық және i> 0 деп есептейміз. Ауытқу бойынша өзгереді деп есептейік және оның амплитудасы -дің өсумен бірге өседі делік. Сондықтан > 0, және> 0, > және:

(3.56)

Яғни конвекцияға байланысты өсім тіпті <0 кезінде де теріс болады. Бұл қателіктің біркелкі өсетінін білдіреді (3.6. суретті қараңыз). Мұндай өспелі қателіктің пайда болуы статикалық тұрақсыздық деп аталады, оны уақыт қадамының азаюымен жоюға болмайды және кез-келген басқа айырмашылық схемасына көшу арқылы ғана жоюға болады.

Егер өсудің кеңістіктік бағыты i-ге қатысты 3.6. суретте көрсетілгеннен өзгеше болса, яғни и< 0 болса, немесе бойынша амплитудасы азайса, онда конвективті мүше статикалық тұрақты болады, бірақжеткілікті үлкен үшін динамикалық тұрақсыздық орын алуы мүмкін. Кез-келген нақты есепте бастапқы қателер кездейсоқ немесе аз болады және белгілі бір уақытта және белгілі бір нүктеде олардың таралуы 3.6-суретте көрсетілгендей «катастрофалық» таралуға ұқсас болады.

Егер (3.51) теңдеуі конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтыса, онда олар өзара әрекеттеседі. Жақында көретініміздей, қарастырылып отырған айырмашылық схемасы үшін диффузиялық мүшеге байланысты -ға шектеулер және статикалық тұрақсыз конвективті мүшенің салыстырмалы шамасына және статикалық тұрақты диффузиялық мүшеге, яғни Рейнольдс санына байланысты басқа-ға шектеулер пайда болады. Бұл сәттер келесі бөлімде анық болады [18].

*Дискретті ауытқулар әдісімен тұрақтылықты зерттеу.* Тұрақтылықтың жалпы сипаттамасы берілгеннен кейін біз тұрақтылықты зерттеудің үш әдісін, олардың өзара байланысын және салыстырмалы артықшылықтарын қарастырамыз. Бұл әдістер (3.18) сызықтық модельдік теңдеуге қолдануда уақыт бойынша алға қарай айырмашылықтар мен кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар айырмашылық схемасы мысалында көрсетіледі. Дискретті ауытқу әдісі деп атайтын тұрақтылықты зерттеу әдісі жалпылау болып табылады. Бұл әдіс біз берген тұрақсыздықтың сипаттамасына толық сәйкес келеді. Ол идеясы бойынша түзу және қарапайым, тұрақтылықпен қатар төменде анықталатын транспортивтілік қасиеттерін талдау үшін де қолданылады. Қысқаша айтқанда, теңдеулерге қандай да бір нүктеде шаманыңдискретті ауытқуы енгізіліп, осы ауытқудың әсері байқалады; егер ауытқулар басылса, ақырлы-айырымдық схема тұрақты болады.

Қарапайымдылық үшін алдымен (3.18) теңдеуді тек диффузиялық мүшемен қарастырып, барлық үшін=0 стационарлық шешім табылды делік. Шешімге ауытқуын енгізейік және (3.18)-ден алға қарай уақыт бойынша айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтармен схема бойынша мынаны аламыз:

(3.57)

Немесе

(3.58)

(3.59)

d= (3.60)

Тұрақтылық талабына сәйкес бұл ауытқулар басылуы керек. Уақыт бойынша алғашқы қадам үшін бұл келесі шартқа әкеледі:

(3.61)

(3.62)

Оң жақ теңсіздік статикалық тұрақтылық талабының нәтижесі болып табылады және оң , кезінде автоматты түрде орындалады, яғни кезінде. Сол жақ теңсіздік динамикалық тұрақтылықтың шарты болып табылады және кезінде орындалады. Уақыт бойынша тым үлкен қадамынан туындаған осцилляцияларға жол бермей, сандық шешім физикалық құбылысты модельдеу үшін, яғни:

, (3.63)

Онда шектеу пайда болады:

(3.64)

(3.63) теңсіздігі, алайда, ауытқу амплитудасының төмендеуі тұрғысынан тұрақтылықтың шарты болып табылмайды. Бір қызығы, егер уақыт бойынша қабаттардың жеткілікті үлкен санын қарастыратын болсақ, онда (3.64) теңсіздігі қажет болады. Алдымен уақыт бойынша алға қарай айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схемаға сәйкес (3.18) теңдеуі) көрші нүктелердегі ауытқуды есептеп шығарамыз:

=. (3.65)

Уақыт бойынша келесі қабат үшіналатынымыз:

(3.66)

Теңсіздік орын алатындай, қайтадан талап етейік:

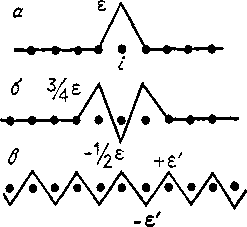
(3.67)

Осыдан шығатыны:

(3.68)

Сол жақ теңсіздік әрдайым орындалады, ал оң жақ теңсіздің шектеуін қояды

Осылайша, бірінші уақыт қабатын қарастыру шартына, ал екінші қабатын қарастыру – шартына әкеледі.шектеу шарттарына алып келетін кейінгі уақыт қабаттарын қарастыруға болады. нүктесіндегі бастапқы ауытқуы асимптотикалық түрде тербелуші үлестіруге =ұмтылады, мұндағы-кіші амплитудадағы қандай да бір ауытқу, 8-суретте көрсетілгендей.



а -бастапқы ауытқу; б – уақыт бойынша бір қадамнан кейінгі ауытқу, d = 3/4; в – уақыт бойынша өте көп қадамнан кейінгі ауытқу

Сурет8– Уақыт бойынша алға қарай ауырмашылықтар және кеңістіктік айнымалылар бойынша орталық айырмашылықтар бар схема бойынша шешілетін диффузия теңдеуі үшіннүктедебірлік ауытқудың асимптотикалық таралуы

Осылайша, d үшін ең шектеулі жағдай ауытқудың таралуының осы түрінде пайда болатындығы байқалады; есептеуді = О салынған тербелмелі ауытқудан бастап, уақыт бойынша алға қарай айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалылар бойынша орталық айырмашылықтар бар (3.18) схеманы қолдана отырып.

Келесіні аламыз:

= ' + d(' — '2') = ' (1 – 4d) (3.69)



Тұрақтылық талабы:

||1 (3.70)



береді:

– 1 141 (3.71)



немесе:

d (3.72)

Кейінгі уақыт қабаттар үшін (3.72) шарты өзгермейді. Осылайша, уақыттың үлкен мәндеріне арналған бұл шарт (3.64) – оқшауланған ауытқу жағдайында шамадан тыс үлкен уақыт қадамымен туындаған тербелістердің болмауы шартына тең.

(3.60) формуласынан кеңістіктік тордың бекітілген қадамы мен бекітілген кезінде d шарты уақыт бойынша қадамға шектеу қояды:



(3.73)

(3.73) шарты бойынша қойылған шектеу диффузия теңдеуін сандық шешуге кететін уақыт тұрғысынан ауыр екенін ескереміз. Есептеу белгілі бір кеңістіктік қадаммен белгілі бір уақыт бойынша мүмкін болатын ең үлкен қадам - Т=өлшемсіз уақытқа дейін жасалады делік. Егер есептеуді екі есе аз кеңістіктік қадаммен қайталау қажет болса (мысалы, жуықтау қателерінің азаюын бақылау үшін), онда = уақыт бойынша қадамын алу керек. Демек, T өлшемсіз уақыт мәніне жету үшін уақыт бойынша төрт есе көп қадамдар қажет, яғни Т= және Сонымен қатар, әр уақыт қабатын есептеу үшін бұл екі есе көп уақытты алады, өйткені , бұл зерттелетін аймақтағы есептеу нүктелерінің саны екі есе өсті дегенді білдіреді. Осылайша, бір өлшемді жағдай үшін кеңістіктік тордың екі есе азаюы машиналық уақыт шығынын сегіз есе арттырады.

Екі өлшемді есептеқадамдардың екі есе азаюы есептеу нүктелерінің санын төрт есе арттырады, осылайша қажетті машиналық уақытты 16 есе арттырады. Үш өлшемді диффузиялық есепте барлық үш кеңістіктік қадамның азаюы машиналық уақытты 32 есе арттырады. Жалпы жағдайда, D-өлшемді диффузия есебін шешу кезінде уақыт бойынша алға қарай айырмашылық және кеңістіктік айнымалылардағы орталық айырмашылықтар бар айқын схеманы қолдана отырып, -ден -ге дейін қадам мөлшерінің азайту машиналық уақытты(есе арттырады. (3.73) тұрақтылық шартын болдырмауға болатын әдістер өте қажет болатыны анық.

Жоғарыда келтірілген пайымдауларда шешімнің стационарлығы туралы болжам маңызды емес. Егер ауытқыған теңдеуден толық ауытқымаған тұрақты емес теңдеу алынып тасталса, онда қатенің өсуіне арналған теңдеу алынады:

(3.74)

Тұрақтылық шартымен 1 және т.б. Нәтижелер бұл жағдайда жоғарыдағыдай болады.

Енді конвективті және диффузиялық мүшелері бар (3.18) теңдеуді қарастырамыз және жалпылықты жоғалтпай n> 0 қоямыз. (Егер n < 0 болса, онда i+1 және i-1 индекстерінің рөлі өзгереді). Уақыт бойынша айырмашылық және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схеманы қайтадан қолданамыз, оған нүктесінде -ке ауытқуын сала отырып, одан алатынымыз:

(3.75)

Бұл теңдеуді зерттеу бір ғана диффузиялық мүшесі бар алдыңғы теңдеуді талдаумен салыстырғанда қосымша ақпарат бермейді, өйткені нүктелеріндегі конвективті мүшелерге нүктесіндегі ауытқудың әсері бар. Уақыт бойынша айырмашылық және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схеманы қолдана отырып, нүктесінде келесіні аламыз:

=-(3.76)

немесе:

(3.77)

мұнда-Курант саны;

бұрынғыдай. Тұрақтылық үшін қайтадан мынаны жасап көреміз:

(3.78)

немесе:

-1+d (3.79)

Сол жақ теңсіздікuкезінде автоматты түрде орындалады. Оң жақ теңсіздік (статикалық тұрақтылық талабы) тұрақтылықтың басқа қажетті шартын береді:

u

немесе:

(3.80)

нүктесіне қарап, алатынымыз:

, (3.81)

Және тұрақтылық талабы осында беретіні:

(3.82)

Алдымен оң жақ (3.82) теңсіздікті қарастыра отырып (статикалық тұрақтылық), аламыз:

(3.83)

Егер квадрат жақшадағы мүше теріс болса, онда бұл теңсіздік 0 үшін орындалады, егер бұл мүше теріс болса, онда:

(3.84)

Бөлімі оң болғандықтан, (3.84) шарты онша шектеулі емес, (3.80)-ге қарағанда, сондықтан да осымен жабылады.

(3.82) сол жақ теңсіздікті (динамикалық тұрақтылық) зерттеудің беретіні:

(3.85)

Егер квадрат жақшадағы мүше оң болса, онда бұл теңсіздік 0 үшін орындалады, егер бұл мүше теріс болса, онда:

(3.86)

мұнда бөлімі оң. (3.86) шарты да (3.80)-ге қарағанда қатты шектеулі емес, сондықтан да осымен жабылады.

Осылайша, конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтитын теңдеудің тұрақтылығын талдаудан дискретті ауытқу әдісін қолдана отырып, екі қажетті шарт жасалады – (3.73) және (3.80) теңдеулері. Егер осы талдауды уақыт бойынша келесі қабаттарға таратса, онда басқа шектеулі жағдайлар пайда болуы мүмкін, бірақ талдау әдісі өте ыңғайсыз болады. Фон Нейман бойынша тұрақтылықты талдау басқа d шартын беретінін ескерейік (және ол төменде көрсетіледі).

Сонымен қатар, i– 1 нүктесінде уақыт бойынша тым үлкен қадамнан туындаған тербелістердің болмауын қосымша талап етсек, онда мынау болу керек:

(3.87)

а л (3.81) теңдеуінің беретіні:

(3.88)

яғни:

(3.89)

немесе:

. (3.90)

Құйынды тасымалдау теңдеуінде және мүшесі Рейнольдстың тор саны болып табылады. Осылайша, тордың жергілікті жылдамдығынан алынған Рейнольдс саны болып табылады. Уақыт бойынша тым үлкен қадаммен туындаған осцилляциялардың болмауы үшін, келесі талап етіледі:

(3.91)

қарамастан. Егер (3.90) осцилляциялардың болмауы талабын диффузия қолданатын (3.73) шартпен біріктірсе, онда нәтижесінде мынадай шектеулер алынады: Курант саны шектеу және Бұдан әрі көретініміздей, бұл шектеулер дұрыс болып табылады.

(3.92)

*Фон Нейман бойынша тұрақтылықты талдау.* Алдымен сызықтық модельдік теңдеуді бір ғана диффузиялық мүшемен қарастырайық, қайтадан (3.18) уақыт бойынша айырмашылық және кеңістіктік айнымалы орталық айырмашылықтар бар схеманы қолдана отырып:

немесе:

(3.93)

мұнда d =/х2. Шешімнің әрбір фурье-компонентасы келесі түрде жазылады



(3.94)

мұнда V"– I= n-ші уақыт қабатындағы кх толқынды саны бар (толқын ұзындығы = 2/) бөлек компонента амплитудасы. Кеңістіктік аймақ шексіз деп есептеледі.



Егер фазалық бұрыш = енгізсе, онда (3.94) келесі түрді қабылдайды:

(3.95)

Сол сияқты:

(3.96)

(3.93) теңдеуіне (3.95) және (3.96) өрнектерін қоя отырып, мынаны аламыз:

(3.97)

Немесе ортақ көбейткішке бөлгеннен кейін:

(3.98)

Тепе-теңдікті пайдалана отырып:

(3.99)

Және тепе-теңдік арқылы G ауысуының көбейткішін анықтаймыз:

(3.100)

(3.98)-тен Gүшін келесі бар:

(3.101)

екенін ескерейік, яғни осы жағдайда әртүрлі фурье-компоненталар үшін ауысу көбейткіштері әртүрлі болады.

(3.100) тепе-теңдігі мынаны анық көрсетеді, шешім шектеулі болып қалу үшін барлық үшін мына шарт орындалу керек:

(3.102)

Бұл шарт диффузиялық мүшесі бар (3.93) теңдеуі үшін тұрақтылық критериі болып табылады.

(3.101) және (3.102)-тен мына шартты аламыз:

(3.103)

Олар барлық мүмкін болатын үшін, яғни барлық мүмкін болатын фурье-компоненталар үшін. Оң жақ теңсіздік барлық үшін орындалады. Сол жақ теңсіздік mахкезінде критикалық болып табылады, ол d-ға тұрақтылық шартын салады немесе:

(3.104)

Бұл шарт дискретті ауытқулар әдісімен алынған (3.73) критериіне сәйкес келеді.

Енді конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтитын (3.18) теңдеу үшін уақыт бойынша айырмашылықтар және кеңістіктік айнымалы орталық айырмашылықтары бар схеманы қарастырайық; оның беретіні:

. (3.105)

(3.95) және (3.96)-ны қоя отырып, және eIie-ге қысқарту арқылы қайтадан (3.100) аламыз,бірақ келесі түрде болатын Gауысуының көбейткішімен:

(3.106)

(3.99) және келесі тепе-теңдікті пайдалана отырып:

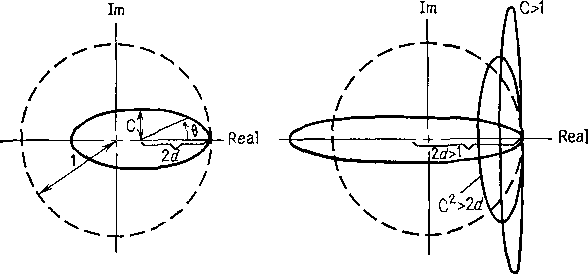
(3.107)

алатынымыз:

(3.108)

Алдыңғы жағдайдан айырмашылығы, конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтитын теңдеу күрделі ауысу көбейткішіне әкеледі (3.108). Бұл Окешенді көбейткіші С0 кезіндегі (3.100) тепе-теңдігімен анықталған С нақты көбейткішіне ұмтылады, яғни конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтитын теңдеу (9-сурет).





С < 1, d< 1/2 и С2< 2d кезінде эллипс тұрақтылыққа сәйкес келетін бірлік шеңбердің ішінде орналасқан

Сурет 9 – (3.110) түрінде жазылған G ауысуы көбейткішінің годографы

Оның ішінде конвективті және диффузиялық терминдер, тек терминді қамтитын теңдеуге дейін азаяды.

Бұл жағдайда тұрақтылық шарты келесідей

(3.109)

мұнда енді |G|– G ауысуының кешенді көбейткішінің модулі, оның годографы 9-суретте бейнеленген. (3.108) теңдеуін келесі түрде қайта жазуға болады:

, (3.110)

Бұл С и 2d нақты ось пен жартылай осьтердегі нүктесіндегі центр бар эллипс теңдеуіне сәйкес келеді. () тұрақтылығы орынды болады, егер эллипс толығымен бірлік шеңбер ішінде жатса.

Тұрақтылық үшін С1 жәнеболу қажеттігі анық. Одан да жалпылама шартты G модулі үшін келесі өрнекті қолданғанда таба аламыз:



(3.111)

мұнда арқылы комплекс-түйіндес G шамасы белгіленген.

cos9-ға байланысты максимумды анықтаудың қарапайым әдістерін қолдана отырып, мынаған көз жеткізуге болады:

(3.112)

Интервал ішінде — 1 <cos < 1 максимум |G| болмайды. Бұл максимумғаcos кезінде жетеміз және ол тек шартын береді, бұл бір диффузиялық мүшесі бар теңдеу үшін алынған шарт. кезінде максимум мына интервалда —1 <cos < 1 орынды және әрдайым . Сондықтан қос теңсіздік тұрақтылық үшін қажетті және жеткілікті шарт болып табылады.

(3.112) шартын мына түрде жазса болады:

(3.113)

Бұдан келіп шығатыны, тұтқырлық болмаған кезде ( 0) уақыт бойынша алға қарай айырмашылық және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схема t кезінде тұрақсыз болады.



және екі шарты тұрақты и кезінде шексіз аймақтағы сызықтық теңдеуде тұрақтылық үшін жеткілікті болады. и кеңістіктік айнымалының функциясы болған жағдайда, осы әдіспен зерттеуге болады, бірақ бұл қиын.

Үштен кем емес уақыт қабатынқолданатын (3.101) сәйкес келетін жалпы ақырлы-айырымдық схемалар жағдайындағы теңдеуматрицалық теңдеуге айналады. Тұрақтылық үшін мынау қажет 1, мұнда m –барлық меншікті |m|< G матрицасының мәндерінен.G - жай ғана сан болған кезде, бұл шарт (3.102) шартына тең болады.



*Херт бойынша тұрақтылықты талдау.* Тұрақтылықты талдаудың үшінші әдісі, ақырлы-айырымдық теңдеулеріне енетін, осы жинақтау әдісінде, жиілік туындыларда дифференциалдық теңдеуді алу үшін үкім тізбектеріне бөлінеді. Дифференциалдық теңдеулердің тұрақтылық қасиеттері бойынша шешімнің тұрақтылығы.

Конвективті және диффузиялық мүшелерді қамтитын уақыт бойынша алға қарай айырмашылық және кеңістіктік айнымалы бойынша орталық айырмашылықтар бар схеманы (3.18) қайтадан қарастырайық, тұрақты деп болжайық:

(3.114)

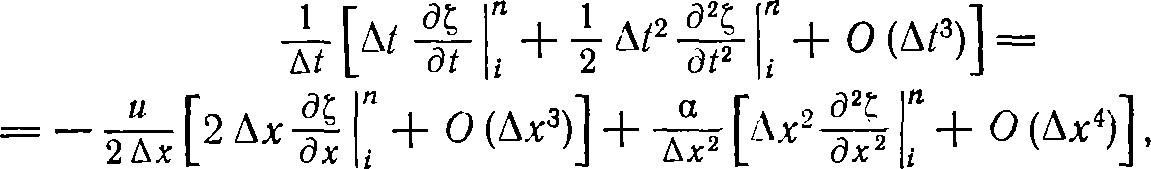
(3.114) теңдеудің әрбір мүшесін (х, t) нүктесі маңайында Тейлор тізбегіне бөлейік, яғни -ға қатысты; сонда:

=+ (3.115)

= (3.116)

Осы ыдыратуларды (3.114)-ке қоя отырып, және ұқсас мүшелерді келтіріп, келесіні аламыз:

(3.117)



i

Немесе индекстерді түсіріп,

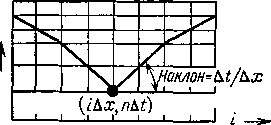
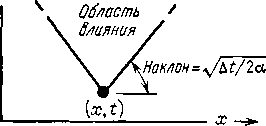
+=-u++(, ) (3.118)

және кезінде осы теңдеу жеке туындыларда бастапқы дифференциалдық теңдеуге өтеді (2.18). бірақ 0 (3.118) теңдеуі келесі түрге ие болады:

= (3.119)

Тейлор тізбегінің бөлінділерінде бірінші ретті мүшелерді сақтау арқылы алынған осы теңдеу гиперболалық болып табылады.

10а-суретте көрсетілгендей, мұндай теңдеулер үшін кез келген (х, t) нүктесі арқылы өтетін және ±  көлбеуі бар сипаттамалармен шектелген осы нүктенің ықпал ету аймағы болады. (х, t) нүктесінде пайда болатын ауытқулар тек осы аймақ ішінде айқындалады. Осы аймақтан тыс орналасқан жазықтықтың бөлігі (x, t) кейде үнсіздік аймағы деп аталады.



а – дифференциалдық теңдеу үшін ықпал ету аймағы; ә – ақырлы-айырымдық теңдеу үшін ықпал ету аймағы

Сурет 10 – (х, t)нүктесінің гиперболалық типтегі (3.118) теңдеуіне ықпал ету аймағы

(3.114) ақырлы-айырымдық теңдеуі үшін де әсер ету аймағы бар. Әрбір жаңа есептелген мәні алдыңғы уақыттағы көршілес i±1 нүктелеріндегі мәндерге байланысты болады. Басқаша айтқанда, әрбірмәнімәндеріне уақыт бойынша келесі қабаттардағы көршілес нүктелерде әсер етеді. Бұл ықпал өз кезегінде мәндеріне таралады және т.б. Осылайша, (3.118) дискреттелген теңдеудің әсер ету аймағы көлбеу бар "сипаттамалық сызықтармен" шектеледі (3.9,б суретті қараңыз). Мұндай гиперболалық теңдеулердің ақырлы-айырымдық аналогы тұрақтылығының Курант шарты ақырлы-айырымдық теңдеуінің әсер ету аймағы, ең болмағанда, дифференциалдық теңдеудің әсер ету аймағын қамтуын талап етеді. 3.9-суреттен шартының болатынын көреміз немесе:

(3.120)

Бірақ -ға шектеу теңдеудегі диффузиялық мүшемен белгіленген және бұрын дискретті ауытқулар әдісімен де, фон Нейман әдісімен де тұрақтылықты талдаудан алынған шектеулермен сәйкес келеді.

Тұрақтылықтың басқа қажетті жағдайын анықтау үшін біз (3.119) теңдеудегі мүшені есептейміз, ол үшін бастапқы дифференциалдық теңдеуді и –const деген болжамды ескере отырып, саралаймыз:

, (3.121)

(3.122)

Дифференциалдау ретін өзгерту және бастапқы дифференциалдық теңдеуден -ны жартылай туындыларға ауыстыру арқылы алатынымыз:

(3.123)

(3.124)

Бұл өрнекті (3.119)-ға ауыстыру және нәтижені түрлендіру арқылы алатынымыз:

(3.125)

(3.125) теңдеуінде жоғары туындыларды алып тастаймыз және әрбір (х және t/) тәуелсіз айнымалы үшін бірінші және екінші туындыларды сақтаймыз, бұл пайдалы дифференциалдық жуықтауды береді. Осы екі себепке байланысты оның мағынасы бар. Біріншіден, жоғары реттік туындылар әдетте аз болады. Екіншіден, осы талдау нәтижесінде алынған тұрақтылық жағдайы тек тұтқырлығы төмен ағымдар үшін ғана диффузиялық мүше болған кезде уақыт қадамына қойылған шектеуден гөрі күшті болатыны a posteriori белгілі, яғни үшін (3.125) теңдеудегі жоғары туындылардағы коэффициенттер аз болатын кезде. Нәтижесінде дифференциалды жуықтау пайда болады:

(3.126)

мұнда

(3.127)

(3.126) теңдеуі бастапқы модельдік дифференциалдық теңдеуге тең болғандықтан, оны тиімді тұтқырлық деп атаймыз.

Математикалық (және физикалық) тұрғыдан алғанда, тұтқырлықтың (диффузияның) рөлі шамасының ауытқуын «жағу» (диффузиялау) болып табылады, үлестіруді біртекті етуге ұмтылуы. Теріс тұтқырлық физикалық мүмкін емес, өйткені ол біркелкі таралуда пайда болатын кез-келген кішігірім ауытқулардың шоғырлануына әкеліп соғады және осылайша монотонды тұрақсыздықты тудырады. Тұрақтылық үшін шартының немесе келесі шарттың орындалуы керек:

(3.128)

фон Нейман әдісі арқылы алынған (3.113) шартына сәйкес келетін. (3.120) шартымен бірге ол C = u∆t/x < 1. Курант шартын қамтиды. Бұл талдау Рейнольдс торындағы шектеулерді (3.112) алып тастамайды, сондықтан конвективті және диффузиялық мүшелері бар модельдік теңдеу үшін қажетті, бірақ жеткіліксіз тұрақтылық жағдайларын қамтамасыз етеді.



**4 СТАТИКАЛЫҚ СЫҒЫЛАТЫН ОРТА ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ**

Тұтқыр сығылмайтын сұйықтық ағыны мен сығылмайтын серпімді ортаның аналогиясы белгілі.

Осы аналогияға сәйкес кез-келген µ ығысу модулінде Пуассон коэффициенті

болғанда серпімділік теориясы теңдеуінің кез-келген шешімі µ тұтқырлығы бар тұтқыр сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысы деп түсіндіруге болады (Стокс есебі) [19].

Dжеткілікті ɣ тегіс шекарасы бар шектеулі бір-бірімен байланысқан аймақта тепе-теңдік теңдеуін қанағаттандыратын сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының шешімін іздейміз:

µ∆-+=0, x (4.1)

сығылмайтын орта шартына:

div=0, x (4.2)

уысу-деформация қатынасына:

(4.3)

Орта күйінің теңдеуіне:

(4.4)

мұнда – кернеу тензоры компоненттері;

– Кронеккер символы, p-қысым функциясы, және шекара шарттары:

(4.5)

Оның шешімі сығылатын орта үшін серпімділік теориясы есебіндегі болғанда шешімінің шегі ретінде қарастырылған:

+(λ+µ)+=0, x (4.7)

Мұнда деформация және кернеу тензорларының компоненттері Гук Заңымен байланысты:

, i,j=1,2,3 (4.8)

мұнда θ=, λ>0, µ>0 Ламе тұрақтылары, (4.1)-(4.4), (4.6) сығылмайтвн материал үшін серпімділік теориясының статикалық есебі [20]-да зерттелді. Ол үшін дәлдіктің бірінші ретті айырымдық схемасы жасалды. Енді (4.7), (4.8), (4.3), (4.5) есептері шешімдерінің әрекеттерін зерттеуге көшейік. Бұл есеп әрдайым шешілетін болып табылмайды [21]. Оның шешімінің шарты бас вектор мен көлемді күштердің бас моменті нольге тең кезде орындалады:

dx=0, dx=0 (4.9)

(4.9) шарты орындалған кезде (4.3),(4.5),(4.7),(4.8) есептері бір түрлі жолмен ғана шешілмейді. Оның шешімінің жалғыз жолын айқындау үшін қосымша шарттар қажет:

dx=0, dx=0 (4.10)

Бұдан әрі (4.3), (4.5), (4.7), (4.8) есептерін шешу үшін (4.9), (4.10) шарттары орындалды деп есептейміз. Алдын ала қосымша пайымдаулар жасайық. Келесі есеп шешілді делік:

div =p, xD, = x (4.11)



Лемма 4.1. [22, 23] қолдана отырып, , болсын (4.12). Оған қоса былай деп болжайық = ds. Сонда аддитивті және біртекті оператор v=v (p,u) оператор бар, ол (4.11), (4.12) есептеріне шешім береді және келесі бағалау орынды:

(4.12)

Лемма 4.2. (4.12) шарттары орындалсын, сонда біртекті оператор v=v(p,u) болады, және келесі бағалау орынды:

(4.13)

мұнда v- келесі есепті қанағаттандырады:

(4.14)

= на , (4.15)



(D)-n-D аймағының Лебеганың өлшемді өлшемі, -n-1- шекарасы үшін Лебеганың өлшемді өлшемі.



Дәлелдеуі. Келесі бағалау орындалатындай -D-ға жалғасы болсын

(4.16)

ретінде келесі есептің шешімін алуға болады:

, в D, (4.17)

на (4.18)

-D-ға аналогты жалғасы болсын. Сонда болатыны

= (4.19)

Сонда вектор-функция есеп шешімі болып табылады:

+, (4.20)

=0, на (4.21)

Осылайша, вектор-функцииүшін Лемма шарттары орындалған, осыны дәлелдеу де керек еді. Енді кез келген скаляр функция үшін p(x)(D).

формуласы барлық q0 үшін кеңістік үстіндегі сызықтық функционал нормасы анықтайды. Алмына формула:





 кеңістік үстіндегі сызықтық функционал нормасын анықтайды.

Осыдан шығатыны келесі

 (4.22)

Лемма 4.3. салдары. келесі есеп шешімі болсын

div (4.23)

, на (4.24)



Кез келген (x) функция үшін.

Сонда келесі бағалау орынды:

(4.25)

(4.3), (4.5), (4.7), (4.8) есептеріне өтейік. Бұл есептің шешімі интегралдық теңдікті қанағаттандырады:

(4.26)

барлық v үшін, мұндағы

dx

(4.26)-да болсын, сонда:

, (4.27)

Жүйелі түрде (4.27) теңдігінің оң жағын бағалай отырып, келесі болады:

(4.28)

-константалар. Одан әрі [24] Корн теңсіздігін есепке ала отырып, одан алатынымыз:

(4.29)

(4.23)-тегіv (4.23), (4.24) есебінің шешімі болсын делік, (4.26)-дағы екенін ескере отырып, алатынымыз:

(4.30)

(4.30)-да p= , саламыз, одан келесі шығады:

(4.31)

Осылайша, келесі бағалау пайда болады:

(4.32)

(4.26)-ға бойынша шекке қарай өтейік. (4.32)-ні бағалағандықтан, қатынасын аламыз, ол кезде болғанда әлсіз, кезде болғанда әлсіз. Осыдан алатынымыз, және p интегралдық теңдікті қанағаттандырады:

, (4.33)

Кез келген вектор-функция үшін. Демек, болғанда шекте мынадай жалпыланған шеттік есеп аламыз:

(4.34)

на

Одан әрі шешім жинақтылығы мен (4.3), (4.5), (4.7), (4.8) есебінің (4.34) есебі шешіміне қатысты жылдамдығын бағалаймыз.

деп белгілейік. (4.5), (4.7), (4.8) және (4.34) себебінен келесіні аламыз

(4.35)

Одан шығатыны келесі

(4.36)

v келесі есептің шешімі болсын дейік

(4.37)

на (4.38)

Және (4.35)-те вектор-функция (4.37) (4.38)-ді қанағаттандырады деп есептейік, сонда лемма 2 салдарын қолдана отырып, алатынымыз:

(4.39)

Нәтижесінде (4.39)-ды ескере отырып, келесі орынды болып табылады:

(4.40)

(4.36) бағалауына, кейіннен (4.40)-қа жүгініп, нәтижесінде алатынымыз:

+(4.41)

Осылайша дәлелдедік.

Теорема 4.1. болсын. Сонда (4.41) бағалауы дұрыс.

Ескерту. Пайымдау жүргізу барысында (4.39) жалпыланған есебінің бар болуы және жалғыздығы туралы теорема дәлелденді. [25]-жұмысында жақындық бағалауы алынды және осында (4.41)-ден келесі шығады.

ɣ жеткілікті тегіс шекарасы бар Dшектелген бір байланысты аймақта тепе-теңдік теңдеуін қанағаттандыратын сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясы есебінің шешімін іздейміз:

µ∆-+=0, x(4.42)

сығылмайтын орта шартына:

div =0, x, (4.43)

ауыстырудеформация қатынастарына:

(4.44)

Орта күйінің теңдеулеріне:

(4.45)

мұнда u(x) - ауыстыру векторы;

p(х) - қысым функциясы;

(х) - көлемді күш векторы;

- деформация тензорының компоненттері;

- кернеу тензорының компоненттері және шектік шарт:

(4.46)

мұнда - шекарасына косинустардың бағыттаушылары.



Сондай-ақ, сығылатын орта үшін серпімділік теориясының статикалық есебінің қойылымын аймағында қарастырамыз.



Тепе-теңдік теңдеулері:

+(λ+µ)+=0, x (4.47)

қозғалыс-деформация қатынасы:

(4.48)

күй теңдеулері, Гук заңы:

(4.49)

мұнда =- Ламе коэффициенттері.

Шекаралық шарттар:

(4.50)

(4.42)-(4.50) есептерінің шешімдері үшін [26, 27] шарттары қажет:

dx=0, dx=0, dx=0, dx=0 (4.51)

мұнда- нүктесінің радиус-векторы.

Бұған дейін [28] еңбегінде λ → ∞ болғанда (4.42)-(4.46) есебіне (4.47)-(4.50) есебі шешімінің жақындау бағалауы алынған. Мұнда бағалауда басқа жолмен аламыз.

деп белгілейік, мұндағы (4.42)-(4.46) есебінің шешімі.

(4.47)-(4.50) және (4.42)-(4.46) себебінен алатынымыз:

(4.52)

кез келген функция үшін:

dx

(4.11)-де өрнектерін қосамыз және азайтамыз, нәтижесінде алатынымыз:

(4.53)

(4.53)-те деп есептесек, одан мына бағалау шығады:

Өйткені:

Онда теңсіздік дұрыс:

(4.54)

Соңында шығатыны:

(4.55)

Одан әрі (4.47)-(4.50) есебі шешімінің үлкен туындыларын бағалаймыз. Теорема 1.1. (x) , болсын. Сонда (4.47)-(4.50) есебінің шешімі үшін келесі теңсіздік дұрыс:

(4.56)

Дәлелдеу. шекарасының тегістіктік шартынан айнымалыларының локальды алмастыруының бар екендігі шығады, мұндағы , - шекара бөлшегі гипержазықтық бөлшегіне өтетіндей х нүктесінің маңайы болсын дейік.арқылы осы нүктенің кіші аймағын белгілейік, ол шекарадан маңайына дейін оң қашықтықта жатыр. z(x)- supp z және z(x)=1, егер x болатындай -дағы теріс емес тегіс функция. Соңында , k=1,2,…,n-1 осьтері аталған гипержазықтықта жатыр дейік, алосі оған қарай нормаль бойынша бағытталған.



(4.47)-(4.50) есебінің шешімі интегралды теңдікті қанағаттандырады:

(4.57)

Кез келген (x) үшін. (4.57)-ге келесіні салайық v=z(x)z(x), бөлшектеп интегралдаудан кейін мүшелерді [29]-дағыдай бағалай отырып, келесі шығады (4.47)-(4.50) себебінен, z(x)-ке көбейтіпинтегралдағанда шығатыны

бағалау үшін келесі тепе-теңдікті қолданайық , ол (4.50)-ден шығады. Егер у айнымалыларына өте отырып, div алсақ, онда оны былай белгілейміз бағаланған1-ші және 2-ші ретті басқа туындылар арқылы. Сонда шығатыны:

жиыны ақырлы жабыннан тұрады деп есептейік, сонда соңғы теңсіздіктің сол жағында аймағы бойынша норма алуға болады. Сонымен одан шығатыны:

Теорема дәлелденді. Осылайша келесі де дәлелденеді.

Теорема 4.2. болсын, аймағы – шектелген, бір байланысты, жеткілікті тегіс шекарасы бар, сонда келесі бағалау дұрыс болады:



(4.58)

[30]-еңбегінде (4.42)-(4.46) есебі шешіміне қатысты (4.47)-(4.50) есебі шешімінің жақындау бағалауы алынды:

(4.59)

1/ параметр реті бойынша бұл бағалау жақсартылмайтын баға екенін көрсетейік.

Теорема 4.3. бойынша (4.47)-(4.50) және (4.42)-(4.46) есептер шешімдерінің жақындау бағасы жақсартылмайды.

Дәлелдеу. Кері жағдай бар деп ойлайық, яғни:

(4.60)

мұнда>0 –мүмкін жеткілікті аз болатын тұрақты, сонда шығатыны:

,

(4.61)

мұнда . (4.60) теңсіздігінде болғандағы шекке өтейік, сонда (4.59) себебінен шығатыны яғни .

Осылайша, және үшін келесі есепті аламыз +, x, div =0, =0:

(4.62)

Бұл біздің болжамға қарама-қайшы, себебі соңғы (4.62) шешілмейтін болып табылады (бастапқы (4.42)-(4.46) есебі дұрыс емес және осы қажеті де еді.

**5 сЫҒЫЛМАЙТЫН ОРТА ҮШІН СЕРПІМДІЛІК ТЕОРИЯСЫНЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ЕСЕБІНІҢ АСИМПТОТИКАСЫ**

D-ɣ шекарасы бар шектелген бір байланысты аймақ. Сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есеп шешімі қозғалыс теңдеуін қанағаттандырады [31, 32]:

µ∆-+, x(5.1)

Сығылмайтын шартына:

div=0, x, (5.2)

қозғалыс-деформация қатынасына:

, (5.3)

Күй теңдеулеріне:

, (5.4)

Бастапқы шарттарға:

,(5.5)

Және шектік шарттарға:

=0, (5.6)

(5.1)-(5.6) есебі үшін бастапқы және шектік шарттарының келісуі орындалды деп есептейік. (5.1)-(5.6) есебін I есебі деп атайық. I есебімен қатар динамикалық II есебін де қарастырамыз:

=

,

(5.7)

1/ параметрі бойынша II есебінің шешімі үшін тең өлшемді априорлы бағалау аламыз.

(5.7)-ні -ге скалярлы көбейтеміз -да, сонда

(5.8)

мұнда

E()=

Одан әрі (5.8)-дің оң жағын біртіндеп бағалай отырып, алатынымыз

мұнда -константалар [33]

Гронуолла [34] леммасын қолданып, алатынымыз

(5.9)

болатындай деп есептейік.

(5.7)-де қозғалыс теңдеуін t бойынша дифференциалдаймыз, сосын -да-ға скалярлы көбейтеміз, сонда алатынымыз

(5.10)

Оң жағына Коши теңсыздыгын қолданып, кейінне теңсіздік, Гронуолла леммасын қолданып, және деп есептеп, одан алатынымыз

(5.11)

мұнда С нормаларға тәуелді

Келесі белгілеуді енгізейік

Бірінші теңдеу (5.7)-ні -де -ге скалярлы көбейтіп, (5.7)-дегі шектік шарттарды ескере отырып және осы себепті

(5.12)

(5.13)

Мұнда коэрцитивтілік бағалау ескерілген. Бұдан әрі t бойынша бірінші (5.7) теңдеуін дифферениалдай отырып, оны -да -ға скалярлы көбейтеміз, одан соң қарапайым түрлендіруден кейін мына бағалауды аламыз

(5.14)

(x,0)=0 деп есептей отырып, (5.14) бағалауын ықшамдауға болады. Бұл шарт орындала алады. Шын мәнінде t=0 болғанда бірінші (5.7) теңдеуден дивергенция аламыз, сонда алатынымыз:

Яғни, егер вектор - соленоидтық болса, онда соңғы теңдіктен алатынымыз:

Егер - тегіс соленоидтық векторлар деп болжамдасақ, онда:

Осылайша біз дәлелдедік.

Лемма 5.1. тегіс соленоидтық векторлар болсын. Сонда (5.7) есебінің шешімі үшін мына бағалау орынды:

(5.15)

(5.15) бағалауын ескере отырып, (5.7) есебіндегі λ → ∞ бойынша шегіне өтейік. λ → ∞ болғанда қатынастары -да әлсіз, λ → ∞ болғанда-да әлсіз, мұндағы -I есеп шешімі.

Енді I есеп шешіміне (5.7) есеп шешімінің жақындауын бағалайық. болсын, мұндағы - (5.7) есеп шешімі, , -I есеп шешімі, сонда алатынымыз:



(5.16)

(5.17)

=0, (518)

(5.16)-ны -да -ға скалярлы көбейтейік , сонда алатынымыз:

(5.19)

(5.19)-дағы оң жағын Коши теңсіздігі, -теңсіздігі көмегімен бағалай отырып, Гронуолла леммасын қолданып, келесі бағалауға қол жеткіземіз



(5.20)

t бойынша (5.16) теңдеуін дифференциалдай отырып, сосын оны -да -ға скалярлы көбейте отырып, (5.11) бағалауын алу кездегі пайымдауларды қолданып, келесіні аламыз:

(5.21)

(5.16) (5.18) себебінен мына теңсіздік дұрыс:

(5.22)

(5.19)-ға жүгіне отырып, (5.20), (5.22) бағалауларын ескеріп, нәтижесінде алатынымыз:

(5.23)

Демек келесі теорема дәлелденді.

Теорема 6.1. Лемма1 шарттары орындалсын делік, онда келесі бағалау дұрыс:

Одан әрі тұжырымдау керек

Лемма 5.2. I жәнеII есептер шешімінің (5.23) жақындау бағалауы параметрі бойынша жақсартылмайды.

Дәлелдеуіне кері, яғни мынаны болжайық

,

мүмкін жеткілікті аз болатын тұрақты, тиісінше одан алатынымыз:

(5.24)

(5.24) теңсіздігінде болғандаға шекке өтейік, (5.23) себебінен алатынымыз:

т.е. .

Осылайша, жәнеүшін келесі есепті шығарып аламыз



div=0, , на ɣ.

Бұл біздің болжамға қарама-қайшы келеді, себебі соңғы есеп шешілмейтін болып табылады (бастапқы I есебі дұрыс, қажеті де осы).

Жоғарыда сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебі екені көрсетілді:

µ∆-+, x(5.25)

(x), (x), x

мұнда

серпімділік теориясының динамикалық есеп шешімінде λ → ∞ болғанда шекке өту арқылы алуға болады:

(5.26)

мұнда

Параллелепипедтегі (5.25) есебінің сандық шешімі үшін D= кернеудегі айырымдық схемалар ұсынылған.

+

(5.27)

Мұнда ,

=

Бастапқы шарттар осы кезде келесі түрде болады:

,

(5.28)

(5.27) теңдеуі (5.25)-тен қозғалыс-деформация қатынасы көмегімен қозғалысын алып тастау арқылы алынады. Одан басқа, бастапқы шарттар мынадай деп болжаймыз:

(x)=(x)=0 (5.29)

(5.25) және (5.27) есептерінің эквивалентті екенін көрсету оңай.

Сол сияқты, қозғалысын (5.26) есепте алып тастап, кернеудегі серпімділік теориясының динамикалық есебінің қойылымына келеміз:

+,

=(5.30)

где ,

белгілі болғандай, (5.26) есебі (5.30) есебіне эквивалентті екені көрсетілген. Одан әрі (5.30) есебі үшін нақты айырымдық схеманы қарастырамыз

+

(5.31)

где =

,

=

,

=

(5.31) схемасының шешімі тор аймағында анықталады

D=(5.31) айырмашылық схемасының құрылымы ол үшін серпімділік теориясының динамикалық есебі үшін сәйкес теоремалардың айырмашылық аналогтары орындалатындай болып табылады. (5.31) айырмашылық схемасы 0() дәлдікпен бастапқы дифференциалды есепті аппроксимациялайды.

(5.31) схемасын канондық түрде жазайық [35, 36]:

+A= (5.32)

-берілген, біздің жағдайымызда В=0,

, ==

=

(5.32) схеманың А жәнеRоператорлары А= болатындай

Егер

(5.33)

Шынымен де, Коши-Буняковский теңсіздігінің және теңсіздігінің себебінен, одан әрі енгізу теоремасының айырмашылық аналогын қолданумен.



болады

(A,

Басқа жағынан

()

Матрицаның ең кіші жеке мәндері сондықтан R-Aегер (5.33) шарттары(5.32) шешімдері үшін орындалсаАприорлық бағалау дұрыс

мұнда

+(5.34)

(5.33) шартын ескере отырып соңғы теңдеуден келесі шығатынын байқайық

(5.35)

Егер (5.32) айырмашылық схемасының шешімі, -(5.30) есеп шешімі, онда (5.33)-тегі (5.32) схеманың (5.30) есебі аппроксимация әдісін ескере отырып, одан шығатыны:

, где

Далее, (A т.е.

или

Е-бірлік матрица. Осылайша

мұнда

=

H-көлем элементі, M() нүктесінде сәйкесінше қойылған, сондықтан H=, егер М-ішкі нүкте болса;

H=, егер М-шектік болса; H=егер М нүктесі қырында жатса және H=. (5.34)-ке қайтып келе, үйлеспеушілік үшін бағалауға келеміз:

(5.36)

(5.36) бағалауы арқылы λ → ∞ болғанда (5.32) схемасының әрекеті туралы мәселені қарастырайық.

Теорема 5.2. (5.32)айырымдық есебінің шешімі (5.27) сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебі шешіміне λ → ∞, →0, →0, болғанда үйлеседі және келесі бағалау дұрыс:

(5.37)

Дәлелдеу.

Үшбұрыштың теңсіздігі бойынша:

(5.38)

Себебі

(5.38)-дің оң жағындағы бірінші қосылғыш үшін (5.36) бағалау дұрыс. деп белгілейік

Сонда:

(5.39)

Алатынымыз:

=

Одан әрі

болғандықтан

==

=,

(5.39) үшін енді болатыны келесі

(5.38)-ді жалғастыра отырып, оған (5.33)-ті және соңғы бағалауды пайдаланып, (5.39)-ды аламыз. Осында ескере кететініміз, (5.33) шарты себебінен (5.36) бағалауын келесі түрде жазуға болады:

(5.40)

(5.40) бағалау конструкциясы белгіленген болғанда тор қадамын ұсақтау есебінен қандай да бірден бастап дәлдіктің жоғарылауын күту мүмкін еместігін көрсетеді. Тура осындай жағдай егер белгіленген болғанда -ті көбейткенде пайда болады. (5.40) бағалауындағы қосылғыштардың бірдей ретін талап ету орынды. Сонда, = деп есептесек, (5.32) айырымдық схемасы шешімінің (5.27) сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есеп шешіміне жинақтылық жылдамдығын арқылы көрсетуге болады, егер деп алса, онда бағалау келесі түрде болады:

(5.41)

(5.32) схемадағы көлемді күштер векторының аппроксимация әдісін келесі болатындай етіп өзгертсе:

Онда айырымдық схема мына ретте болады . Сондықтан оның шешімінің сығылмайтын материал үшін сырпімділік теориясы есебі шешіміне жинақтылық жылдамдығы мына бағалау түрінде өрнектеледі .

Жалпы жағдайда (5.30) есебінің аппроксимациясы үішн аппроксимациясының реті бар айырымдық схема құрылуы мүмкін, мұндағы және параметрлері шартына бағынышты болып табылады, сонда (5.38)-ден келесі шығады

=, енді егер орындалса, онда (5.41)-дің орнына деп ескерсек, келесі болады:

. (5.42)

Қосымшада аналитикалық шешімі белгілі сығылмайтын орта үшін екі өлшемді динамикалық есептің сандық есептеулері жасалған, сонымен қатар сығылатын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебінің сандық орындалуы бар. Есептеулер торлар тізбегі бойынша жүргізілді, τ және h тор қадамдарының мәндері бойынша λ мәнін таңдалды. Бұл орайда шешімдердің жақындығы минималды болған λ оптималды мәні теориялық бағалаумен сәйкес келеді.Теориялық қорытындылар, модельдер, анықталған байланыстар мен заңдылықтарсандық есептеулер арқылы дәлелденді және расталды. (Қосымшалар А, Ә)

**6 Ричардсон БОЙЫНША СЫҒЫЛМАЙТЫН ОРТА ҮШІН ЖуыҚ ШЕШІМДЕРДІҢ ДӘЛДІГІН арттыру**

Жеткілікті тегіс шекарасы ɣ бар D шектелген бір байланысты аймақта төмендегі тепе-теңдік теңдеуін қанағаттандыратын сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясы есебінің шешімін іздейміз:

µ∆-+=0, x (6.1)

сығылмайтын орта шарттары:

div=0, x, (6.2)

ығысу-деформация қатынасы:

(6.3)

ортаның күй теңдеулері:

(6.4)

мұнда компоненттері;

– Кронекер символы;

p – қысым функциясы;

– деформация тензорының компоненттері, және шектік жағдайлары:

(6.5)

(6.1)-(6.5) есебін I есеп деп белгілейміз.

Белгілі бір мағынада оның шешімі сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының [37] есептерінің λ → ∞ кездегі шешімдері шегі ретінде қарастырылды:

+(λ+µ)+=0, x (6.6)

мұнда деформация мен кернеу тензорының компоненттері Гук заңымен байланысты:

(6.7)

а- Ламе тұрақтысы, осы болатындай.

Сығылмайтын материал үшін серпімділік теориясының статикалық I есебі зерттелді. Ол үшін дәлдіктің бірінші ретті айырым схемасы құрастырылған. Схеманы шешу үшін итерациялық айырмашылық процесі ұсынылады [38]. Энергетикалық нормадағы ε дәлдігіне жету үшін O() арифметикалық амалдарды орындау керек екені көрсетілген, мұндағы m=2, немесе m=3-есептің өлшемділігі.

(6.3), (6.5), (6.6), (6.7) есептерін II есебі деп белгілейміз.

II есеп шешімділігінің жағдайлары келесі түрде болады:

(6.8)

Оның бірегей шешімін анықтау үшін қосымша шарттар қажет:

(6.9)

Бұдан әрі II есе үшін (6.8),(6.9) шарттары орындалған деп есептейміз.

Кіріспеде атап өтілгендей, жуықтаудың дәлдігін қажет ететін итерациялық әдістерді қолдану кейбір жағдайларда қиынға соғады. Алынған бағалауларды талдаудан мынадай қорытынды шығады:, ал келесі:

мұнда – II есеп шешімі;

,p- I есеп шешімдері, егер айырымдық аппроксимацию қарастырса, онда ,мұндағы - II есепке сәйкес келетін болатын айырымдық есеп шешімі, яғни белгіленген кезде, h торының қадамы соңғы қатынаспен байланысты болып табылады.



[39] еңбекте сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебінің шешімі келесідей екені көрсетілген:

µ∆-+, x

, , x

(6.10)

мұнда:

,

(6.10)-III есеп. Оны серпімділік теориясының динамикалық есебін шешуде λ→∞ шегіне өту арқылы алуға болады:

µ∆+, x

, , x

(6.11)

мүнда:

(6.11)-IV есеп, онда сол жерде алынған бағалаулар негізінде:

(6.12)

Сонымен қатар серпімділік теориясының динамикалық есебінің аппроксимациясынан шыққаны:

(6.13)

(6.12), (6.13) бағалауын ескере отырып, соңғы бағалауларға енгізілген шамалар бір ретті болуы керек деп есептей отырып, τ уақыт қадамының шектеуін аламыз.

Сонымен қатар серпімділік теориясының динамикалық есебінің жуықтауынан алатынымыз:

(6.13)

II есептің шешімін λ → ∞ ретінде қолданып, I есептің жуық шешімінің дәлдігін жақсарту үшін Ричардсон әдісін қолданайық, сонда 1/λ – шағын параметр деп санауға болады. f(x) және γ шекарасы жеткілікті тегіс болсын, онда II есептің шешімі жеткілікті тегіс болады. Оған дейін алдымен көмекші пікірді дәлелдеп алайық.

Лемма 6.1. ІІ есепті шешу үшін жіктеу жасалады:

, (6.14)

,

(6.15)

мұнда

(6.16)

- -ке тәуелді емес, ал , функциялары мынадай:



(6.17)

Дәлелдеу. келесі есептердің шешімі болсын:

, , T

T

= =0. (6.18)

T=0, =0,k=1,2,…N,

мұндағы T, i=1,2,3

II есепке байланысты үшін мына теңдеулерді аламыз:

,

(6.19)

=

(6.19)-дан функциясын скалярлы көбейте отырып, алатынымыз:

(6.20)

мұнда

E()=

Кез келген функция үшін.

(6.20)-да = деп есептесек, онда келесіні аламыз:

(6.21)

Екінші теңдеуді (6.19) пайдаланып (6.21) оң жағын бағалайық:

(6.22)

Басқа жағынан:

(6.23)

осыдан келіп шығатыны:

мұнда с – λ-дан тәуелсіз тұрақты. Дәлелдеу керегі де осы еді.

Лемма 6.2. Егер ,k=1,2,…N+1 болса, онда (6.18) есепті шешу үшін келесі бағалаулар әділ болады:

,

(6.24)

Дәлелдеу. (6.18) есептің шешімі интегралдық теңдікті қанағаттандырады:

(6.25)

Кез келген функция үшін.(6.25)-те осы өрнекті жасасақ, онда алатынымыз:

(6.26)

(6.27)

Одан әрі есептің шешімі болсын деп есептейік

div, (6.28)

∙, на γ (6.29)

(6.28), (6.29)-ды қанағаттандыратын етіп, қарапайым есептеулерден кейін (6.25)-ке қоямыз

(6.30)

(6.30), (6.26), (6.27)-ден алатынымыз

+

Лемма дәлелденді. Лемма 6.1. шарттары орындалсын делік. - ІІ есептің шешімі деп ойлайық, ол , k=1,2,…N+1 параметріне сәйкес келеді, [40]-қа ілесе отырып, сызықтық корректор құрастырамыз.

(6.31)

мұнда N>0- бүтін болып табылады:

Теорема 6.1. Лемма 6.1. талаптары орындалды деп есептейік, сонда (6.31)-дегі қатынаста анықталған І есептің шешімінің , p және функция үшін келесі бағалау әділ болып табылады:

(6.32)

-тен тәуелсіз тұрақты С-пен бірге.



Дәлелдеу. (6.14)-(6.16) жіктеулерін пайдаланып, k=1,2…N+1 үшін корректор құрастырамыз, нәтижесінде алатынымыз:

(6.33)

(6.34)

(6.33), (6.34) теңдіктерінің сол жағына сәйкесінше және p ауыстырамыз, , кеңістіктеріндегі екі бөліктің де нормасын алып, (6.17) бағалауды пайдаланамыз да, келесі болады деп есептейміз:

С=

Осыдан кейін дәлелдеуге жетеміз.

λ → ∞ кезінде IV есептің жуық шешімін ретінде арттыру үшін Ричардсон экстраполяция әдісін қолданамыз, сол кезде 1/λ шағын параметр.

Теорема 6.2. (6.11) бағалауын алу үшін қажетті шарттар орындалсын делік, келесі жіктеулер әділ болып табылады:

=++(6.35)

+div=0 (6.36)



=++ (6.37)

мұндағы , мынаған тәуелді емес , k=1,2,3,…N және келесі болатындай



+ (6.38)

және С- тұрақтысы біркелкі болып бойынша шектелген.

=D[0,T].



Дәлелдеу. - келесі есеп шешімі деп есептейік

µ∆+, (x,t)

div=0, )-]=0

(6.39)

µ∆, (x,t)

,

,

болсын, (6.39)-ды -ге ішінде скалярлы көбейтеміз, нәтижесінде алатынымыз:

(6.40)

(6.40)-тың оң жақ бөлігін бағалайық

(6.41)

t бойынша (6.39)-ға дифференциалдау жасай отырып, –да скалярлы түрде -ға көбейтеміз

+(6.42)

Оң жақ бөлігін келесі түрде ұсынайық

(6.43)

(6.42)-ні t бойынша интегралдау жасай отырып, (6.43)-ті, Гельдер теңсіздігін және Гронуолла леммасын пайдаланып, келесіге қол жеткіземіз:

(6.44)

(6.39)-ды ескере отырып, келесі бағалауды шығарамыз

(6.45)

(6.44), (6.45) бағалауларынан келесі шығады

(6.46)

Сәйкесінше, егер (6.39) есептің деректері жеткілікті тегіс болса, онда оның шешіміне кез келген шектелген k=1,2,…,N үшін (6.46) бағалау орындалады. -IV есептің шешімі болсын делік, ол , k=1,2,…,N+1 параметріне сәйкес келеді. Сонымен қатар, IV есептің деректері жеткілікті тегіс болсын және -соленоидтық вектор болсын, яғни div.

Теорема 6.3.

6.2.-теореманың шарттары орындалсын делік, онда III есептің шешімі, ,p және функция үшін келесі болады:

, где - бүтін

Келесі бағалау әділ болып табылады:

(6.47)

мұнда С-тұрақтысы -ға тәуелді емес.



Дәлелдеу. 6.3-теорема 6.2-теореманың дәлелдеуіне ұқсас.

Кез келген айырымдық схеманың сандық шешуі қиындық тудырады, өйткені жеткілікті кіші торларда есептеу керек, яғни. ретті тор қадамдарымен жұмыс жасау қажет, бұл жағдайда массивтер шексіз өседі, себебі N- бір айнымалыдағы массивтің өлшемділігі аппроксимация шамасы болып табылады, сонымен қатар массивтерді сақтауға арналған жады да ұлғаяды, сондықтан Ричардсон экстраполяция әдісі қолданылады, ол ірі тор қадамдарын қолдана отырып, кіші торлар бойынша жуық шешімді алуға мүмкіндік береді. τ, h тор қадамдары арасындағы байланысты ескере отырып, біз динамика үшін де бағалау аламыз.

Алынған (6.28) бағалауы сығылмайтын орта үшін бастапқы есептің шешімін серпімді сығылатын ортаны осындай дәлдікпен шешу арқылы бағалауға мүмкіндік береді; серпімділік теориясының динамикалық есебіне ұқсас баға үшін алынған.

Осы жерден , k=1,2,…N сығылатын орта үшін есептерін шығару арқылы қорытынды жасауға болады, дәлдікпен сығылмайтын орта үшін шешімдерді алуға болады. (N+1) ). Нәтижелер сығылмайтын материал үшін статикалық және динамикалық есеп үшін алынған.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

- Гук заңын қанағаттандыратын серпімді сығылатын орта шешімі, ал а , p-1/ бойынша Стокс есебін қанағаттандыратын сығылмайтын ортаның шешімдері болып табылатын жуық бағалауы алынды.

1/λ бойынша сығылмайтын орталар үшін динамикалық есептің шешіміне, сондай-ақ дифференциалды және айырымдық деңгейлеріне қатысты сығылатын орталар үшін серпімді динамикалық есепті шешудің асимптотикалық бағалары алынды.

1/λ параметрі бойынша жуық шешімнің дәлдігін жақсарту үшін Ричардсонның экстраполяциялау әдісі қолданылды .

Қосымшада сығылмайтын орта үшін екі өлшемді динамикалық есептіңін сандық есептеулері келтірілді, онда аналитикалық шешімі белгілі болып табылады, сығылатын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебінің сандық жүзеге асырылуы келтірілді. Торлар тізбегінде жүргізілген есептеулерде, τ, h тор қадамдарының мәндеріне λ мәні таңдалды. Сонымен қатар шешімдердің жуықтығы минималды болып табылатын λ-тің оңтайлы мәні теориялық бағалаумен сәйкес келеді.

**ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Ладыженская О.A. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Гос. изд-тво техн.-теорет. лит., 1950. – 676 с.
3. Орунханов М.К. Метод фиктивных областей для задач гидродинамики с неоднородными граничными условиями: дис. ... физ.-матем. наук: 01.01.07. – Новосибирск, 2001. – 209 с.
4. СмагуловШ.Д. Исследование ξ - аппроксимаций уравнений Навье-Стокса: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.07. – Новосибирск, 1981. – 197 с.
5. Темам Р. Уравнение Навье-Стокса: теория и численный анализ / пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
6. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1962. – 255 с.
7. Солонников В.А. Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1964. – Т. 70.– С. 213-217.
8. Солонников В.А. О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1964. – Т. 73. – С. 221-291.
9. Гольдштейн Р.В. Применение интегральных уравнений для численного решение задач теории упругости и пластичности // Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т. 9, №5. – С. 37-69.
10. Кобельков Г.М. О теоремах существования для некоторых задач теории упругости // Математические заметки. – 1975. – Т. 17, №4. – С. 599-699.
11. Роуч П.Дж. Вычислительная гидродинамика / пер. с англ.– М.: Мир, 1980. – 616 с.
12. Головкин К.К., Ладыженская О.А.О решениях нестационарной краевой задачи для уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН им. Стеклова.– 1960. – Т. 59. – С. 100-114.
13. Головкин К.К., Солонников В.А.О первой краевой задаче для нестационарных уравнений Навье-Стокса // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 140. – С. 287-290.
14. Кживицкий A., Ладыженская О.A.Метод сеток для нестационарных уравнений Навье-Стокса // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1966. – Т. 92. – С. 93-99.
15. Ладыженская О.A. О модификации уравнений Навье-Стокса для больших градиентов скоростей // Записки науч. семин. ЛОМИ. – Л.: Наука, 1968. – Т. 7. – С. 126-154.
16. Ладыженская О.A. Об однозначной разрешимости в целом трехмерной задачи Коши для уравнений Навье-Стокса при наличии осевой симметрии // Записки науч. семин. ЛОМИ. – Л.: Наука, 1968. – Т. 7. – С. 155-177.
17. Валединский В.Д. Решение задачи о контакте упругой и несжимаемой сред // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 247, №3. – С. 536-540.
18. Валединский В.Д. Численное решение задачи теории упругости о контакте сжимаемой и несжимаемой сред // Вестник МГУ. – 1980. – №2.– С. 3-12.
19. Кобельков Г.М. Об одном итерационном методе решения разностных задач теории упругости // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 233, №5. – С. 776-779.
20. Кузнецов Ю.А., Мацокин А.М. Решение уравнения Гельмольца методом фиктивных областей // Вычислительные методы линейной алгебры: сб. – Новосибирск, 1972. – С. 127-144.
21. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнение эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
22. Обэн Ж-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 383 с.
23. Рихтмайер Р.Д., Мортон К.У.Разностные методы решения краевых задач / пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
24. Михлин С.Т Спектр пучка операторов теории упругости // УМН. – 1973. – Т. 28, вып. 3(171). – С. 43-82.
25. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости / пер. с англ. –М.: Мир, 1974. – 159 с.
26. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнения Навье-Стокса // Записки науч. семин. ЛОМИ. – Л.: Наук, 1976. – Т. 59. – С. 81-116.
27. Степаненко В.М. Аппроксимация решения задачи теории упругости для несжимаемого материала // Численные методы механики сплошной среды. – 1978. – Т. 9, №6. – С. 136-145.
28. Коновалов А.Н. Динамическая задача теории упругости в постановке "скорость-напряжение" // Дифференциальные уравнения. – 1999. – Т. 35, №2. – С. 238-248.
29. Кобельков Г.М.Численное решение некоторых задач теории упругости: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.01.07. – М., 1975. – 104 с.
30. Степаненко В.М. Численное решение динамической задачи теории упругости в напряжениях для несжимаемой среды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. – Новосибирск, 1980. – С. 93-105.
31. Кобельков Г.М. Об эквивалентных нормировках подпространств $L\_2$ // Analysis mathematica. – 1977. – Т. 3, №3. – С. 177-186.
32. Бабушка И., Азиз А.К. Обзорные лекции по математическим основам метода конечных элементов. – Нью-Йорк,1972. – 345 с.
33. Bibly B.A., Eshelby I.D., Kundu A.K. The change of shape of a viscous ellipsoidal region embedded in a slowly deforming matrix hawing a different viscosity // Technophisics. – 1975. – Vol. 28, №4. – P. 265-274.
34. Букенов М.М., Адамов А.А., Койкелова Д.К. Приближение решения статической сжимаемой среды к решению несжимаемой среды // Вестник Карагандинского университета. – 2019. – №3(95). – С. 19-26.
35. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1966. – 225 с.
36. Лионс Ж.Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения / пер. с фр. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
37. Букенов М.М., Койкелова Д.К. Моделирование статической несжимаемой среды // Вестник Карагандинского университета. – 2019. – №4(96). – С. 39-44.
38. Коновалов А.Н. Численнное решение задач теории упругости. – Новосибирск, 1968. – 127 с.
39. Койкелова Д.К., Букенов М.М., Канкенова А.М. и др. Асимптотика решения динамической задачи теории упругости для несжимаемой среды// Журнал теоретических и прикладных информационных технологий. – 2022. – Т. 100, №8. – С. 2687-2695.
40. Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. – М.: Наука, 1979. – 318 с.

**ҚОСЫМША**

Сандық асимптотика

Сандық есептеулер нәтижелерін келтіреміз. (5.1), (5.2), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының динамикалық есебі шешімі кезіндегі (5.30), (5.31) айырымдық схемасын практикада қолдану мүмкіндіктерін тексеру үшін сандық эксперименттер жасалды. Тест ретінде

,

,

Сығылмайтын орта үшін серпімділік теориясының жазық динамикалық есебінің нақты шешімі таңдалды

.

, ;

Аймақтағы формула

Тұжырымдалған есептің жуық шешімі ретінде (5.30), (5.31) айырымдық схеманың шешімін қабылдадық.

Есептеулер өлшемсіз Ламе коэффициенттері үшін жасалды, мұндағы E=50 MPa. айырымдық схема шешімдері әртүрлі мәндердегі кезінде 10, 20, 40 торларында жасалған формулалар. уақыт бойынша қадам айырымдық схеманың тұрақтылық шартына байланысты таңдалды. А.1-кестеде келтірілген сандық нәтижелердің талдауы бағалауының дұрыстығын көрсетті, шынымен де 10 тордағы =0,1 қадамы бар мәні осы формула бойынша , кіші немесе үлкен 20 үшін санау кестеден көріп отырғандай қателік нормасының өсуіне әкеледі. Тура осындай жағдай 20\*20 торында пайда болады, =0,05 мәні болатын формула бойынша оптималды болып табылады, себебі үйлеспеушілік нормасы минималды болады. Және соңында, 40\*40 торында =0,025, оптималды мәні , бұл және h арасындағы тәуелділіктің дұрыстығын растайды.



А.1-кестеде байланысты қателігі көрсетілген.

Кесте А.1 – 10 торы.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Белгіленген уақыт қабатында, яғни =15, =100, =120, , - уақыт қабатының саны, . | | | | |
|  |  |  |  |  |
| 0,1 | 10×10 | 15 | 10 | 0, 0836 |
| 0,1 | 10×10 | 100 | 10 | 0, 0942 |
| 0,1 | 10×10 | 120 | 10 | 0, 0967 |
| 0,1 | 10×10 | 15 | 50 | 0, 0996 |
| 0,1 | 10×10 | 100 | 50 | 0, 0987 |
| 0,1\ | 10×10 | 120 | 50 | 0, 0998 |
| 0,1 | 10×10 | 15 | 20 | 0, 0112 |
| 0,1 | 10×10 | 100 | 20 | 0, 0108 |
| 0,1 | 10×10 | 120 | 20 | 0, 0124 |

Кесте А.2 – 20 торы,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0,05 | 20×20 | 15 | 20 | 0, 0847 |
| 0,05 | 20×20 | 100 | 20 | 0, 0975 |
| 0,05 | 20×20 | 120 | 20 | 0, 0963 |
| 0,05 | 20×20 | 15 | 50 | 0, 0114 |
| 0,05 | 20×20 | 100 | 50 | 0, 0110 |
| 0,05 | 20×20 | 120 | 50 | 0, 0107 |
| 0,05 | 20×20 | 15 | 100 | 0, 0765 |
| 0,05 | 20×20 | 100 | 100 | 0, 0836 |
| 0,05 | 20×20 | 120 | 100 | 0, 0912 |

Кесте А.3 – 40 торы,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0,025 | 40×40 | 15 | 100 | 0, 0938 |
| 0,025 | 40×40 | 100 | 100 | 0, 0879 |
| 0,025 | 40×40 | 120 | 100 | 0, 0798 |
| 0,025 | 40×40 | 15 | 150 | 0, 0142 |
| 0,025 | 40×40 | 100 | 150 | 0, 0132 |
| 0,025 | 40×40 | 120 | 150 | 0, 0127 |
| 0,025 | 40×40 | 15 | 250 | 0, 0786 |
| 0,025 | 40×40 | 100 | 250 | 0, 0862 |
| 0,025 | 40×40 | 120 | 250 | 0, 0987 |

Сонда көрсетілген схемадағы сандық жүзеге асыру кезінде аппроксимация қателігінің реті келесі түрде болады . Бұл осындай қателіктермен есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді.