Казахский Национальный Педагогический университет имени Абая

УДК 517.956 На правах рукописи

**БЕКЕНАЕВА КЫМБАТ СЛАМОВНА**

**Разрешимость начально-краевых задач для псевдопараболического уравнения дробного порядка**

8D05401 – Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты:

доктор физико-математических наук,

профессор Бердышев Абдумаувлен,

КазНПУ им. Абая,

Алматы, Казахстан

кандидат физико-математических наук,

ассоциированный профессор

Айтжанов Серик,

КазНУ им. аль-Фараби,

Алматы, Казахстан

Зарубежный научный консультант:

профессор Альберто Кабада Фернандес,

университет Сантьяго де Компостела,

Сантьяго де Компостела, Испания

Республика Казахстан

Алматы, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 2](#_Toc131000100)

[1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ 16](#_Toc131000101)

[Известные утверждения 16](#_Toc131000102)

[2 РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО 21](#_Toc131000103)

[2.1 Постановка задачи 21](#_Toc131000104)

[2.2 Существование решения. Галеркинские приближения. Априорные оценки 22](#_Toc131000105)

[2.3 Единственность слабого обобщенного решения для случая  29](#_Toc131000106)

[2.4 Разрушение решения задачи (2.1)-(2.3) за конечное время 31](#_Toc131000107)

[2.5 Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) для любого конечного времени  при  35](#_Toc131000108)

[2.6 Глобальная разрешимость начально-краевой задачи 36](#_Toc131000109)

[2.7 Единственность слабого обобщенного решения 41](#_Toc131000110)

[2.8 Поведение решения по времени  43](#_Toc131000111)

[3 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ 44](#_Toc131000112)

[3.1 Постановка задачи 44](#_Toc131000113)

[3.2 Локальная разрешимость задачи . Галеркинские приближения 45](#_Toc131000114)

[3.3 Единственность локального обобщенного решения задачи  52](#_Toc131000115)

[3.4 Существование глобального решения задачи  (3.1)-(3.3) при  54](#_Toc131000116)

[3.5 Единственность глобального обобщенного решения задачи  (3.1)-(3.3) при  57](#_Toc131000117)

[3.6 Разрешимость задачи с нелинейными граничными условиями для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка 60](#_Toc131000118)

[3.8 Начально-краевая задача для нагруженного псевдо-параболического уравнения 64](#_Toc131000119)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 76](#_Toc131000120)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 78](#_Toc131000121)

# 

# ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию вопросов локальной и глобальной разрешимости задачи с линейными и нелинейными граничными условиями для псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто.

**Актуальность исследования.** Известно, моделирование процессов окружающей среды с помощью математических методов в виде дифференциальных уравнений является эффективным способом их исследования. Множество задач естественно-научных исследований приводят к изучению различных типов смешанных, прямых и обратных задач для уравнений математической физики.

Изучение псевдопараболических уравнений начинается в середине прошлого века в работе С.Л. Соболева [1]. Эта работа вызвала наибольший интерес к изучению неклассических уравнений. Термин уравнения типа Соболева был введен Э.Р. Шоуолтером [2, 3]. Уравнения соболевского типа также могут найти применение для анализа нестационарных процессов в полупроводниках с источниками [4, 5], теплопередаче в неоднородных средах [6], переноса воды в почве-грунтах [7, 8] с фильтрацией жидкости в трещиноватых пористых средах [9], одностороннего распространения нелинейных дисперсионных длинных волн [10-13] и накопления (агрегации) популяции [14].

Исследование множества задач, имеющих практическую важность, которые возникают в ходе изучения процессов жидкости в трещиновато-пористых средах, миграции грунтовых вод свободной поверхности, переноса воды, тепла и солей в пористых средах и т.д. связано с надобностью изучения краевых задач для уравнений соболевского типа третьего и дробного порядка [15]-[23]. Например, в [16] изучается одномерная смешанная задача для уравнения Соболева с переменными коэффициентами и дробным дифференцированием Капуто по временным переменным, устанавливается существование и единственность решения, также его устойчивость с помощью априорных оценок. Т.В. Тинг, Э.Р. Шоуолтер и В.Р. Гопала Рао [15, 22, 24] исследовали начально-краевую задачу и установили существование и единственность решений. С тех пор значительное внимание было уделено изучению нелинейных псевдопараболических уравнений, включая даже сингулярные псевдопараболические и вырожденные псевдопараболические уравнения [25]-[27], где были получены не только существование и единственность решения, но и исследованы такие его свойства, как асимптотика и регулярность. В ряде работ были представлены численные методы решения краевых задач для уравнений диффузии дробных порядков [28]-[34].

Дифференциальным уравнениям с дробными производными по времени и пространственным переменным, которые используются в разных областях науки, таких как физика, биология, химия, инженерия и теория управления [35]–[42], придается большое значение, как при анализе, так и при применении.

В этой связи математики все больше привлекают дробные вычисления, где некоторые обстоятельства целочисленных дифференциальных уравнений в частных производных не могут быть смоделированы. Инструмент уравнений с дробными производными активно используется при описании большого класса физических и химических процессов, происходящих в средах с фрактальной геометрией, а также при математическом моделировании экономических и социально-биологических процессов [43], и при описании различных математических моделей физических процессов широко используется дробно-дифференциальное исчисление [36, 37, 43].

Следовательно, дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка, являющиеся обобщением дифференциальных уравнений с частными производными целого порядка [20, 21, 23, 24, 25, 44], занимают особое место в теории дифференциальных уравнений. В работе Бердышева А.С., Айтжанова С.Е. и др. [45] исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения псевдопараболического типа с нелинейным граничным условием Неймана-Дирихле и разрушение решения за конечное время. Корпусов М.О. и Свешников А.Г. [46] получили достаточные условия разрушения решения смешанной задачи для диссипативного нелинейного псевдопараболического уравнения с нелокальным кубическим источником в ограниченной области с гладкой границей. Авторы работ [21], [47] доказали разрушение решения задачи для полулинейного псевдопараболического уравнения со сверхкритической и высокой начальной энергией за конечное время. В [48] рассмотрено нелинейное псевдопараболическое уравнение с переменными степенями и коэффициентами и доказано разрушение слабых решений за конечное время и их поведение в течение большого времени. Исследованию локальных и нелокальных задач с начальными и граничными условиями для соболевских уравнений, а также их подкласса, разрушению решений посвящено многообразие работ [1-68].

Краевые задачи для псевдопараболических уравнений и вырождающихся псевдопараболических уравнений с оператором дробного дифференцирования Капуто исследованы в [32]. Для нагруженных псевдопараболических уравнений дробного порядка можно отметить работу [33], где с помощью полученных априорных оценок, доказывается единственность решения и его устойчивость относительно начальных данных и правой части, а также скорость  , с которой решение связанной разностной задачи сходится к решению дифференциальной задачи, где и – шаги в пространственной и временной переменных.

В работах [17], [56], [57] изучена нелокальная задача для уравнения соболевского типа дробного порядка  в смысле Капуто по времени и пространственным переменным, где дробные производные имеют порядок , , . С использованием теоремы вложения С.Л.Соболева и построении оператора Миттаг-Леффлера доказаны теоремы существования и единственности задачи при определенных ограничениях на порядок дробных производных  и .

**Цель работы.** Целью данной диссертационной работы является исследование вопросов однозначной разрешимости смешанных задач для квазилинейного уравнения соболевского типа с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто с заданными линейными, также нелинейными граничными условиями; доказательство теоремы существования и единственности слабого обобщенного решения задач; доказательство разрушения решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с линейным граничным условием и изучение асимптотического поведения решения по времени; доказательство и установление разрешимости смешанной задачи для нагруженного псевдопараболического уравнения дробного порядка.

**Задачи исследования.**

Для задачи с линейным граничным условием для уравнения соболевского типа с оператором дробного дифференцирования Капуто:

* формулировка и изучение разрешимости задачи для различных случаев степени положительных постоянных  и :

 случай, когда  для всех ;

 случай, когда  для всех ;

 случай, когда  для всех ;

 случай, когда  для всех ;

* доказательство существования слабого обобщенного решения задачи для случаев ;
* доказательство единственности слабого решения рассматриваемой задачи для случая ;
* разрушение решения задачи за конечное время;
* доказательство разрешимости задачи для любого конечного времени  при ;
* изучение асимптотического поведения решения по времени ****

Для задачи с нелинейным граничным условием для уравнения соболевского типа с оператором дробного дифференцирования Капуто:

* формулировка и изучение однозначной разрешимости смешанной задачи при наличии нелинейности как в самом уравнении, так и граничном условии;
* доказательство локальной разрешимости задачи для случая ;
* доказательство единственности локального решения задачи при ;
* доказательство единственности глобального решения задачи при условии , а также существование глобального решения задачи при 
* постановка и изучение вопросов разрешимости смешанной задачи для линейного псевдопараболического нагруженного уравнения дробного порядка по пространственной переменной.

**Объектом исследования** являются псевдопараболические уравнения с дробными производными Капуто.

**Предмет исследования.** Установление однозначной разрешимости поставленных задач для псевдопараболического уравнения с дробной производной, разрушение решения, глобальная разрешимость смешанной задачи и единственность слабого обобщенного решения, экспоненциальное убывание решения по времени , разрешимость смешанной задачи для нагруженного уравнения Соболева дробного порядка.

**Методы исследования.** В ходе достижения результатов исследования были применены метод приближения Галеркина, метод априорных оценок, теория соболевских пространств, методы интегрального и дифференциального исчислений, метод функционального анализа, метод компактности, метод монотонности, метод неравенств для производных дробного порядка, аналитические и функциональные методы для дробного исчисления, метод продолжения по параметру.

**Научная новизна работы.** В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости смешанных задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения с линейными, а также нелинейными граничными условиями с дробным дифференцированием в смысле Капуто.

* доказана теорема существования слабого решения задачи для квазилинейного псевдопараболического уравнения с линейным граничным условием для случаев ;
* сформулирована и доказана теорема единственности слабого решения задачи для псевдопараболического уравнения с линейным условием для случая;
* доказано разрушаемость полученного решения за конечное время;
* исследовано асимптотическое поведение решения по времени;
* сформулированы и исследованы вопросы однозначной разрешимости краевых задач, отличие которых заключается в том, что операторы дробного дифференцирования участвуют как в самом уравнении, так и в граничном условии в виде нелинейного условия;
* в случае, когда , доказана теорема о локальной разрешимости задачи;
* доказана теорема единственности локального решения задачи, если выполнены условия ;
* доказана теорема об единственности глобального решения задачи при условии , и дополнительно, теорема о существовании глобального решения задачи при выполнении условий ;
* доказана разрешимость смешанной задачи для линейного псевдопараболического нагруженного уравнения по пространственной переменной.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Диссертационная работа представляет теоретический интерес, поскольку в ней получены теоретические результаты, которые, в свою очередь, можно применять в теории исследований квазилинейных дифференциальных уравнений соболевского типа с операторами дробного интегро-дифференцирования. Псевдопараболические уравнения применимы в механике, физике и других прикладных дисциплин, что определяет практическую значимость работы. Для достигнутых результатов исследования можно провести вычислительные эксперименты и получить численные значения решений, их визуализацию.

**Основные положения, выносимые на защиту.**

* Установлены и доказаны теоремы о существовании и единственности слабого обобщенного решения задачи с линейным граничным условием для псевдопараболического уравнения с дробной производной в смысле Капуто.
* Доказано разрушение решения задачи за конечное время.
* Изучено асимптотическое поведение решения по времени.
* Сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности слабого решения задачи с нелинейным граничным условием для уравнения соболевского типа дробного порядка.
* Доказана разрешимость смешанной задачи для нагруженного уравнения соболевского типа дробного порядка.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертационной работы** подтверждается тем, что основные положения были получены путем подробных доказательств, приведенными в исследовательской работе на основе ранее полученных известными учеными результатов; также достоверность результатов работы может быть подтверждена их публикацией в рейтинговых рецензируемых изданиях, входящих в международные наукометрические базы Web of Science Core Сollection и Scopus.

**Связь диссертационной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Предлагаемая диссертационная работа выполнена в рамках проекта программы грантового финансирования фундаментальных и прикладных научных исследований АО «Международного университета информационных технологий» на тему «Краевые и обратные задачи для уравнений Навье-Стокса однородных, неоднородных жидкостей, тепловой конвекции и Кельвина-Фойгта», (2020-2022 гг., №AP08857604).

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы были представлены и докладывались на следующих научных мероприятиях:

* международная конференция «Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)» (г. Ташкент, Узбекистан, 16-17 сентября 2022 года);
* международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», (г. Ташкент, Узбекистан, 6-8 октября, 2022 года);
* научный семинар Галисийского центра математических исследований и технологии университета Сантьяго де Компостела (руководитель – профессор Альберто Кабада Фернендес, г. Сантьяго де Компостела, Испания, 21 июня 2022 года);
* научные семинары кафедры математики и математического моделирования института физики, математики и информатики КазНПУ им. Абая (руководитель – д.ф.-м.н., профессор Бердышев А.С., г.Алматы).

**Публикации и личный вклад соискателя.** По результатам диссертации были выпущены в свет 4 работы, из них 2 были опубликованы в виде статей в международных изданиях с высоким рейтингом, входящих в наукометрические базуы Web of Science и Scopus, а также 2 работы изданы в сборниках результатов международных конференций в виде тезисов. Основные результаты были получены соискателем самостоятельно.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из 83 страниц, включая введение, трех глав и их подразделов, заключение, а также списка использованных источников, которое представляет собой 91 наименование.

**Основное содержание диссертации.** Во **введении** представленной диссертационной работы приведены актуальность и новизна на сегодняшний день, сформулирована цель работы и поставлены задачи и основные положения на защиту, также изложено краткое содержание диссертации.

В **первом разделе** приведены основные функциональные пространства, известные неравенства и определения, некоторые специальные функции, леммы, теоремы, которые в дальнейшем используются в исследовательской работе.

Во **втором разделе** исследуется смешанная задача Дирихле для квазилинейного уравнения Соболева дробного порядка.

Рассмотрим в цилиндре  квазилинейное псевдопараболическое уравнение

 (1)

 (2)

 (3)

Здесь  – ограниченная область,  достаточно гладкая,  и  – положительные постоянные, – дробная производная Капуто порядка :

 (4)

где  – гамма-функция Эйлера.

Положим, что функции  удовлетворяют условиям:

 (5)

В данной задаче для положительных постоянных степеней  и  рассматриваются различные случаи .

**Определение 1.** Функция , удовлетворяющая следующему интегральному тождеству, называется слабым решением задачи (1)-(3):



почти всюду  для всех 

**Теорема 1.** Пусть имеют место случаи -, а также выполнены условия (5), тогда для задачи (1)-(3) на интервале  существует слабое решение .

Применяя теоремы вложения Соболева, метод компактности, метод Фаедо-Галеркина и априорных оценок доказывается теорема существования слабого решения задачи (1)-(3) при выполнении условия (5) и случаев , .

**Теорема 2.** Пусть  и имеет место случай , тогда на интервале  задача (1)-(3) имеет единственное слабое решение.

Для доказательства данной теоремы применяется метод априорных оценок и метод монотонности.

Наряду с этим, доказывается разрушение решения задачи (1)-(3) за конечное время.

**Теорема 3.** Пусть , тогда решение задачи (1)-(3) разрушается за , то есть,



где  ограничен сверху



Исследованы вопросы глобальной разрешимости смешанной задачи для случая ****. Исследуется поведение решения по времени и устанавливается экспоненциальное убывание при , когда  находится в левой части уравнения.

**Теорема 4.** Пусть   тогда при любом конечном времени слабое решение  задачи (1)-(3) существует.

Рассмотрим в цилиндре  начально-краевую задачу для псевдопараболического уравнения

 (6)

 (7)

 (8)

**Определение 2.** Функция , которая удовлетворяет следующему интегральному тождеству, почти всюду  для всех , называется слабым обобщенным решением задачи (6)-(8):

 (9)

**Теорема 5.** Пусть  и   ,  тогда на интервале  для задачи (6)-(8) существует слабое обобщенное решение.

**Теорема 6.** Пусть , тогда на интервале  задача (6)-(8) имеет единственное слабое обобщенное решение.

Также изучено поведение решения по времени .

**Теорема 7.** Пусть , тогда решение задачи (6)-(8) удовлетворяет оценке



**Третий раздел** посвящен исследованию вопросов однозначной разрешимости смешанных задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с нелинейными граничными условиями с операторами дробного дифференцирования Капуто. Также в данном разделе приводится смешанная задача для нагруженного уравнения соболевского типа дробного порядка и доказывается ее разрешимость.

Рассмотрим в цилиндре  квазилинейное псевдопараболическое уравнение дробного порядка

 (10)

Здесь ,  ограниченная область,  достаточно гладкая,  и  – заданные положительные постоянные, причем ,  и  – заданные функции,  – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто (4).

**Задача **. Найти решение  уравнение (10), удовлетворяющее начальному

 (11)

и нелинейному граничному условию

 (12)

где , – положительная постоянная.

Обозначим через  гильбертово пространство с нормой



Всюду в дальнейшем допустим, что для параметров задачи выполняются следующие условия:

 (13)

Для этой задачи исследуется локальная разрешимость посредством метода Фаедо-Галеркина: доказывается теорема существования слабого обобщенного решения задачи (10)-(12) при выполнении условий (13) и ; доказывается, что при выполнении условия  на , локальное обобщенное решение задачи (10)-(12) единственно.

**Определение 3.** Функция  удовлетворяющая почти всюду , следующему интегральному тождеству, называется слабым обобщенным решением задачи  (10)-(12):



для всех функций .

**Теорема 8.** Пусть выполняются условия (13) и , тогда для любой функции почти всюду ,  где



слабое обобщенное решение  задачи  (10)-(12) существует.

**Теорема 9**. Пусть выполняются , тогда обобщенное решение задачи (10)-(12) на интервале ,  единственно.

Изучается глобальная разрешимость задачи , для задачи (10)-(12) на интервале  доказываются теоремы существования обобщенного решения, а также его единственности.

**Теорема 10.** Пусть имеют место условия (13) и , тогда для любого  на  для задачи  (10)-(12) обобщенное решение  существует.

**Теорема 11**. Пусть выполнены , тогда для любой функции на  задача  (10)-(12) имеет единственное обобщенное решение.

Также в данном разделе рассматривается разрешимость задачи с нелинейными граничными условиями для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка:

Как и ранее, для уравнения (10) в области рассмотрим смешанную задачу в предположении, что коэффициент .

 (14)

здесь  – заданная функция. Будем предполагать, что относительно коэффициентов уравнения (14) выполняются следующие условия:

 (15)

**Задача .** Найти решение уравнения (14), которое удовлетворяет условиям (11)-(12).

Доказывается существование слабого обобщенного решения задачи ****на интервале  при выполнении условий (15) и . Устанавливается единственность слабого обобщенного решения задачи **** (14), (11)-(12) на интервале  при 

**Теорема 12.** Пусть имеют место условия (15) и  , тогда для задачи , почти всюду на интервале  для любой функции  существует слабое обобщенное решение .

**Теорема 13.** Пусть , тогда задача ****(14), (11), (12) на интервале  имеет единственное слабое обобщенное решение.

Рассмотрим в прямоугольной области ** нагруженное псевдопараболическое уравнение

 (16)

с начальным

 (17)

и краевыми условиями

 (18)

где – дробная производная Капуто порядка ,   – заданные функции,  – постоянная.

**Теорема 14.** Пусть выполняются включения   Кроме того, пусть выполняются условия

 (19)

где  .

Тогда существует решение  нелокальной задачи (16)-(18) такое, что .

В **заключении** приведены основные результаты, полученные при выполнении диссертации и краткие выводы по ним.

Автор выражает благодарность отечественным научным консультантам – доктору физико-математических наук, профессору Бердышеву А.С. и кандидату физико-математических наук, ассоциированному профессору Айтжанову С.Е., за постановку задач, ценные знания и внимание к диссертационной работе, зарубежному научному консультанту – доктору естественных наук (PhD), профессору Альберто Кабада Фернандес за поддержку и ценные советы при выполнении исследований.

# 1 ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

## Известные утверждения

Определим вспомогательные функциональные пространства и определим их свойства.

 – *n*-мерное евклидово пространство точек .

 – гильбертово пространство с нормой



где  – цилиндр .

 – множество суммируемых со степенью  в смысле Лебега функций , для которых  интегрируема по . Норма в этом пространстве определяется равенством [69]:



 при целом  – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов , имеющие обобщенные производные всех видов до порядка  включительно, суммируемые по  со степенью . Норма в этом пространстве определяется равенством [69]:



где при целом  – любая производная от  до порядка , а суммирование по всевозможным производным порядка :

- мультииндекс,,



 – совокупность всех измеримых функций с конечной нормой



где  – существенный супремум функции.

 является подпространством , определено как замыкание множества бесконечно дифференцируемых финитных функций в норме , для кусочно-гладких границ  можно определить и как совокупность всех элементов из , обращающихся в ноль на , с нормой  [69].

В диссертационном исследовании будут часто использованы широко известные алгебраические и функциональные неравенства. Из числа алгебраических неравенств потребуется неравенство Юнга [69]:

 (1.1)

справедливое при любых положительных  и .

Из функциональных неравенств будут применены такие неравенства, как а) неравенство Коши-Буняковского [69]:

, (1.2)

б) неравенство Гёльдера [37]:

 (1.3)

в котором . Показатель , связанный с  равенством

,

называется сопряженным с .

Дадим определения Гамма-функции и функции Миттаг-Леффлера и приведем лемму о свойствах, которыми обладает функция Миттаг-Леффлера.

**Определение 1.1.** [37] Гамма-функцией  называется интеграл Эйлера второго рода, определяемая формулой:



который, очевидно, сходится при всех  для которых .

**Определение 1.2.** [37] Функцией Миттаг-Леффлера называется целая функция, определяемая степенным рядом

. (1.4)

Также функцией Миттаг-Леффлера называют сумму более общего ряда

. (1.5)

Таким образом, . Следующие формулы непосредственно вытекают из определения 1.2 функции :





**Лемма 1.1.** [36] Функция Миттаг-Леффлера имеет следующие свойства:

1°. Для  и  существует постоянная , такая, что

. (1.6)

2°. Для  и  существует постоянная , такая, что

. (1.7)

**Определение 1.3.** [37] Дробная производная Капуто порядка  определяется с помощью равенства:

, (1.8)

где  – Гамма-функция Эйлера.

**Лемма 1.2.** [70] Для любой функции **, абсолютно непрерывной на  справедливо неравенство



**Лемма 1.3.** [69] Для любой функции  справедливо неравенство



где



**Лемма 1.4. (Гронуолла-Беллмана)** [71]. Пусть  и  при  и , причем при  выполнено неравенство

,

где *с* – положительная постоянная. В таком случае при  имеем



**Теорема 1.1. (вложений Соболева)** [72].Имеют место непрерывные вложения:

 при 

где



 при 

Граница пространства  предполагается настолько гладкой, насколько это нужно.

В частности, имеют место следующие неравенства:

 при 

 при 

**Теорема 1.2. (Реллиха-Кондрашова)** [72]. Пусть  – это ограниченная область с достаточно гладкой границей . Имеет место вполне непрерывное вложение:

 при 

для всех таких, что

,

где

.

**Теорема 1.3.** [73] Пусть  – непрерывная на  оператор-функция (при каждом  ), причем оператор  непрерывно обратим. Если для  выполняется условие

,

то  непрерывно обратим, причем



# 2 РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО

Данный раздел диссертационной работы посвящен изучению разрешимости задач для псевдопараболического уравнения с дробной производной в смысле Капуто. Существование слабого решения исследуется с помощью приближений Галеркина и априорных оценок. Для доказательства единственности слабого решения задачи применяются теорема вложения Соболева, теорема Реллиха-Кондрашова и лемма Гронуолла-Беллмана. Наряду с этим, доказано разрушение решения задачи за конечное время. Изучается глобальная разрешимость смешанной задачи и единственность слабого обобщенного решения.

## 2.1 Постановка задачи

В цилиндре  рассмотрим квазилинейное псевдопараболическое уравнение

 (2.1)

 (2.2)

 (2.3)

Здесь  – ограниченная область,  достаточно гладкая,  – дробная производная Капуто порядка ,  и  – положительные постоянные, (1.8).

Обозначим через  пространство с нормой



.

Положим, что функции  удовлетворяют условиям:

 (2.4)

В данной задаче для постоянных  и  рассматриваются различные случаи:









**Определение 2.1.** Функция , которая удовлет-воряет следующему интегральному тождеству, называется слабым решением задачи (1)-(3):

 (2.5)

почти всюду  для всех 

## 2.2 Существование решения. Галеркинские приближения. Априорные оценки

**Теорема 2.2.1.** Пусть выполнены условия (2.4), а также имеют место случаи ,. Тогда для задачи (2.1)-(2.3) на интервале  существует слабое решение .

**Доказательство.** В сепарабельном пространстве  подберем систему функций . И эта система функции  образует базис. Для задачи (2.1)-(2.3) приближенное решение будет иметь следующий вид

, (2.6)

здесь  ищутся из:

 (2.7)

, (2.8)

причем

 сильно в  при . (2.9)

Введем обозначения

,

,

,

.

Тогда система уравнений (2.7) и условие (2.8) принимает матричный вид:

 (2.10)

Из леммы 1.2. следует неравенство



где



Умножая обе части равенства (2.7) на  и просуммируя левые и правые части равенства по , получим следующее равенство

 (2.11)

Применяя лемму 1.2. и условие (2.4), получим неравенство

 (2.12)

Оценим правую часть (2.12), применим лемму 1.3. и получим

 (2.13)

Случай :

 (2.14)

Случай :

 (2.15)

Тогда из равенства (2.13) следует

 (2.16)

где 

Обозначим через  тогда (2.16) примет вид:

 (2.17)

Отсюда получим

 (2.18)

где  – функция Миттаг-Леффлера (1.5).

В неравенстве (2.18) применим (1.6) и (1.7) и получим:



Применив к которому теорему Бихари [74], получим утверждение: если



тогда справедливо следующее неравенство



то есть,

. (2.19)

Из этой оценки следует существование такого , что

 (2.20)

для всех  постоянного  не зависящего от .

Теперь умножим равенство (2.7) на  и просуммируем по . В результате получим

 (2.21)

Вынесем последние две слагаемые из левой части в правую, тогда тождество (2.21) запишется в виде

 (2.22)

Используя неравенства Гельдера (1.3), Коши-Буняковского (1.2) и неравенства интерполяции [69], оценим правую часть (2.22), тогда справедливы













где 

Случай :

 (2.23)

Случай :

 (2.24)

Подставляя эти неравенства в тождество (2.22), и выбирая  для случая :  а для случая : , тогда получим вторую оценку:

 (2.25)

для всех .

Из полученных оценок (2.22), (2.25) вытекают, соответственно, следующие утверждения:

 ограничена в  (2.26)

 ограничена в  (2.27)

А также, в силу поставленных условий для :

 ограничена в  (2.28)

.

Из (2.26) следует, что в последовательности  существует \*-слабо сходящаяся к некоторому элементу подпоследовательность  [52], то есть,

 слабо в 

Таким же образом, из (2.26)-(2.28) получаем существование такой последовательности , что

 слабо в .

Вследствие теоремы Реллиха-Кондрашова [72], вложение  в  является компактным, что означает возможность выбора последовательности  так, чтобы  в норме .

Из этого мы можем осуществить переход к пределу в (2.7), перед этим необходимо умножить равенство (2.7) на . Затем, просуммируя левые и правые части получившегося равенства по  и получим

 (2.29)

почти всюду , 

В (2.29) перейдем к пределу при , принимая во внимание полученные включения и сходимости, что даст тождество (2.5) для . Предельное соотношение выполняется для всех , поскольку в простанстве  множество всех функции  плотно.

## 2.3 Единственность слабого обобщенного решения для случая

**Теорема 2.3.1.** Пусть  и имеет место случай , тогда на интервале  задача (2.1)-(2.3) имеет единственное слабое решение.

**Доказательство.** Допустим, что задача (2.1)-(2.3) имеет два решения: , , и  удовлетворяет условию , а также тождеству



В силу  то в качестве  можно взять , т.е., положим , тогда

 (2.30)

Оценим правую часть неравенства (2.30), применяя следующее неравенство [69]:

 при ,

получим



 и , так как имеет место теорема вложения Соболева.

Поступая так же



Поскольку решения  и  являются гладкими, получим следующие оценки

 (2.31)

 (2.32)

В силу (2.31) и леммы 1.2 получим

 (2.33)

где 

Неравенство (2.33) можно записать в следующем виде:



отсюда получим



которое влечет  почти всюду на , и отсюда, получаем единственность слабого обобщенного решения.

## 2.4 Разрушение решения задачи (2.1)-(2.3) за конечное время

Пусть функции  являются ортонормированным базисом спектральной задачи Дирихле

 (2.34)

**Теорема 2.4.1.** Пусть , тогда решение задачи (2.1)-(2.3) разрушается за , т.е.



где  ограничено сверху



**Доказательство.** Пусть выполнены условия





Умножим уравнение (2.1) на  и проинтегрируем по области , получим соотношение



При выполнении условия (2.5), получим дифференциальное неравенство

 (2.35)

где 

Обозначим через . Тогда неравенство (2.35) запишется в виде

 (2.36)

где 

Обозначим через , умножим неравенство (2.36) на  и проинтегрируем по переменной  от 0 до :

 (2.37)

Вычислим первое слагаемое правой части неравенства



где



Подставляя полученные результаты вычисления в (2.37), получим



Положим  получим





Вычислим следующие интегралы:











Отсюда следует, что







## 2.5 Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) для любого конечного времени при

**Лемма 2.5.1.** Если  тогда выполняется неравенство



где 

**Теорема 2.5.1.** Пусть   тогда при любом конечном времени слабое решение  задачи (2.1)-(2.3) существует.

**Доказательство.** Оценим правую часть (2.11), применяя леммы 1.2 и 2.5.1, находим



Случай :

 (2.38)

Случай :

 (2.39)

Тогда из полученной оценки следует





Обозначим через  тогда последнее неравенство запишется в виде

 (2.40)

Применяя лемму 1.4, получаем справедливость следующей оценки



Тем самым показали

 для всех  (2.41)

Правая часть (2.22) оценивается аналогично, как при получении второй оценки (2.25), применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3), и оценки (2.41), получим

 для всех  (2.42)

Аналогичным образом, как в случае  из априорных оценок и теоремы вложения, позволяют перейти к пределу в (2.7).

## 2.6 Глобальная разрешимость начально-краевой задачи

Рассмотрим в цилиндре  смешанную задачу для псевдопараболического уравнения

 (2.43)

 (2.44)

 (2.45)

**Определение 2.6.1.** Функция , удовлетворяющая следующему интегральному тождеству, называется слабым обобщенным решением задачи (2.43)-(2.45):

 (2.46)

почти всюду  для всех 

**Теорема 2.6.1.** Пусть  и   , тогда на интервале  для задачи (2.43)-(2.45) существует слабое обобщенное решение.

**Доказательство.** В сепарабельном пространстве  подберем систему функций . И эта система функции  образует базис. Для задачи (2.43)-(2.45) приближенное решение будет иметь следующий вид

, (2.47)

здесь  ищутся из:

 (2.48)

, (2.49)

причем

 сильно в  при , (2.50)

введем обозначения



,

,

,

.

Тогда систему уравнений (2.48) и условие (2.49) можно записать в следующем матричном виде:

 (2.51)

Умножим левые и правые части равенства (2.48) на и просуммируем левые и правые части получившегося равенства по . Получим следующее:



Применяя лемму 1.2. и условие (2.4), получим неравенство

 (2.52)

Из неравенства (2.52) следует

 (2.53)

где 

Теперь, пусть  – решение следующей задачи Коши:

 (2.54)

решение этой задачи можем записать в явном виде

 (2.55)

Так как выполняется неравенство , а также применяя условие (1.6), получим



Тем самым показали

 (2.56)

Теперь умножим равенство (2.48) на  и просуммируем по  В результате получим

 (2.57)

Вынесем последние три слагаемые из левой части в правую, тогда тождество (2.57) запишется в виде

 (2.58)

Оценим правую часть (2.58):













где 

Подставляя эти неравенства в тождество (2.58), получим:

 (2.59)

для всех .

Из этого мы можем осуществить переход к пределу в (2.48), перед этим необходимо умножить равенство (2.48) на . Затем, просуммируя левые и правые части получившегося равенства по  и получим





где 

В (2.48) перейдем к пределу при , принимая во внимание полученные априорные оценки (2.56), (2.59) и сходимости. Из этого получим (2.46) для . Поскольку в простанстве  множество всех функции  плотно, следует что предельное соотношение выполняется для всех . Теорема доказана.

## 2.7 Единственность слабого обобщенного решения

Допустим, что для задачи (2.43)-(2.45) существует два решения:  и  И  удовлетворяет условию  а также тождеству



В силу  то в качестве  можно взять , т.е., положим , тогда

 (2.60)

Оценим правую часть неравенства (2.60), применяя следующее неравенство



при 

 (2.61)

для любого .

В силу (2.61) и леммы 1.2, получим

 (2.62)

где 

Неравенство (2.62) можно записать в следующем виде



Из последнего неравенства следует

 (2.63)

где 

Теперь, пусть  – решение следующей задачи Коши:

 (2.64)

решение этой задачи можем записать в явном виде

 (2.65)

Так как выполняется неравенство , а также применяя условие (1.6), получим



которое влечет  почти всюду на , и отсюда, получаем единственность слабого решения.

**Теорема 2.7.1.** Пусть , тогда на интервале  задача (2.43)-(2.45) имеет единственное слабое обобщенное решение.

## 2.8 Поведение решения по времени

Проинтегрируем уравнение (2.43) по области , сначала умножая на функцию , тогда получим

 (2.66)

где 

Из неравенства (2.66) следует

 (2.67)

Нетрудно получить следующую оценку

 (2.68)

Из этой оценки следует, что решение задачи (2.43)-(2.45) на бесконечности по времени  убывает как .

**Теорема 2.8.1.** Пусть , тогда решение задачи (2.43)-(2.45) удовлетворяет оценке (2.68).

# 3 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Настоящий раздел диссертационной работы посвящен фундаментальной проблеме исследования вопросов разрешимости смешанных задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Отличие исследуемых задач заключается в том, что граничные условия задаются в виде нелинейного граничного условия с оператором дробного дифференцирования. Основным результатом является установление локальной либо глобальной разрешимости поставленных задач в зависимости от параметров уравнения. С помощью метода Галеркина доказывается существование слабого решения квазилинейного псевдопараболического уравнения в ограниченной области. Используя теоремы вложения Соболева, получены априорные оценки решения. При доказательстве существования искомых решений рассматриваемых краевых задач используются априорные оценки и теорема Реллиха-Кондрашова. Единственность слабых обобщенных решений начально-краевых задач доказывается на основе полученных априорных оценок и применения обобщенной леммы Гронуолла. Необходимость рассмотрения и изучения такого рода начально-краевых задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения вытекает из практических потребностей. К примеру, таких задач, как нахождение решений дробных уравнений математической физики, моделирующих физические процессы, появляющиеся в результате изучения различных процессов миграции подземных вод со свободной поверхностью, фильтрации и т.д.

## 3.1 Постановка задачи

Рассмотрим в цилиндре  квази-линейное псевдопараболическое уравнение дробного порядка

 (3.1)

Здесь ,  ограниченная область,  достаточно гладкая,  и  – заданные положительные постоянные, причем ,  и  – заданные функции,  – оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто (1.8).

**Задача **. Найти решение  уравнения (3.1), которое удовлетворяет начальному условию

 (3.2)

и нелинейному граничному условию

 (3.3)

где ,  – положительная постоянная.

Отметим, что вопросы разрешимости задачи **** в случае, когда , изучены в [45]. Для целочисленного параметра , задачи с граничными условиями Дирихле - Неймана исследованы в [52-53].

Всюду в дальнейшем предположим, что для параметров задачи выполняются следующие условия:

 (3.4)

**Определение 3.1.1.** Функция  которая удовлетворяет почти всюду , удовлетворяет следующему интегральному тождеству, называется слабым обобщенным решением задачи **** (3.1)-(3.3):

 (3.5)

для всех функций .

## 3.2 Локальная разрешимость задачи . Галеркинские приближения

Рассмотрим случай, когда  и пусть .

В сепарабельном пространстве  подберем систему функций . И эта система функции  образует базис. Для задачи **** (3.1)-(3.3) приближенное решение будет иметь следующий вид:

 (3.6)

где  ортогональная система функций в , а  находятся из системы уравнении

 (3.7)

с условиями

 (3.8)

причем

 сильно в  при . (3.9)

Введем обозначения











Тогда, система уравнений (3.7) с условиями (3.8) примет следующий матричный вид



Ниже приведем ряд известных лемм необходимых для установления некоторых оценок.

**Лемма 3.2.1.** [69]Для любой функции  справедливо неравенство



где



**Лемма 3.2.2.** [69]Для любой функции  справедливо неравенство



где







Умножим обе части (3.7) на  и просуммируем по , тогда получим тождество

 (3.10)

Применяя к (3.10) лемму 1.2 и лемму 3.2.1, а также с учетом условий (3.4), получим неравенство



Полученное дифференциальное неравенство, запишем виде

 (3.11)

где 

Введем обозначение , тогда (3.11) можно представить в виде



Отсюда получим

 (3.12)

где  - функция Миттаг-Леффлера (1.5).

Из (3.12) с учетом (1.6) и (1.7), имеем

 (3.13)

Предположим, пусть выполнены следующие условия



тогда в (3.13) применяя лемму Гронуолла-Беллмана [71], получим неравенство



или с учетом обозначении имеем



Из полученной оценки можно сделать вывод, что существует  такое, что

 для всех , (3.14)

где  – постоянная, не зависящая от .

Теперь умножим равенство (3.7) на  и просуммируем по . В результате получим

 (3.15)

Применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3) и лемму 3.2.2, оценим каждую слагаемую правой части (3.15)













где .









где .

С учетом (3.14) и вышеприведенных неравенств из тождества (3.15), имеем вторую априорную оценку

,

для всех .

Из этих оценок вытекает

 ограничена  (3.16)

 ограничена в  (3.17)

 ограничена в  (3.18)

 ограничена в  (3.19)

 ограничена в , (3.20)

Из (3.16) следует, что в последовательности  существует \*-слабо сходящаяся к некоторому элементу  подпоследовательность [52], то есть,

 \*-слабо в .

Похожим образом, из (3.16)-(3.20) получаем существование такой последовательности , что

 слабо в .

Вследствие теоремы Реллиха-Кондрашова [72], вложение  в  является компактным, что означает возможность выбора подпоследовательности  из последовательности  так, чтобы  в норме , а значит сходящуюся почти всюду.

Из данных рассуждении можно осуществить переход пределу в (3.7) при . Перед этим умножим левую и правую части равенства (3.7) на  и просуммируем обе части полученного тождества по  имеем:

 (3.21)

почти всюду , где .

В (3.21) переходя к пределу при  получим (3.5) для . Полученное предельное соотношение будет выполняться для всех, так как множество всех функций , где  плотно в.

Следовательно, доказана следующая

**Теорема 3.2.1.** Пусть выполнены условия (3.4) и, тогда для любой функции почти всюду ,  где



для задачи **** (3.1)-(3.3) существует слабое обобщенное решение .

## 3.3 Единственность локального обобщенного решения задачи

**Теорема 3.3.1**. Пусть выполняются , тогда задача (3.1)-(3.3) на интервале ,  имеет единственное обобщенное решение.

**Доказательство.** Исходя от противного, допустим, что задача (2.1)-(2.3) имеет два решения: , , и  удовлетворяет условию , а также тождеству

 (3.22)

В силу того, что , то в качестве  можно взять  т.е. положим . Тогда имеем

 (3.23)

Оценим правую часть (3.23), используя следующие известные алгебраические неравенства

 (3.24)

и лемму 3.2.1. Имеем









где  Тогда по теореме вложения Соболева  и , имея ввиду гладкость решений  и , получим оценку

 (3.25)

Из оценки (3.25) с учетом условия (3.4) и леммы 1.2, а также алгебраических неравенств, получим

(3.26)

где .

Из неравенства (3.26) получим

,

из последнего имеем

,

что влечет почти всюду на , а это, в свою очередь означает, что обобщенное решение единственно. Теорема 3.3.1 доказана.

## 3.4 Существование глобального решения задачи (3.1)-(3.3) при

**Теорема 3.4.1.** Пусть выполняются условия (3.4) и , тогда на интервале  для любого  существует обобщенное решение  задачи **** (3.1)-(3.3).

**Доказательство.**Аналогично доказательству теоремы 3.2.1, умножая обе части (3.7) на  и просуммируя по , получим соотношения (3.10).

Справедливость следующей леммы приведена в [69].

**Лемма 3.4.1.** [69] Если  тогда справедлива неравенство



Применяя лемму 1.2 и условие теоремы 3.4.1, а также лемму 3.4.1, получим неравенство



Обозначим через , тогда последнее неравенство запишется в виде



Отсюда получим

 (3.27)

Из неравенства (3.27) в силу (1.6) и (1.7) имеем

 (3.28)

Доказательство нижеследующей леммы приведено в [54].

**Лемма 3.4.2**. [54] Предположим  и  неотрицательная локально интегрируемая функция на  с



на этом интервале, тогда



где



 так как 

 так как .

 так как 

Если  постоянная, тогда 

Применяя в неравенстве (3.28) лемму 3.4.2, получим справедливость следующей оценки



С учетом обозначений отсюда получим первую априорную оценку



где  постоянная не зависит от .

Вторую априорную оценку, выводим аналогично как для случая . Оценим каждую слагаемую правой части соотношения (3.15), применяя неравенства Юнга (1.1), Гёльдера (1.3) и лемму 3.4.1, получим

.









где .





где .

Подставляя эти неравенства в тождество (3.15), получим:

,

для всех .

Как и ранее, умножая равенств (3.7) на  и просуммируем обе части полученного тождества по  и в силу вышеприведенных рассуждений, получим (3.21) почти всюду .

Таким образом, мы получаем доказательство теоремы 3.4.1, как и в случае доказательства теоремы 3.2.1.

## 3.5 Единственность глобального обобщенного решения задачи (3.1)-(3.3) при

Как и ранее в случае  перейдем к доказательству справедливости нижеследующей

**Теорема 3.5.1**. Пусть выполнены . Тогда для любой функции на интервале  существует единственное обобщенное решение задачи **** (3.1)-(3.3).

**Доказательство.** Поступая, также как и в доказательстве теоремы 3.3.1, положим, что у задачи **** (3.1)-(3.3) есть два решения , , в этом случае для разности этих двух решении  получаем тождество (3.22) для любого . Так как , полагая , имеем (3.23).

Далее применяя следующие известные неравенства

 (3.29)

Оценим правую часть (3.23), с учетом неравенства (3.29), имеем

 (3.30)

В силу (3.30) и леммы 1.2, тогда из (3.23) получим

 (3.31)

где 

Представим неравенство (3.31) в виде



или же



Обозначим через , тогда последнее неравенство запишется в виде



Отсюда получим

 (3.32)

В неравенстве (3.32) применяя (1.6) и (1.7), получим



Из последнего, с учетом вышеприведенного обозначения имеем

 (3.33)

Введем в рассмотрение функцию



Тогда из неравенства (3.33) мы получим следующее неравенство

 (3.34)

Очевидно, что при ,  то есть, , где то для выполнения неравенства (3.34) необходимо и достаточно  для . Но тогда из (3.33) получим такое неравенство



которое при условиях

  т.е. 

выполняется тогда и только тогда, когда  для . Находя продолжение данной процедуры, можно получить следующее:

 при 

из которого получаем выполнение  почти всюду на временном интервале  откуда вытекает единственность слабого обобщенного решения задачи. Следовательно, единственность обобщенного решения задачи **** (3.1)-(3.3) доказана.

## 3.6 Разрешимость задачи с нелинейными граничными условиями для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка

Как и ранее, рассмотрим в цилиндре  смешанную задачу для уравнения (3.1) в предположении что коэффициент 

 (3.35)

здесь  - заданная функция. Относительно коэффициентов уравнения (3.35) предположим выполнены следующие условия:

 (3.36)

**Задача **.Найти решение уравнения (3.35), которое удовлетворяет условиям (3.2)-(3.3).

Аналогично, как и в предыдущей задаче, принимая во внимание  для задачи **** установливается понятие слабого обобщенного решения.

**Теорема 3.6.1.** Пусть выполняются условия (3.36) и , тогда почти всюду на интервале  для любой функции  слабое обобщенное решение задачи **** существует.

**Доказательство.**Поступая также, как и в пункте 3.2, приближенное решение задачи ****, будем искать в виде (3.6).  находится из системы:

 (3.37)

с условиями (3.8)-(3.9).

Введем обозначения











Тогда систему уравнений (3.8) и (3.37) можно записать в матричном виде:



Просуммируем (3.37) по , предварительно умножив левые и правые части на . В результате получим:



**

Применяя лемму 1.2 и условие (3.36), получим неравенство

 (3.38)

Из неравенства (3.38) следует





где , .

Теперь пусть  – решение следующей задачи Коши:



,

Решение этой задачи можно записать в явном виде

.

Так как выполняется неравенство  а также c учетом (1.6), получим



Тем самым показано



Теперь умножим равенство (3.37) на  и просуммируем по . В результате получим

 (3.39)

Правая часть тождества (3.39), оценивается аналогично как (3.15). Таким образом, из тождества (3.39) получим

,

для всех .

Далее доказательство теоремы 3.6.1 завершается также, как и доказательство теоремы 3.4.1.

**3.7 Единственность слабого обобщенного решения задачи **

**Теорема 3.7.1.** Пусть , Тогда слабое обобщенное решение задачи ****(3.35), (3.2), (3.3) на интервале  единственно.

**Доказательство.** Исходя от противного, допустим, что у задачи **** (3.35), (3.2), (3.3) есть два решения , , и тогда для разности этих двух решений  выполняется условие  и следующее тождество



,

в силу того, что , то в качестве  можно взять  т.е. положим :





(3.40)

Применяя в неравенство (3.29) и лемму 1.2, из (3.40) получим дифференциальное неравенство

, (3.41)

где .

Неравенство (3.41) можно записать в виде



Из последнего неравенства следует





где .

Теперь пусть  – решение следующей задачи Коши:

 (3.42)

решение этой задачи можно записать в явном виде

.

Так как выполняется неравенство в силу оценки (1.6), получим

,

которое в силу (3.42) влечет единственность слабого обобщенного решения задачи **** (3.35), (3.2), (3.3). Теорема 3.7.1. доказана.

## 3.8 Начально-краевая задача для нагруженного псевдо-параболического уравнения

В этом подразделе исследуется нагруженное уравнение по пространственной переменной для линейного псевдопараболического уравнения с начальным и вторым краевым условием (условие Неймана). Поставленная задача сводится к нагруженному уравнению с нелокальным краевым условием. Разрешимость этой нелокальной задачи доказывается методом продолжения по параметру. Используя метод продолжения по параметру разрешимость ряда локальных и нелокальных задач для неклассических уравнений математической физики установлена в работах [69], [73], [75]-[80]. Отметим, что исследованию вопросов однозначной разрешимости краевых задач для уравнений математической физики дробного порядка посвящены работы [23], [70], [81]-[84]. Нагруженными уравнениями активно занимались такие ученые как Нахушев А.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. [85]-[87].

Рассмотрим в прямоугольной области ** нагруженное псевдопараболическое уравнение

 (3.43)

с начальным

 (3.44)

и краевыми условиями

 (3.45)

где – производная дробного порядка  в смысле Капуто,   и  заданные функции,  – постоянная.

**Теорема 3.8.1.** Пусть выполняются включения   Кроме того, пусть выполняются условия

 (3.46)

где  .

Тогда существует решение  нелокальной задачи (3.43)-(3.45) такое, что .

Полученное решение мы будем называть регулярным, так как оно удовлетворяет уравнению (3.43) почти всюду в , а начальные и граничные значения принимаются в обычном смысле.

**Доказательство.** Дважды продифференцируем уравнение (3.43) по *x*:



Введем обозначение , тогда последнее соотношение принимает вид:

 (3.47)

Теперь продифференцируем уравнение (3.43) по *x* и применим условие (3.45):





Введем следующие обозначения:







Перепишем данные тождества с учетом введенных обозначений:

 (3.48)

Начальное условие определяется из условия (3.44)

 (3.49)

Далее, будут использоваться следующие известные неравенства [79]

,

 (3.50)



Умножим обе части (3.47) на  и проинтегрируем по *х* от 0 до 1:

 (3.51)

Выполняя интегрирование по частям и подставив преобразованные интегралы в тождество (3.51), получим следующее неравенство:

(3.52)

Оценим правую часть неравенства (3.52), используя неравенства (3.50) и неравенство Юнга (1.1), получим



































Тогда неравенство (3.52), запишется в виде



Положим  получим







При выполнении условии теоремы получим неравенство



Применяя лемму 1.4. (Гронуолла-Беллмана), получаем справедливость следующей оценки

 для всех  (3.53)

Из соотношения (3.51), учитывая условие теоремы и оценку (3.53) получим еще одну оценку

 для всех  (3.54)

Обозначим через



Разрешимость задачи (3.47)-(3.49) доказывается с помощью метода продолжения по параметру.

Примем к рассмотению семейство краевых задач, являющееся однопараметрическим: найти функцию , которое представляет собой решение уравнения в области 

 (3.55)

краевого условия

 (3.56)

и начального условия

 (3.57)

Для множество всех чисел, принадлежащих отрезку , для которых задача (3.55)-(3.57) имеет единственное решение в классе  при произвольных      , для которых выполняются условия теоремы 3.8.1, примем обозначение .

При  получим начально-краевую задачу в области  для линейного псевдопараболического уравнения:

 (3.58)

 (3.59)

**Теорема 3.8.2.** При положительном условии теоремы 3.8.1, единственное регулярное решение  существует.

Существование решения докажем с помощью метода Галеркина. Приближенные решения  ищем в виде

 (3.60)

где  – собственные функции краевой задачи



Известно [77], что эти функции плотны в пространстве  Неизвестные коэффициенты  определяются из системы дифференциальных уравнений

 (3.61)

с начальными условиями

 (3.62)

Решение линейной задачи Коши (3.61)-(3.62) существует для любого конечного интервала , для сходимости сумм (3.60) нужны априорные оценки решений 

Умножим уравнение (3.61) на  и просуммируем по  тогда получим



 (3.63)



из которой следует оценка

 (3.64)

Из полученной оценки (3.64) можно сделать вывод, что последовательность приближенных решений  в классе  ограничена. Можно выбрать подпоследовательность  и перейти к пределу по  при  в системе (3.61), в связи с тем, что все производные, которые входят в уравнение (3.61) являются квадратично суммируемыми по области . Предельная функция принадлежит пространству . Поскольку система  плотна в  получим, что на предельной функции  уравнение (3.58) удовлетворяется почти всюду в  Тем самым, существование регулярного решения задачи (3.58), (3.59), (3.57) доказано.

Единственность решения задачи (3.58), (3.59), (3.57) доказывается стандартным образом, от противного, пусть существуют два решения  и , их разность обозначим через . Из уравнения (3.58) и условий (3.59) и (3.57) имеем









Как и при получении неравенства (3.63), находим





откуда следует , тогда  то есть,  в .

Тем самым, теорема 3.8.2 доказана полностью.

Из оценок (3.53) и (3.54) вытекает, что множество  замкнуто, а из теоремы 2 следует, что . Теперь покажем, что  – открытое множество. Пусть при  задача (3.55)-(3.57) разрешима. Покажем, что она разрешима при  где :

 (3.65)

 (3.66)

Возьмем произвольную функцию  и подставим в правую часть (3.65) и (3.66).

Обозначим через





где   связано с константой из (3.54), т.е., 







Так как при  существует единственное решение задачи (3.65), (3.66), (3.57) и можно считать, что  причем из (3.53) и (3.54) следует

 (3.67)

Выберем  так, чтобы 

Покажем, что оператор  является сжимающим. Для этого рассмотрим пару решений , , ,

 (3.68)

Как при выводе оценки (3.53) и (3.54) можно показать, что

,

Выбирая  таким малым, чтобы имело место неравенство ,

 (3.69)

Тогда из (3.67) и (3.69) следует, что существует  такое, что уравнение  однозначно разрешимо и существует элемент . Ясно, что этот элемент будет удовлетворять  и условиям (3.66) и (3.57), т.е.,  – открытое множество. Тогда разрешимость задачи (3.47)-(3.49) при  исходить из метода продолжения по параметру [80].

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

По результатам диссертационного исследования можно заключить следующие результаты:

Первый раздел диссертационной работы посвящен кратким общим сведениям, в которых приведены основные функциональные пространства, неравенства, известные вспомогательные леммы и теоремы, служащие инструментами для проведения исследований.

Во втором разделе для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка в цилиндрической области рассмотрена смешенная задача с линейным граничным условием, где доказана теорема о существовании слабого решения задачи для случаев положительных постоянных степеней  и :

 случай, когда  для всех ;

 случай, когда  для всех .

При доказательстве теоремы были применены приближения Галеркина, априорные оценки, известные алгебраические и функциональные неравенства. Методом соболевских вложений, а также с использованием теоремы Реллиха-Кондрашова, леммы Гронуолла-Беллмана и метода компактности доказана единственность слабого решения задачи для случая . Проведен анализ разрушения решения задачи, и доказано его отсутствие (разрушение) когда само решение стремится к бесконечности при  на некотором множестве  значений , точнее, когда соответствующий интеграл  стремится к бесконечности. Для следующих случаев степеней  и :

 случай, когда  для всех ;

 случай, когда  для всех 

рассмотрено и доказано что, для задачи при любого конечного времени  существует решение. Также в данном разделе изучена глобальная разрешимость смешанной задачи и доказана существование слабого обобщенного решения задачи. Наряду с этим, изучено асимптотическое поведение решения, показано, что решение задачи на бесконечности по времени  убывает как .

В третьем разделе доказана разрешимость смешанных задач для квазилинейного псевдопараболического уравнения дробного порядка с достаточно гладкой границей. Ключевой отличией данной задачи можно отметить то, что нелинейность присутствует как в самых уравнениях, так и граничном условии, которое задано в виде нелинейного условия с оператором дробного дифференцирования Капуто. Основным результатом вышеназванного раздела служит доказательство локальной или глобальной разрешимости сформулированных задач в зависимости от параметров уравнения. Наряду с этим, для одного варианта псевдопараболического уравнения дробного порядка доказаны теоремы существования и единственности глобального решения начально-краевой задачи с нелинейными граничными условиями. Также в данном разделе рассматривается и доказывается разрешимость смешанной задачи для нагруженного уравнения соболевского типа с дробной производной Капуто.

Полученные результаты в дальнейшем могут быть полезны в теории исследований квазилинейных дифференциальных уравнений Соболева с операторами дробного интегро-дифференцирования. Также по достигнутым результатам исследования можно проводить вычислительные эксперименты для получения численных значений решений, построить их визуализацию.

Результаты, полученные в ходе выполнения диссертационного исследования опубликованы в 4 работах, из них 2 [88, 89] изданы в высокорейтинговых международных журналах, входящих в первый квартиль по данным Journal Citation Reports компании Clarivate Analytics и/или имеющих показатель процентиль по CiteScore в базе данных Scopus не менее 80, 2 тезиса [90, 91] в сборниках результатов международных конференций

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия Академии наук СССР. Серия математическая. – 1954. Т. 18, № 1. – С. 3–50.
2. Showalter R.E. The Sobolev type equations I // Appl. Anal. – 1975. – Vol. 5, № 1. – P. 15–22.
3. Showalter R.E. The Sobolev type equations II // Appl. Anal. – 1975. – Vol. 5, № 2. – P. 81–99.
4. Корпусов М.О., Свешников А.Г. Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Журнал вычислительной и математической физики. – 2003. Т. 43, № 12. – С. 1765–97.
5. Корпусов М.О., Свешников А.Г. Разрушение решений нелинейных уравнений типа Соболева с кубическими источниками // Дифференциальные уравнения. – 2006. Т. 42, №3. – С.404–415.
6. Рубинштейн, Л.И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН СССР, сер. геогр. – 1948. – Т. 12, № 1. – С. 27–45.
7. Чудновский, А.Ф. Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – С.353
8. Hallaire M. Le potentiel efficace de l’eau dans le sol en regime de dessechement. L’Eau et la Production Vegetale. – Paris: Institut National de la Recherche Agronomique, 1964. – P. 27–62.
9. Баренблат Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, №5. – С. 852–864.
10. Benjamin T.B, Bona J.L, Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos Trans R Soc Lond. A. Math. and Phys. Sci. – 1972. – Vol. 272, № 1220. – P. 47–78.
11. Benjamin T.B. Lectures on Nonlinear Wave Motion. Lecture Notes in Applied Mathematics. – 1974. – Vol. 15. – P. 3–47.
12. Ting T.W. Certain non-steady flows of second-order fluids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1963. – Vol. 14. – P. 1–26.
13. Albert J.P, Bona J.L, Saut J-C. Model equations for waves in stratified fluids // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1961. – Vol. 1997, № 453. – P. 1233–60.
14. Padron V. Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward– backward pseudoparabolic equation // Trans. Am. Math. Soc. – 2004. – Vol. 356, № 7. – P.2739–2756.
15. Showalter R.E., Ting T.W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – Vol. 1, № 1. – P. 1-26.
16. Bestokov M.Kh. Boundary value problems for a pseudoparabolic equation with the Caputo fractional derivative // Differ. Equ. – 2019. – Vol. 55, № 7. – P. 884–893. Transl. Differ. Uravn. – 2019. – Vol. 55, № 7. – P. 919–928.
17. Tuan N.A., Regan D.O., Baleanu D., Tuan N.H. On time fractional pseudo-parabolic equations with nonlocal integral conditions // Evolution Equations and Control Theory. – 2022. – Vol. 11, № 1.
18. Sousa C.V.J., de Oliveira C.E. Fractional order pseudoparabolic partial differential equation: Ulam-Hyers stability // Bull. Braz. Math. Soc., New Series. – 2019. – Vol. 50, № 2. – P. 393–420.
19. Korpusov M.O, Sveshnikov A.G. Blow-up of solutions of a Sobolev-type equation with a nonlocal source // Sib. Mat. Zh. – 2005. – Vol. 46, № 3. – P. 567–578.
20. Bouziani, A. Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition // Nonlinear Anal. – 2003. – Vol. 55. – P. 883–904.
21. Xu R., Su J. Global existence and finite time blow-up for a class of semilinear pseudo-parabolic equations // Journal of Functional Analysis. – 2013. – Vol. 264. – P. 2732–2763.
22. Ting T.W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – Vol. 21, № 3. – P. 440–453.
23. Berdyshev A., Cabada A., Karimov E., On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics. – 2020. – Vol. 8 (6), No 1030 p.
24. Gopala Rao V.R, Ting T.W. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1972. – Vol. 49. – P. 57–78.
25. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа, M.: Физматлит, 2007. – 736 c.
26. Brill H., A semilinear Sobolev evolution equation in a Banach space // J. Differential Equations. – 1977. – Vol. 24. – P. 412–425.
27. David C, Jet W. Asymptotic behaviour of the fundamental solution to the equation of heat conduction in two temperatures // J. Math. Anal. Appl. – 1979. – Vol. 69. – P. 411–8.
28. Ngoc T.B, Zhou Y., O’Regan D., Tuan N.H. On a terminal value problem for pseudoparabolic equations involving Riemann-Liouville fractional derivatives // Appl. Math. Lett. – 2020. – Vol. 106, № 106373.
29. Liao M, Guo B, Li Q. Global existence and energy decay estimates for weak solutions to the pseudo-parabolic equation with variable exponents // Math. Meth. Appl. Sci. – 2020. – Vol. 43, №25. – P. 16–27.
30. Zhu X, Guo B, Liao M. Global existence and blow-up of weak solutions for a pseudoparabolic equation with high initial energy // Appl. Math. Lett. – 2020. – Vol. 104. – 106270.
31. Luan W, Yang Z. Global existence and bounds for blow-up time in a class of nonlinear pseudo-parabolic equations with a memory term // Math. Meth. Appl. Sci. – 2019. – Vol. 42. – P. 2597–2612.
32. Beshtokov M. Kh. To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 2018. – Vol. 10. – P. 3–16.
33. Beshtokov M. Kh. Boundary-value problems for loaded pseudoparabolic equations of fractional order and difference methods of their solving. Russian Mathematics. Springer. – 2019. – Vol. 63, № 2. – P. 1–10.
34. Таукенова, Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. Т. 46, № 10. – С. 1871-1881.
35. Debnath L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – Vol. 2003, № 54. – P. 3413–3442.
36. Podlubny I. Fractional differential equations. Mathematics in science and engineering. – San, Diego, CA: Academic Press Inc, 1999. – 340 р.
37. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – C. 688.
38. Agarwal R.P, Baleanu D., Nieto J.J, Torres D. F.M, Zhou Y. A survey on fuzzy fractional differential and optimal control nonlocal evolution equations // J. Comput. Appl. Math. – 2018. – Vol. 339. – P. 3–29.
39. Kilbas A.A, Srivastava H.M, Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland mathematics studies. Elsevier, Amsterdam. – 2006. – Vol. 204.
40. Zhou Y. Basic theory of fractional differential equations. – Singapore: World Scientific, 2014. – 304 с.
41. Jin L., Li L., Fang Sh. The global existence and time-decay for the solutions of the fractional pseudo-parabolic equation // Comput. Math. Appl. – 2017. – Vol. 73. – P. 2221–2232.
42. Seki K., Wojcik M., Tachiya M. Fractional reaction-diffusion equation // J. Chem. Phys. – 2003. – Vol. 119, № 4. – P. 2165.-2170,
43. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение, M: Физматлит, 2003. – 272 с.
44. Berdyshev A. S., Cabada A., Turmetov B. Kh., On solvability of some boundary value problem for polyharmonic equation with boundary operator of a fractional order‎ // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol. 39, № 15. P. 4548–4569.
45. Berdyshev A.S., Aitzhanov S.E., Zhumagul G.O. Solvability of Pseudoparabolic Equations with Non-linear boundary Condition // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, № 9. – P. 1772–1783.
46. Korpusov M. O, Sveshnikov A. G. Blow-up of solutions of a Sobolev-type equation with a nonlocal source // Sib. Mat. Zh. – 2005. – Vol. 46, № 3. – P. 567–578.
47. Wang X., Xu R. Global existence and finite time blow-up for a nonlocal semilinear pseudo-parabolic equation // Adv. Nonlinear Anal. – 2021. – Vol. 10. – P. 261 l–288.
48. Khompysh K. Pseudoparabolic equations with variable exponents and coefficients: blow-up and large time behaviors // Appl. Anal. – 2021. 2003342.
49. Alsaedi A, Kirane M, Torebek BT. Blow-up of smooth solutions of the time-fractional burgers equation // Quaest. Math. – 2020. – Vol. 43, № 2. – P. 185–192.
50. Mitidieri E, Pokhozhaev SI. A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities // Proc. Steklov Inst. Math. – 2001. – Vol. 234. – P. 1–362.
51. Alsaedi A., Ahmad B., Kirane M., Torebek B.T. Blowing-up solutions of the timefractional dispersive equations // Adv. Nonlinear Anal. – 2021. – Vol. 10, № 1. – P. 952–971.
52. Макаров П.А., Разрушение решения начально-краевой задачи для обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным граничным условием // Математические заметки. – 2012. – Т. 92, № 4. – С. 567–582.
53. Alshin A.B., Korpusov M.O. Sveshnikov A.G. Blow-up in Nonlinear Sobolev Type. – Walter de Gruyter Co.: Berlin, 2011. – P. 648.
54. Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. – Springer-Verlag, Berlin: Heidelberg, 1981. – 353 р.
55. Zennir K., Dridi H., Alodhaibi S., Alkhalaf S. Nonexistence of global solutions for coupled system of pseudoparabolic equations with variable exponents and weak memories // J. Funct. Spaces. – 2021. Vol. 2021. – 5573959..
56. Binh, H.D., Hoang, L.N., Baleanu, D., Van Ho, T.K. Continuity Result on the Order of a Nonlinear Fractional Pseudo-Parabolic Equation with Caputo Derivative // Fractal Fract. – 2021. – Vol. 5, № 41.
57. Tuan, N. H., Huynh, L. N., Ngoc, T. B., & Zhou, Y. On a backward problem for nonlinear fractional diffusion equations // Applied Mathematics Letters. – 2019. – Vol. 92. – P. 76-84.
58. Kochubei, A.N., Diffusion of fractional order // Differ. Equations. – 1990. – Vol. 26, № 4. – P. 485–492.
59. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. – N.-Y.: Basel, – Hong Kong: Marcel Dekker, 2003. – 632 р.
60. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Наука, 1972. – 257 с.
61. Шогенов В.Х., Шхануков-Лафишев М.Х., Бештоев Х.М. Дробные производные: интерпретация и некоторые применения в физике – Дубна: Сообщения объединенного института ядерных исследований, 1997.
62. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. – London: Imperial College Press, 2010. – 368 p.
63. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – Москва; Наука, 1987. – 483 c.
64. Корпусов М.О., Свешников А.Г. О разрушении решения уравнения типа Соболева с нелокальным источником // Сиб. Мат. Журнал. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 567–578.
65. Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. On the relaxation effect in finite time of solving a nonlinear pseudoparabolic equation // J. Comput. Math. Math. Phys. – 2011. – Vol. 51, № 3. – P. 407–435.
66. Tuan N.H, Baleanu D, Thach T.N, O’Regan D. N. H. Final value problem for nonlinear time fractional reaction–diffusion equation with discrete data // J. Comput. Appl. Math. – 2020. – Vol. 376, № 112883.
67. Abbas S., Benchohra M. Upper and lower solutions method for impulsive partial hyperbolic differential equations with fractional order // Nonlinear Anal. Hybrid Syst. – 2010. – Vol. 4, № 3. – P. 406–413.
68. H.M. Srivastava, A. Fernandez, D. Baleanu, Some new fractional-calculus connections between Mittag–Leffler functions // Mathematics. – 2019. – Vol. 7, № 6. – 485 с.
69. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1968. – 736 с.
70. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 660-666.
71. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
72. Корпусов М.О., Панин А.А. Лекции по линейному и нелинейному функциональному анализу. – Т. 2. Специальные пространства. – М.: Физфак, 2016. – 259 с.
73. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – С. 496.
74. Butler G., Rogers T. A Generalization of Lemma of Bihari and Applications to Pointwise Estimates for Integral Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1971. –Vol. 33. –P. 77–81.
75. Бубнов Б.А. Общие краевые задачи для уравнения Кортевега-де Фриза в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15, №1. – С. 26–31.
76. Бубнов Б.А. Разрешимость в целом нелинейных граничных задач для уравнения Кортевега-де Фриза в ограниченной области // Дифференциальные уравнения. – 1980. – Т. 16, №1. – С. 34–41.
77. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Гостехиздат, 1939.
78. Ларькин Н.А., Новиков В.А., Яненко Н.Н. Нелинейные уравнения переменного типа. Новосибирск: Наука, 1983. – 270 с.
79. Телешева Л. А. Обратная задача для параболических уравнений высокого порядка: случай неизвестного коэффициента, зависящего от времени // Вестник БГУ. Математика и информатика. – 2010. – №9. – С. 175-182.
80. Телешева Л.А. О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения высокого порядка с неизвестным коэффициентом при производной по времени // Матем. заметки ЯГУ. – 2011. – Т. 18, № 2. – С. 180-201.
81. Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.K. On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // Acta Mathematica Scientia. – 2014. – Vol. 34, № 6. – P. 1695–1706.
82. Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. – 2016. Vol. 2016.
83. Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. // Boundary Value Problems. – 2017. – Vol. 2017, № 1.
84. Бердышев А.С. Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов. – Алматы: КазНПУ им. Абая, Институт информационных и вычислительных технологий, 2015. – 224 с.
85. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. – М.: Наука, 2012. – 232 с.
86. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. – Алматы, 1995. – 270 с.
87. Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.
88. Aitzhanov SE, Berdyshev AS, Bekenayeva KS. Solvability issues of a pseudo-parabolic fractional order equation with a nonlinear boundary condition // Fractal Fract. – 2021. – Vol. 5, № 134. – P. 1–17.
89. Aitzhanov S.E., Kusherbayeva U.R., Bekenayeva K.S. Solvability of pseudoparabolic equation with Caputo fractional derivative // Chaos, Solitons and Fractals – 2022, – Vol 160. – P. 1–10.
90. Aitzhanov S.E., Berdyshev A.S., Bekenayeva K.S. Boundary value problems for pseudo-parabolic equation with fractional order derivatives // Absrtacts of the Uzbekistan-Malaysia conference “Computational models and technologies (CMT-2022)”. – September 16-17th, 2022, Tashkent. – P.142–143.
91. Бекенаева К.С., Байшемиров Ж.Д. Разрешимость уравнения Соболева с дробной производной Капуто // Тезисы докладов международной научной конференции. – 6-8 октября, 2022 г., Ташкент. – С.78–79.