Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

УДК 517.518.45 На правах рукописи

**БАШИРОВА АНАР НАБИЕВНА**

**Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара**

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Научные консультанты

доктор физико-математических наук, профессор

Е.Д. Нурсултанов

доктор физико-математических наук, профессор

М.И. Дьяченко

(Москва)

Республика Казахстан

Нур-Султан, 2022

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| **ВВЕДЕНИЕ**…………………………………………………………………….. | 4 |
| **1 ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ**…………………………………...………… | 15 |
| * 1. [Анизотропные сетевые пространства и анизотропные пространства Лоренца…………………………………………………………………….…](#_TOC_250009) | 15 |
| * 1. [Свойства усреднений относительно сети прямоугольников](#_TOC_250008)…………… | 19 |
| 1.3 Интерполяционная теорема………………………………………………. | 30 |
| 1. **ТЕОРЕМА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ДВОЙНЫХ** **РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА**……………………………….. | 48 |
| * 1. [Система Хаара и ее свойства](#_TOC_250006)…………………………………………… | 48 |
| 2.2 Теорема Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из сетевых пространств…………………………………………... | 49 |
| * 1. Теорема типа Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лебега со смешанной метрикой………………. | 54 |
| **3 МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА**. | 58 |
| * 1. [Неравенство разных метрик](#_TOC_250004)…………………………………………… | 58 |
| * 1. [Теорема о мультипликаторах рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лоренца](#_TOC_250003)………………………………………………………... | 60 |
| 1. **МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО** **СИСТЕМЕ ХААРА**………………………………………………… | 65 |
| * 1. [Анизотропные пространства Бесова-Хаара и их свойства](#_TOC_250002)……….. | 65 |
| * 1. Дискретные сетевые пространства и неравенство типа Никольского для частичных сумм ряда Фурье-Хаара…………………………………… | 69 |
| 4.3 Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца……………………………………. | 72 |
| [**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**](#_TOC_250000)………………………………………………………………. | 79 |
| **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**………………………. | 80 |

**НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ**

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

ГОСО РК 5.04.034-2011. Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. №1080).

Правила присуждения ученых степеней от 31 марта 2011 г. №127.

ГОСТ 7.32-2001. Межгосударственные стандарты (изменения от 2006 г.)

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления.

**ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы исследования.** Исследование мультипликаторов рядов Фурье - важное направление гармонического анализа. Большой интерес к данному направлению объясняется тем, что мультипликаторы рядов Фурье используются в различных разделах математики и в прикладных задачах, а также наличием нерешенных задач, требующих глубоких исследований. С развитием теории приближений вейвлетами возник интерес к исследованию рядов Фурье-Хаара.

Диссертационная работа посвящена исследованию мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в пространствах Лоренца и в анизотропных пространствах Лоренца.

Теория мультипликаторов рядов Фурье имеет своим истоком теорему М. Рисса [1], где показано, что характеристическая функция , когда - отрезок из , является мультипликатором тригонометрических рядов Фурье в пространстве , т.е.

, (1)

где не зависит от выбора отрезка из и функции из . В общем случае, когда - произвольное конечное подмножество в , константа в (1) будет зависеть существенно от геометрических свойств множества .

Пусть , - пространства функций, определенных на отрезке , таких, что. Пусть - полная ортонормированная система. Пусть функции соответствует ее ряд Фурье по данной системе

где - коэффициенты Фурье функции по системе . Будем говорить, что последовательность комплексных чисел является мультипликатором рядов Фурье по системе из пространства в пространство , если для функции с рядом Фурье

найдется функция , ряд Фурье которой совпадает с рядом

и оператор является ограниченным оператором из в .

Множество всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным нормированным пространством с нормой

.

Для тригонометрических рядов известна фундаментальная теорема Марцинкевича [2]:

**Теорема.** *Пусть , - последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию*

*тогда* *- мультипликатор в и*

Дальнейшее развитие теории мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье можно найти в работах Лизоркина П.И. [3, 4], Нурсултанова Е.Д. и Тлеухановой Н.Т. [5-7], Смаилова Е.С. и Тлеухановой Н.Т. [8], Юдина В.А. [9].

Рассмотрим последовательность . Всякая последовательность порождает оператор , который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

Согласно классической теореме Пэли-Марцинкевича [10], если и , то

для всех Точное значение , где найдено Буркхолдером Д. [11]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах С. Яно [12], Новикова И.Я., Семенова E.М. [13], Кротова В.Г. [14] и др.

Согласно [13, с.127, теорема 12.1], если , то

(2)

где константы эквивалентности зависят только от .

Вопросом об ограниченности мультипликаторов по системе Хаара в более общих пространствах посвящены работы [15-19].

Пусть измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения:

её функция распределения. Функция

называется невозрастающей перестановкой функции .

Пусть , . Пространство Лоренца определим как пространство измеримых функций , определенных на , для которых конечны величины:

если

если

В работе Брыскина И.Б., Лелонд О.В., Семенова Е.М. [15, c.760] показано, что если мультипликатор действует из в , , то действует из пространства Лоренца в пространство Лоренца для любого . В частности действует из в .

А так же для того чтобы

(3)

необходимо и достаточно, чтобы .

В работе Лелонд О.В., Семенова Е.М., Уксусова С.Н. [17, c.137] доказано следующее утверждение: пусть , , для того, чтобы

(4)

необходимо и достаточно, чтобы .

Таким образом, оставался открытым вопрос описания класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара при . Так же открытым оставался вопрос о мультипликаторах кратных рядов Фурье-Хаара.

**Цель работы.**

1. Исследование класса мультипликаторов рядов Фурье-Хаара в более общей ситуации, охватывающей случай, когда , .
2. Исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара для функций из анизотропных пространств Лоренца. Получение необходимых и достаточных условий для того, чтобы последовательность принадлежала классу .

**Общая методика исследования.** Основным аппаратом исследования являются интерполяционные методы для анизотропных пространств, методы сетевых пространств, неравенства типа Никольского, теоремы вложения для анизотропных пространств.

**Научная новизна.** В данной работе получены следующие новые результаты:

1. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств , где - множество всех прямоугольников в, Показано, что шкала пространств замкнута относительно многомерного интерполяционного метода Фернандеса.
2. В терминах коэффициентов Фурье-Хаара получен критерий принадлежности функции сетевому пространству и пространству Лебега со смешанной метрикой, где *-* множество всех прямоугольников в Доказана теорема типа Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара.
3. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности классу мультипликаторов рядов Фурье-Хаара .
4. Получено неравенство типа Никольского для кратных рядов Фурье-Хаара. В частности, получено, что для .
5. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности классу мультипликаторов кратных рядов Фурье-Хаара .

**Теоретическая и практическая ценность.** Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории дифференциальных уравнении, теории приближении, теории функциональных пространств.

**Апробация работы**

Основные результаты диссертационной работы представлены и обсуждены:

- на международных научных конференциях: XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2019» (Нур-Султан, 2019); «Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra» (EMJ-2019) Dedicated to the 10th Anniversary of the Eurasian Mathematical Journal (Нур-Султан, 2019); XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов - 2020» (Нур-Султан, 2020); Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021); Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященный 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М.В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, 2021);

- на научном региональном семинаре «Функциональный анализ и его приложения» / руководители: академик М. Отелбаев, академик Р. Ойнаров, профессор Е.Д. Нурсултанов, профессор К.Н. Оспанов (Нур-Султан, 2020);

- на научном семинаре «Современные проблемы математики» под руководством профессора Е.Д. Нурсултанова, Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова (Нур-Султан, 2018, 2019, 2020).

- на научном семинаре «Теория тригонометрических и ортогональных рядов» под руководством профессоров кафедры теории функций и функционального анализа МГУ имени М.В. Ломоносова Потапова М.К., Скворцова В.А., Лукашенко Т.П., Дьяченко М.И. (Москва, 2020).

- на городском научном семинаре «Дифференциальные операторы и их приложения» / руководители семинара: академик НАН РК М. Отелбаев, академик НАН РК Т.Ш. Кальменов, профессор Б.Е. Кангужин, член-корр. НАН РК М.А. Садыбеков, Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Институт математики и математического моделирования (Алматы, 2022)

**Публикации.** Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в пяти научных журналах и сборниках девяти международных научных конференций:

1. О мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Матем. заметки. – 109:6 (2021), с. 912–920;

2. Interpolation theorem for anisotropic net spaces // Russian Mathematics. – 2021, Vol. 65, No. 8, pp. 1–12

3. Multipliers of double Fourier–Haar series // Advances in Operator Theory, 6:3 (2021)

4. On the inequality of different metrics for multiple Fourier-Haar series // Eurasian Mathematical Journal, Vol.12, No 3 (2021), р.90-93.

5. The Hardy-Littlewood theorem for double Fourier-Haar series from mixed metric Lebesgue and net spaces // Analysis Math., 48:1, (2022) pp. 5–17.

6. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств //XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2019" (Нур-Султан, 2019. – С. 16-17).

7. О неравенстве разных метрик для кратных рядов Фурье-Хаара //XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2020"(Нур-Султан, 2020. – С. 19-20).

8. Интерполяционная теорема для сетевых пространств // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК C.Н. Харина (Алматы, 2019. – С. 74).

9. Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова (Алматы, 2021. – С. 17-18).

10. Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара // Международная научная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019) (Нур-Султан, 2019. – С. 52-53).

11. Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа-2020" (Уфа, 2020. – С. 88-90).

12. О мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» (Нур-Султан, 2021. – С. 41-46).

13. Теорема о мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященный 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова (Нур-Султан, 2021. – С. 17-18).

14. О мультипликаторах рядов Фурье-Хаара // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому (Москва, 2021. – С. 329-331).

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.**

Тема диссертационного исследования соответствует приоритетному направлению развития «Научные исследования в области естественных наук», специализированное научное направление «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики». Часть результатов диссертации вошли в промежуточный отчет за 2021 г. по проекту AP09260223 «Преобразования Фурье и мультипликаторы преобразований Фурье функций многих переменных из анизотропных пространств» и за 2020 г. по проекту AP08053326 «Методы функциональных пространств и их приложения в гармоническом анализе».

**Структура и объем диссертации.** Работа, объемом 83 страницы, состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка литературы и публикаций, включающего 61 наименования. Утверждения имеют номера, состоящие из двух индексов. Первый индекс имеет номер раздела, второй – собственный номер утверждения в данном разделе. Формулы имеют сквозную нумерацию.

**Основное содержание работы.** Перейдем к основным результатам диссертационной работы.

В первом разделе изучаются анизотропные сетевые пространства , где - множество всех прямоугольников в, и их интерполяционные свойства. Показано, что шкала пространств замкнута относительно многомерного интерполяционного метода Фернандеса. Основным результатом первого раздела является следующая теорема [20-22]:

**Теорема 1.3.** *Пусть - множество всех прямоугольников в, , , , , , тогда*

*где*

Во втором разделе изучается теорема типа Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара.

При исследовании связи между интегрируемостью функции и суммируемостью ее коэффициентов Фурье наиболее ярким примером является равенство Парсеваля:

где - коэффициенты Фурье по тригонометрической системе.

В случае, когда , здесь имеют место неравенства Харди-Литтлвуда: если , тогда

если , тогда

Для функции нижние оценки при и верхние оценки при доказаны лишь при дополнительных условиях.

Хорошо известна теорема Харди-Литтлвуда [1,с.165] для тригонометрических рядов:

*Пусть и . Если - монотонно невозрастающая последовательность, либо - монотонная функция, то для того чтобы необходимо и достаточно*

*причем выполнено соотношение*

Как видим, условия принадлежности пространству для монотонных функций и функций с монотонными коэффициентами одни и те же, т.е. сходимость ряда:

Для рядов по системе Хаара ситуация иная. Ульянов П.Л.в работе [23] доказал, что если коэффициенты Фурье-Хаара монотонны, то для того чтобы функция при необходимо и достаточно, чтобы , т.е. сходился ряд .

В то же время Нурсултановым Е.Д. и Аубакировым Т.У. в работе [24] доказана следующая теорема:

*Пусть , - монотонная функция. Тогда для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы для последовательности ее коэффициентов Фурье-Хаара имело место*

Целью второго раздела является получение результата Нурсултанова Е.Д. и Аубакирова Т.У. для двойных рядов Фурье-Хаара. Для кратных тригонометрических рядов аналоги теоремы Харди-Литтлвуда были получены Морицем Ф. [25], Дьяченко М.И. [26, 27].

Основными результатами второй главы являются теоремы Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара в анизотропных сетевых пространствах и в пространствах Лебега со смешанной метрикой [28, 29]:

**Теорема 2.2.** *Пусть , , , - множество всех прямоугольников в. Тогда, для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара принадлежала пространству , при этом имеет место соотношение*

. (5)

**Теорема 2.3.** *Пусть , , - неотрицательная, монотонная по каждой переменной функция. Тогда, для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара принадлежала пространству , при этом имеет место соотношение*

.

Отметим, что при доказательстве теоремы 2.2 основную роль играет теорема 1.3.

В третьем разделе получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности классу , в частности охватывающий случай, когда , [30-32]:

Теорема 3.2.*Пусть , , , тогда*

*в случае, когда , выражение справа заменяется на .*

Данный результат обобщает и дополняет результат работы Лелонд О.В., Семенова Е.М., Уксусова С.Н. [17, с.137].

В четвертой главе получено неравенство, описывающее поведение частичных сумм двойных рядов Фурье-Хаара [33, 34]:

(6)

В частности, из этого неравенства следует, что

для .

Основным результатом четвертой главы является получение необходимых и достаточных условий принадлежности последовательности классу [35-38]. В частности, описан случай, когда, что является новым результатом и в одномерном случае.

Теорема 4.3.*Пусть , , , . Тогда последовательность комплексных чисел является мультипликатором из в тогда и только тогда, когда*

*и верно*

*Здесь и далее в случае, когда , соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.*

При доказательстве достаточности существенную роль играет неравенство, полученное в пункте 4.2 раздела 4, а при доказательстве необходимости используется теорема 2.2.

1. **ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ СЕТЕВЫХ ПРОСТРАНСТВ**
   1. **Анизотропные сетевые пространства и анизотропные пространства Лоренца**

Для пространств со смешанной метрикой, анизотропных пространств вещественный интерполяционный метод не работает. Для интерполяции пространств со смешанной метрикой мы будем использовать интерполяционный метод Фернандеса Д.Л. [39-41].

Пусть – банахово пространство, – функциональная банахова решетка. Через обозначим пространство – значных измеримых функций таких, что с нормой . Пространство называется анизотропным пространством.

Пусть *.* - cемейство банаховых пространств, являющихся подпространствами некоторого линейного хаусдорфова пространства, которое называется совместимым семейством банаховых пространств.

Пусть . обозначим линейное подмножество , для элементов которого верно:

где

Лемма 1.1.[42] *Пусть , , , – два семейства совместимых банаховых пространств. Если для линейного оператора и для каждого*

*с нормой* ,

*тогда*

*.*

Пусть . Пространство Лебега со смешанной метрикой это множество всех измеримых на функций , для которых

Пусть измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения,

её функция распределения. Функция

называется невозрастающей перестановкой функции .

Пусть - измеримая на функция, через обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции последовательно по переменным .

Пусть, такие, что если , то , если, то и , . Анизотропным пространством Лоренца [43] назовем множество функций, для которых конечна величина:

Здесь и далее, когда, интеграл понимается как .

Если и , то

если и , то

Теорема 1.1. [44] *Пусть , , , . Тогда для пространств Лебега со смешанной метрикой справедливо*

где .

Дальнейшее развитие данного метода можно найти в работах Нурсултанова Е.Д. [45, 46].

Пусть в задана мера Лебега , - некоторое фиксированное семейство множеств конечной меры из . В дальнейшем будем называть "сетью".

Пусть - множество всех отрезков из . Для функции , определенной и интегрируемой на каждом отрезке из , определим функцию:

где точная верхняя грань берется по всем отрезкам , длина которых . Функция называется усреднением функции по сети .

Через , обозначим множество функций , для которых при

и при

Эти пространства называются сетевыми пространствами, они были введены и изучены в работе Нурсултанова Е.Д. [47]. Сетевые пространства являются важным инструментом исследования в теории рядов Фурье, в теории операторов и в других направлениях [48-54].

В работе Нурсултанова Е.Д. и Аубакирова Т.У. [24, с.342] было показано, что данная шкала пространств является замкнутой относительно вещественного интерполяционного метода, т.е. при имеет место

Отметим некоторые свойства сетевых пространств:

Лемма 1.2.[47, с.87] *Верны следующие утверждения:*

1. *Пусть - произвольная сеть множеств из отрезка , тогда имеет место вложение*
2. *Пусть - произвольная сеть, при*  *имеет место вложение*
3. *Пусть сеть такова, что , то при , верно*

Рассмотрим обобщение пространства в двумерном случае.

Пусть - множество всех прямоугольников из , для функции интегрируемой на каждом множестве определим:

где - длина отрезка .

Пусть , . Через обозначим множество всех функций , для которых:

здесь и далее, когда, выражение понимается как .

Как видно из определения пространства, это пространство функций, которые по каждой переменной имеют различные характеристики. Данное пространство называют анизотропным сетевым пространством.

Нам понадобятся классические неравенства Харди. Сформулируем их в виде леммы.

Лемма 1.3(Неравенство Харди)**.** *Пусть* *, , тогда имеют место неравенства:*

Теорема 1.2. *Пусть* *, , тогда*

*Доказательство.* Воспользуемся соотношением

*тогда*

Далее, применив неравенство Харди (см. лемму 1.3), получим

* 1. **Свойства усреднений относительно сети прямоугольников**

Следующие леммы являются важными при доказательстве интерполяционной теоремы

Лемма 1.4.*Пусть*  *- локально интегрируемая функция, разбиение на отрезки длиной , , причем , . Тогда для произвольного отрезка длиной найдутся отрезки , , такие, что - состоит из объединения целого числа отрезков разбиения и , , и имеет место неравенство:*

*Доказательство.* Пусть функция удовлетворяет условиям леммы, - отрезок и . Пусть:

Возьмем

Тогда имеем *, ,*  и

Лемма доказана.

Лемма 1.5.*Пусть разбиение на отрезки длиной , , причем , .Пусть такая функция, что*

(7)

*тогда для произвольного отрезка длиной найдутся отрезки и такие, что , и*

Доказательство сразу следует из леммы 1.4 и соотношения (7).

Пусть , , , , . Система множеств дает разбиение на прямоугольники, т.е. .

Для локально интегрируемой функции и множества определим функции , , , следующим образом:

(8)

(9)

(10)

(11)

т.е.

где .

Данные функции назовем разложением функции , соответствующим разбиению .

Лемма 1.6.*Пусть - разбиение*  *на прямоугольники,*  *– локально интегрируема на .*  *- разложение, соответствующее разбиению . Тогда*

Доказательство сразу следует из определений функций , , .

Лемма 1.7.*Пусть - разбиение*  *на прямоугольники,*  *– локально интегрируема на*  *и функция*  *определена равенством* (11)*. Тогда*

(12)

*Доказательство.* *Пусть , , .* Докажем следующее неравенство:

(13)

Рассмотрим случай . Используя определение функции , получим:

(14)

Далее имеем:

здесь - множество отрезков в .

Таким образом,

(15)

Рассмотрим случай, когда , . Учитывая лемму 1.6, заметим, что функция удовлетворяет лемме 1.5, поэтому найдутся отрезки и такие, что *,* и

Тогда аналогично доказанному выше (см.(15)), имеем

Аналогично имеем и в случае ,

Пусть , . Применяя лемму 1.5 и лемму 1.6, получим

где *,*, .

Таким образом, используя оценку (15) к каждому слагаемому имеем

Напомним определение усреднения функции по сети :

Пусть , , тогда учитывая (13), получим

Пусть , , здесь возможны два случая:, и , .

Если , , то мы используем оценку (13) и учитывая, что , имеем

Если , , то

Таким образом,

Аналогично получаем оценку

при .

При возможны 4 случая: , , , .

В первом случае используем первое соотношение из (13), во втором – первое и второе соотношение из (13), в третьем - первое и третье и в четвертом все соотношения из (13), тогда имеем

Лемма 1.8.*Пусть - разбиение*  *на прямоугольники,*  *– локально интегрируема на*  *и функции ,*  *определены равенствами (8) и (9) соответственно. Тогда*

(16)

*Доказательство.* *Пусть , .* Докажем неравенство

(17)

Рассмотрим случай, когда , . Воспользуемся соотношением (14), где встречаются нужные слагаемые и применим соответствующие их оценки в (15):

(18)

Тогда получим

При, cогласно лемме 1.6 имеем

Используя лемму 1.5, получим:

Применяя к каждому слагаемому соотношение (18), получим:

где*, .*

В случае, когда , применим лемму 1.4, тогда:

Оценим первые два слагаемые:

Оценивая третье слагаемое, получим:

Суммируя результаты, получим:

(19)

В случае, когда , применим лемму 1.5, тогда:

Применяя оценку (19) при , , получим:

Доказательство (16) следует из (17) так же как и оценка (12) следует из (13) в лемме 1.7. В силу симметрии, оценка функции получается аналогично оценке функции .

Лемма доказана.

Лемма 1.9.*Пусть - разбиение*  *на прямоугольники,*  *– локально интегрируема на*  *и функция определена равенством (10). Тогда*

*Доказательство:*

Так как и , то

Тогда

здесь , - отрезки, причем такие, что . Cледовательно:

Далее,

.

Лемма 1.9 доказана.

* 1. **Интерполяционная теорема**

Поясним, что неравенство векторов понимается как неравенство соответствующих координат, т.е. если , то это означает, что , .

Теорема 1.3.*Пусть - множество всех прямоугольников в, , , , , , , тогда*

*Доказательство.* Докажем вложение

Пусть , где то из вложений , достаточно доказать следующее вложение:

Пусть , определяется формулой (8). Тогда, для любых фиксированных , используя лемму 1.7 получим:

Таким образом:

Пусть , определяются формулами (8), (9). В этом случае, для любых фиксированных , применив лемму 1.8, получим:

И наконец, воспользовавшись леммой 1.9 для функции, которая определяется формулой (10),имеем:

Тогда

Далее, делаем замену

Учитывая, что , , , применим неравенство Харди (см. лемму 1.3), получим

Для доказательства обратного вложения покажем, что

(20)

Пусть , где , , .

Для функции рассмотрим произвольное представление:

Учитывая свойства усреднения по сети

,

получим:

Из произвольности представления имеем:

(21)

тогда

Используя (21), получим

.

Таким образом вложение (20) доказано, а следовательно

Интерполяционная теорема доказана.

1. **ТЕОРЕМА ТИПА ХАРДИ-ЛИТТЛВУДА ДЛЯ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА**
   1. [**Система Хаара и ее свойства**](#_TOC_250006)

Система Хаара - это система функций , , в которой , а функция , где , определяется следующим образом:

Иногда мы будем использовать одноиндексную систему Хаара , где , а множество индексов , определяющих систему Хаара будем обозначать через . Взаимно однозначное соответствие между и множеством натуральных чисел устанавливается формулой .

Рядом Фурье-Хаара функции является ряд вида

где - коэффициенты Фурье-Хаара функции .

Лемма 2.1.*Пусть , . - ее коэффициенты Фурье по системе Хаара. Тогда справедливо равенство*

*Доказательство.* Из определения системы Хаара следует, что , тогда

(22)

Заметим, что и для всех верно . Тогда выражение (22) примет вид

**2.2 Теорема Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из сетевых пространств**

Для , *,* определим пространство , как множество всех последовательностей для которых конечна норма:

здесь и далее выражение в случае, когда понимается как

Нам понадобится теорема 1 из работы К.А. Бекмаганбетова [55], которую сформулируем для нашего случая, когда .

Теорема 2.1**.** *Пусть , , справедливо равенство*

,

где

Теорема 2.2.*Пусть , , , - множество всех прямоугольников в . Тогда, для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара принадлежала пространству , при этом имеет место соотношение:*

(23)

Отметим, что для пространств соотношение (23) выполняется без всяких дополнительных условий на функцию и на её коэффициенты Фурье. Таким образом, для сетевых пространств аналог равенства Парсеваля выполняется для всех *.*

*Доказательство.* Пусть функция , её коэффициенты Фурье по системе Хаара. Докажем неравенство:

, (24)

где , *.*

По определению пространства

Заметим, из определения коэффициентов Фурье-Хаара, имеем:

где .

Тогда, учитывая, что длины отрезков , получим

Определим оператор . Пусть удовлетворяет условию теоремы и , , , такие, что , где , и , , , .

Тогда из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеют место

.

Следовательно:

Согласно интерполяционным теоремам 1.8 и 1.3, имеем:

.

Следовательно .

Тем самым получим

где ,

Покажем обратное неравенство. Пусть ,. Рассмотрим полином

− произвольный прямоугольник из сети . Тогда

Из определений функций и следует, что не более четырех слагаемых в сумме:

отличны от нуля, а именно, те слагаемые, где носители функций , содержат соответственно концы отрезков . Следовательно:

Заметим, что

Следовательно:

В силу произвольности выбора отрезков и получим

Пусть , , , такие, что , , . Рассмотрим оператор . Из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеют место:

Тогда

Откуда имеем

где , и следовательно имеет место неравенство:

Далее воспользуемся тем, что пространство является банаховым пространством (см. [56]) и следовательно сходится к некоторой функции при .

Теорема 2.2 доказана.

* 1. **Теорема типа Харди-Литтлвуда для двойных рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лебега со смешанной метрикой**

Напомним определение пространства Лебега со смешанной метрикой.

Пусть . Пространство , называемое пространством Лебега со смешанной метрикой, определяется как множество измеримых на функций , для которых конечна величина:

Функция называется монотонно-невозрастающей по каждой переменной, если для и выполняется неравенство

Теорема 2.3.*Пусть* , , *- монотонно-невозрастающая по каждой переменной функция. Тогда, для того, чтобы необходимо и достаточно, чтобы последовательность ее коэффициентов Фурье-Хаара принадлежала пространству , причем имеет место соотношение*

Приведем сначала лемму.

Лемма 2.2.*Пусть , , тогда*

*где*

*Доказательство:*

Лемма доказана.

*Доказательство теоремы 2.3*

Заметим, что из монотонности имеем

Тогда из этой оценки, неравенств Минковского и леммы 2.2

здесь

Аналогично

Таким образом, получим

Покажем обратное неравенство. Так как монотонно-невозрастающая по каждой переменной функция, то

Следовательно из теоремы 2.2 следует

Теорема 2.3 доказана.

1. **МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА**

**3.1** [**Неравенство разных метрик**](#_TOC_250004)

Хорошо известно неравенство разных метрик С.М. Никольского для рядов Фурье-Хаара в пространствах Лебега [57]. При и его в терминах частичных сумм можно записать следующим образом:

(25)

Откуда следует, что если , то

.

Здесь

- частичная сумма ряда Фурье-Хаара функции

Нурсултановым Е.Д. в работе [58] для последовательности тригонометрических частичных сумм Фурье функции были получены следующие соотношения:

и

(26)

Соотношение вида (26) использовалось при исследовании мультипликаторов по тригонометрической системе [53, р.310, 313; 54, p.615]. В данном разделе получим аналог соотношения (26) для рядов Фурье-Хаара. Он будет использован при доказательстве основной теоремы в параграфе 3.2.

Следующее утверждение в случае, когда доказано в работе Б.И.Голубова [59].

Лемма 3.1 *Пусть , Тогда верно неравенство*

(27)

*Доказательство.* Заметим, что

Согласно неравенству (25)

(28)

Определим оператор

Пусть , , , тогда из неравенства (28) следует, что

Следовательно

.

Согласно интерполяционным свойствам пространств и (см. теоремы 5.6.2, 5.3.1 из [60]):

,

имеем

где , . Тем самым, неравенство (27) доказано.

Теорема 3.1. *Пусть Если , то*

(29)

*где константа c зависит только от параметров .*

*Доказательство.* Изнеравенства (25) получим следующее неравенство

Так же как и в доказательстве леммы 3.1 воспользуемся вещественным интерполяционным методом. Пусть такие, что , , . Определим оператор . Из последнего неравенства следует, что для данного оператора имеет место:

Тогда

Откуда имеем

где , и следовательно имеет место неравенство (29).

* 1. [**Теорема о мультипликаторах рядов Фурье-Хаара функций из пространств Лоренца**](#_TOC_250003)

Пусть - система Хаара. Пусть функции  соответствует ее ряд Фурье-Хаара:

где – коэффициенты Фурье-Хаара функции Будем говорить, что последовательность комплексных чисел является мультипликатором рядов Фурье по системе Хаара из пространства в пространство , если для функции с рядом Фурье-Хаара найдется функция , ряд Фурье-Хаара которой совпадает с рядом:

Для доказательства основной теоремы данного раздела нам понадобятся следующие утверждения:

Лемма 3.2.[59, с.261]. *Пусть , тогда верно равенство*

Лемма 3.3.*Пусть и . Тогда верно*

Данное утверждение доказывается аналогично обратному неравенству Гёльдера [61].

Теорема 3.2.*Пусть , , , тогда*

*в случае, когда , выражение справа заменяется на .*

*Доказательство.* Пусть последовательность комплексных чисел такая, что

Пусть , возьмем . Из леммы 3.1 и леммы 3.2 следует

Далее применяем неравенство Гёльдера и теорему 3.1

где . Таким образом, и .

Пусть теперь является мультипликатором из пространства в , , . Заметим, что согласно теореме 3 [24, с.343] имеем

где - множество отрезков из . Учитывая, что (см. лемму 1.2), получим:

С другой стороны, из леммы 3.1 и леммы 3.2 для имеем

Таким образом, получим:

(30)

Пусть - последовательность такая, что

Пусть - произвольная последовательность чисел. Рассмотрим последовательность следующего вида

Тогда из (30), учитывая произвольность выбора последовательности , имеем

В последнем равенстве применили лемму 3.3.

Тем самым, теорема 3.2 доказана.

1. **МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ХААРА**

**4.1** [**Анизотропные пространства Бесова-Хаара и их свойства**](#_TOC_250002)

Пусть - линейное нормированное пространство, для , определим пространство , как множество всех последовательностей со значением в , для которых конечна квазинорма:

Теорема 4.1.*Пусть , , . Тогда*

*где*

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы из [55, с.31], которая доказана в случае, когда .

Пусть , . Для функции обозначим:

где - коэффициенты Фурье функции по кратной системе Хаара.

Анизотропным пространством типа Бесова по системе Хаара назовём множество функций из , для которых конечна норма

Заметим, что пространство является ретракцией пространства , следовательно согласно теореме 4.1:

(31)

где

Лемма 4.1.*Пусть , ,*

*- частичная сумма ряда Фурье-Хаара функции . Тогда*

*Доказательство.* Интегральное представление частичной суммы:

Пусть , тогда учитывая, что

и для всех остальных , .

Тогда имеем:

Далее, учитывая, что и применим неравенство Йенсена и обобщенное неравенство Минковского:

Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим:

Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2*.**Пусть , , ,*

*Тогда имеет место вложение:*

*т.е. верно неравенство*

(32)

*Доказательство.* Заметим, что

Согласно лемме 4.1 имеем

(33)

Таким образом доказано вложение:

где. Пусть вектора, удовлетворяющие условиям , , тогда из неравенства (33) для оператора вложения имеет место:

Следовательно по лемме 1.1 имеем

Согласно соотношению (31) и теореме 1.1:

, ,

где , .

Тем самым, неравенство (32) доказано.

**4.2 Дискретные сетевые пространства и неравенство типа Никольского для частичных сумм ряда Фурье-Хаара**

Пусть - некоторые фиксированные семейства конечных множеств из ℤ. Семейство назовем сетью в . Определим дискретные сетевые пространства как множество последовательностей комплексных чисел , для которых конечна норма

здесь

Данные пространства являются аналогами дискретных пространств, рассмотренных в работе Е.Д. Нурсултанова [44, с.99] и обладают аналогичными свойствами:

1. при , .
2. при , .
3. где .
4. .

Нам понадобится неравенство типа Никольского для двойных рядов Фурье по системе Хаара.

Теорема 4.2. *Пусть , , , - множество всех прямоугольников из вида . Если функция из с рядом Фурье-Хаара , тогда и верно неравенство:*

*где зависит только от параметров .*

*Доказательство.* Определим оператор . Из леммы 4.1 следует, что:

Пусть векторы удовлетворяют условиям , , . Пусть где . Тогда для оператора из неравенства (34) следует

,

для любого . Следовательно для данного оператора имеем

где , .

Согласно теореме 1.1 и в силу свойства пространств получим

Таким образом, мы показали, что оператор ограничен из в , следовательно имеет место неравенство

Теорема доказана.

Следствие 4.1.*Пусть* *, .**Если , тогда имеют место следующее соотношение*

*,*  (35)

в частности

(36)

*при*

*Доказательство.* Покажем, что

при *.*

Поскольку , то из теоремы 4.2 имеем

Тогда

при *.*

Учитывая монотонность последовательности

Следовательно, верно соотношение (36).

Доказательство соотношения (35) следует из свойства пространств и теоремы 4.2.

**4.3 Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца**

Лемма 4.3.*Пусть и . Тогда верно*

*Доказательство.* Докажем неравенство

(37)

Определим последовательность следующим образом. Если , то

Пусть , . Из определения точной верхней грани следует, что найдется такое, что

В этом случае определим следующим образом

Определим теперь . Если , то

Пусть и такое, что

тогда

Рассмотрим теперь последовательность . Тогда и

В силу произвольности получим

И следовательно, верно неравенство (37).

Для доказательства обратного неравенства введем обозначения , . Далее учитывая, что , используем неравенство Йенсена:

Далее применим неравенство Гельдера

Тем самым получим

Лемма 4.3 доказана.

Теорема 4.3.*Пусть , , , . Тогда последовательность комплексных чисел является мультипликатором из в тогда и только тогда, когда*

*и верно*

*Здесь и далее в случае, когда , соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.*

*Доказательство.* Пусть последовательность комплексных чисел такая, что

*где*

Пусть. Найдется такой , что . Применив соотношение (32) и лемму 2.1 получим:

Пусть , . Тогда учитывая равенство имеем , . Применим неравенство Гёльдера и соотношение (35) (см. следствие 4.1)

Так как , следовательно верно .

Таким образом, и .

Пусть теперь является мультипликатором из пространства в . Пусть , . Согласно теореме 2.2 имеем:

где - множество прямоугольников из . Учитывая, что (см. теорему 1.2), получим:

С другой стороны, из леммы 4.2 и леммы 2.1 для имеем

Таким образом, получим:

(38)

Для найдется , где , , что имеет место:

Пусть - произвольная последовательность чисел. Рассмотрим последовательность следующего вида

Тогда из (38), учитывая произвольность выбора последовательности , имеем:

В последнем равенстве применили лемму 4.3.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Одним из важных направлений теории рядов Фурье по системе Хаара является изучение мультипликаторов рядов Фурье-Хаара. Именно данные теории позволяют решать множество сложнейших задач в разных отраслях науки. С помощью данной теории в современной математике осуществляется получение различных математических оценок. Совокупность представленных результатов диссертации позволяют сформулировать следующие **выводы**:

1. Доказана интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств. Показано, что шкала анизотропных пространств замкнута относительно многомерного интерполяционного метода, здесь - множество всех прямоугольников в.

2. В терминах коэффициентов рядов Фурье-Хаара получен критерий принадлежности функции сетевому пространству и пространству Лебега со смешанной метрикой. Для сетевых пространств имеет место критерий в терминах коэффициентов Фурье-Хаара без каких-либо дополнительных условий на функцию, либо на ее коэффициенты Фурье-Хаара. Следовательно, можно сказать, что для сетевых пространств имеет место аналог равенства Парсеваля для всех .

3. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности классу мультипликаторов рядов Фурье-Хаара .

4. Получено неравенство типа Никольского для кратных рядов Фурье-Хаара. В частности, получено, что для .

5. Получены необходимые и достаточные условия принадлежности последовательности классу мультипликаторов кратных рядов Фурье-Хаара .

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Zygmund A. Trigonometric series. – Cambridge: Cambridge University Press, 1959. – Vol. 2. – 354 p.
2. Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math. – 1939. – Vol. 8. – P. 78-91.
3. Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 231-248.
4. Лизоркин П.И. К теории мультипликаторов Фурье // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 149-163.
5. Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, №2. – С. 235-247.
6. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О мультипликаторах кратных рядов Фурье // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 237-242.
7. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34, №2. – С. 86-88.
8. Smailov E.S., Tleukhanova N.T. Estimation of error of cubature formula in Besov space // Eurasian Math. J. – 2010. – Vol. 1, №1. – P. 147-156.
9. Юдин В.А. Сферические суммы рядов Фурье в // Мат. Заметки. – 1989. – Т. 46, №2. – C. 145-146.
10. Кашин Б.С., Саакян А.Л. Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
11. Burkholder D.L. A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 7. – P. 591-595.
12. Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. – 1959. – Vol. 11. – P. 195-215.
13. Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. – Dordrecht: Cluver Acad. Publ. – 1997. – 218 р.
14. Кротов В.Г. О безусловной сходимости рядов Хаара в // Мат. заметки. – 1978. – T. 23, №5. – C. 685-695.
15. Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье – Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2000. – Т. 41, №4. – С. 758-766.
16. Girardi M., Operator-valued Fourier Haar multipliers // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 325. – P. 1314-1326.
17. Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2005. – T. 46, №1. – C. 130-138.
18. Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. матем. журнал. – 2012. – T. 53, №2. – C. 388-395.
19. Wark H.M. Operator-valued Fourier Haar multipliers on vector-valued spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 450. – P. 1148-1156.
20. Bashirova A.N., Kalidolday A.H., Nursultanov E.D. Interpolation theorem for anisotropic net spaces // Russian Mathematics. – 2021. – Vol. 65, №8. – P. 1-12.
21. Баширова А.Н. Интерполяционная теорема для анизотропных сетевых пространств //XV Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2019" – Нур-Султан, 2019. – С. 16-17.
22. Баширова А.Н., Нурсултанов Е.Д. Интерполяционная теорема для сетевых пространств // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан и Workshop «Problems of modelling processes in electrical contacts», посвященная 80-летнему юбилею академика НАН РК C.Н. Харина – Алматы, 2019. – С. 74.
23. Ульянов П.Л. О рядах по системе Хаара // Математ. сб. – 1964. – Т. 63(105), №3. – C. 356-391.
24. Нурсултанов Е.Д., Аубакиров Т.У. Теорема Харди–Литтлвуда для рядов Фурье–Хаара // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, №3. – C. 340-347.
25. Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 109, №2. – P. 417-425.
26. Дьяченко М.И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Математический сборник. – 1986. – Т. 129(171), №1. – С. 55-72.
27. Дьяченко М.И. Кусочно-монотонные функции многих переменных и теорема Харди-Литтлвуда // Изв. АН СССР. – 1991. – T. 55, №6. – С. 1156-1170.
28. Bashirova A.N., Nursultanov E.D. The Hardy-Littlewood theorem for double Fourier-Haar series from mixed metric Lebesgue and net spaces // Analysis Math. – 2022. – Vol. 48, Issue 1. – P. 5-17.
29. Нурсултанов Е.Д., Баширова А.Н. Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье-Хаара // Международная научная конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019) – Нур-Султан, 2019. – С. 52-53.
30. Тлеуханова Н.Т., Баширова А.Н. О мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Матем. заметки. – 2021. – Т. 109, №6. – C. 912-920.
31. Баширова А.Н. Теорема о мультипликаторах рядов Фурье по системе Хаара // Евразийский молодежный форум «Евразия – пространство сотрудничества, мира и согласия», посвященный 20-летнему юбилею Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова – Нур-Султан, 2021. – С. 17-18.
32. Баширова А.Н. О мультипликаторах рядов Фурье-Хаара // Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» посвященная выдающемуся математику И.Г. Петровскому – Москва, 2021. – С. 329-331.
33. Bashirova A.N., Nursultanov E.D. On the inequality of different metrics for multiple Fourier–Haar series // Eurasian Math. J. – 2021. – Vol. 12, №3. – P. 90-93.
34. Баширова А.Н. О неравенстве разных метрик для кратных рядов Фурье-Хаара //XVI Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов-2020" – Нур-Султан, 2020. – С. 19-20.
35. Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D., Bashirova A.N. Multipliers of double Fourier–Haar series // Advances in Operator Theory. – 2021. – Vol. 6(3). – DOI: <https://doi.org/10.1007/s43036-021-00148-z>
36. Баширова А.Н. Теорема о мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш. Кальменова – Алматы, 2021. – С. 17-18.
37. Баширова А.Н. Мультипликаторы кратных рядов Фурье-Хаара функций из анизотропных пространств Лоренца // Международная научная конференция "Уфимская осенняя математическая школа-2020" – Уфа, 2020. – С. 88-90.
38. Баширова А.Н. О мультипликаторах двойных рядов Фурье-Хаара // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» – Нур-Султан, 2021. – С. 41-46.
39. Fernandez D.L. Lorentz spaces with mixed norms // J. Funct. Anal. – 1977. – Vol. 25, №2. – P. 128-146.
40. Fernandez D.L. Interpolation of Banach spaces // Stud. Math. (PRL). – 1979. – Vol. 65, №2. – P. 175-201.
41. Fernandez D.L. Interpolation of Banach space and the Calderon spaces // Proc.London Math. Soc. – 1988. – Vol. 56. – P. 143-162.
42. Bekmaganbetov K. A., Nursultanov E. D. Embedding theorems for anisotropic Besov spaces // Izv. Math. – 2009. – Vol. 73, Issue 4. – P. 655-668.
43. Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394(1). – С. 1-4.
44. Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из пространств // Известия РАН. – 2000. – №64(1). – С. 95-122.
45. Нурсултанов Е.Д. О применении интерполяционных методов к исследованию свойств функций многих переменных // Матем. заметки. – 2004. – №75(3). – С. 372-383.
46. Bekmaganbetov K., Nursultanov E.D. Interpolation of Besov and Lizorkin-Triebel spaces // Anal. Math. – 2009. – Vol. 35. – P. 169-188.
47. Нурсултанов Е.Д. Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литтлвуда // Матем. сб. – 1998. – №189(3). – C. 83-102.
48. Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood-Paley inequalities and Fourier multipliers on // Studia Mathematica. – 2016. – Vol. 234, Issue 1. – P. 1-29.
49. Akylzhanov R., Ruzhansky M. Net spaces on lattices, Hardy-Littlewood type unequalities, and their converses // Eur. Math. Jour. – 2017. – Vol. 8, Issue 3. – P. 10-27.
50. Akylzhanov R., Ruzhansky M., Nursultanov E. Hardy-Littlewood, Hausdorff-Young-Paley inequalities, and Fourier multipliers on compact homogeneous manifolds // Jour. of Math. Anal. and Appl. – 2019. – Vol. 479, Issue 2. – P. 1519-1548.
51. Nursultanov E., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21. – P. 950-981.
52. Nursultanov E., Sarybekova L., Tleukhanova N. Some new Fourier multiplier results of Lizorkin and Hormander types // Functional analysis in interdisciplinary applications: procced. sympos. – Cham: Springer, 2017. – P. 58-82.
53. Persson L-E., Sarybekova L., Tleukhanova N. A Lizorkin theorem on Fourier series multipliers for strong regular systems // In book: Analysis for science, engineering and beyond. – Heidelberg: Springer, 2012. – P. 305-317.
54. Sarybekova L.O., Tararykova T.V., Tleukhanova N.T. On a generalization of the Lizorkin theorem on Fourier multipliers // Math. Inequal. Appl. – 2010. – Vol. 13, №3. – P. 613-624.
55. Бекмаганбетов К.А. Теорема интерполяции для пространств ,// Вестник Казахского национального университета. – 2008. – №1(56). – С. 30-42.
56. Dyachenko M., Nursultanov E., Tikhonov S. Hardy-type theorems on Fourier transforms revised // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – Vol. 467. – P. 171-184.
57. Schauder J. Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonal systems // Math. Z. – 1928. – №28. – P. 317-320.
58. Нурсултанов Е.Д. Неравенство разных метрик С.М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. – 2006. – T. 255. – C. 197-215.
59. Голубов Б.И. Наилучшие приближения функций в метрике полиномами Хаара и Уолша // Математический сборник. – 1972. – T. 87(129), №2. – C. 254-274.
60. Берг Й., Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства: введение / пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 264 с.
61. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1975. – 480 с.