Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова

УДК 517.968.7 На правах рукописи

**АЙТЕНОВА ГУЛСЕЗИМ МУРАТОВНА**

**Исследование краевых задач и многопериодических решений систем**

**интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по направлениям векторного поля**

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание степени

доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты:

д.ф.-м.н., профессор Сартабанов Ж.

к.ф.-м.н., доцент Абдикаликова Г.А.

Зарубежный научный консультант:

д.ф.-м.н., профессор Керимбеков А.

(Республика Кыргызстан)

Республика Казахстан

Актобе, 2022

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| **ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ** ………………………………….……  **ВВЕДЕНИЕ** ..........................................................................................................   1. **НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ И МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОНЕЧНО-ЭРЕДИТАРНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕКТОРНОМУ ПОЛЮ**.........................................................................................................    1. Исследование начальных и многопериодических задач для линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по направлению векторного поля .........................       1. Линейные однородные -уравнения и системы интегро- дифференциальных уравнений…………………………………………..       2. Многопериодичность решения начальной задачи для неоднородной системы интегро-дифференциальных уравнений с конечной эредитарностью……………………………………………………………    2. Представление многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с  оператором дифференцирования и -периодом эредитарности…………………….       1. Представление многопериодических решений однородной системы интегро-дифференциальных уравнений………..................................       2. Построение многопериодического решения неоднородного интегро-дифференциального уравнения с оператором дифференцирования…..    3. Многопериодические решения квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования и ограниченной эредитарностью…………………………………………...       1. Исследование многопериодического решения системы нелинейных интегро-дифференциальных -уравнений в случае, когда нелинейность не содержит эредитарности………………...…………….       2. Многопериодическое решение квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с -оператором и -периодической эредитарностью в общем случае…………………………………………    4. Однозначная разрешимость краевой задачи для квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в случае конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю……………………………………………………………………….. 2. **МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С КОНЕЧНОЙ ЭРЕДИТАРНОСТЬЮ И ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕКТОРНОМУ ПОЛЮ**................    1. Многопериодическое решение начально-краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа……………………………………………………………...….............    2. Ограниченные на полуоси по пространственной переменной и многопериодическое по временным переменным решение линейного конечно-эредитарного интегро-дифференциального уравнения параболического типа………………………………..................................    3. Многопериодическое по временным переменным и ограниченное по пространственной переменной решение конечно-эредитарной интегро-дифференциальной квазилинейной системы конвективно-диффузионного типа………………………………………………………   **ЗАКЛЮЧЕНИЕ** ...................................................................................................  **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ** .....................................  **ПРИЛОЖЕНИЕ**................................................................................................... | 4  5  28  28  28  45  53  56  65  70  70  75  88  98  98  111  124  137  139  148 |

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
|  | – множество действительных чисел; |
|  | ‒ -мерное вещественное евклидово пространство, ; |
|  | − временные переменные, , ; |
|  | – множество целых чисел; |
|  | − множество -мерных целочисленных векторов, ; |
|  | – -мерный целочисленный вектор, ; |
|  | ‒ рационально несоизмеримые частоты ,  ; |
|  | ‒ вектор-период ; |
|  | ‒ единичный -вектор, ; |
|  | ‒ класс гладких в  функций порядка ; |
|  | ‒ пространство функций, -периодических по  и  гладких по  порядка ; |
|  | ‒ единичная матрица. |

**ВВЕДЕНИЕ**

**Общая характеристика работы.** В данной работе исследуется явление, описывающее искомой функцией  по  многомерным временным переменным  периодические решения дифференциально-операторных векторно-матричных уравнений



 (0.1)

с оператором дифференцирования

.

Здесь  – постоянный вектор, определяющий поле направлений оператора ;  – матричный оператор, описывающий связь неизвестных переменных ;  – ядро интегрального члена, характеризующее эредитарность явления;  – число определяющее эредитарный период,  – внешняя возбуждающая сила,  – характеристика оператора . В исследовании в качестве параметра интегрирования уравнения и начального условия взята переменная . Предложен метод исследования двухточечной краевой задачи по этой переменной для рассматриваемой системы. Эта задача является обобщением проблемы многопериодичности решений.

В дальнейшем с целью изучения состояния диффузионного характера явления определены условия -периодичности по  решений краевых задач для интегро-дифференциального уравнения



 (0.2)

параболического типа с положительным компонентом и уточнены методы исследования. Здесь  и  – const;  и  – заданные матричные и векторные функции. Если рассматривать предельный случай , то система (0.2) переходит в диффузионное уравнение.

**Актуальность исследования.** Явления, математические модели которых

описываются интегро-дифференциальными уравнениями, распространены в биологии, особенно в условиях, связанных с наследственностью. В технике подобные явления наблюдаются в теории упругости. Скажем, если упругая колонна ранее изогнута или образована, то ее последующий изгиб или скручивание очень тесно связано с предыдущим положением. Тем самым, следует, что наследственные состояния существуют и в механике. Аналогично описывается последующее состояние в электромагнитных полях в зависимости от их прежних и нынешних условий.

Таким образом, известно, что в мире существуют наследственные, то есть эредитарные явления, характеризующиеся прошлым и настоящим, наряду с детерминантными явлениями, будущее которых характеризуется не только настоящим, но и прошлым. Изучение таких явлений связано с именем В. Вольтерра. Очень важно свойство таких явлений, которые создают колебание во времени. В биологии это называется флуктуационным развитием. Например, если кролики и волки, мальки и щуки или гуси и фазаны живут в изолированных от других животных местах, то при уменьшении питательных жертв (кролики, мальки, гуси) начинают появляться и хищники (волки, щуки, фазаны). Сокращение добычи создает условие для роста жертв и обеспечивает рост уменьшенных хищников. Рост хищников приводит к уменьшению жертв. Изучение таких временных колебаний в развитии является очень ценной, актуальной проблемой. Связь между современным человеческим развитием и производством питательных кормов на Земле также происходит из группы флуктуационных колебаний. Простейшими такими колебаниями являются периодические флуктуации. Периодические изменения дозируются частотами. А если изменения происходят под действием нескольких периодических сил, то возникают сложные колебания, и величина изменений определяется размерностью частот. В связи с этим возникают многокомпонентные колебательные многопериодические явления. Тот факт, что один из периодов нескольких сопутствующих периодических явлений не измеряется другими, обусловил классификацию времени, т. е. понятие многомерного времени. Таким образом, периодические явления по многомерному времени называются многопериодическими. Далее, определение скорости по многомерному времени привело к понятию оператора дифференцирования по направлениям векторного поля. Итак, тема исследования посвящена изучению актуальной проблемы.

В диссертации многомерное время выражено вектором , а связь между его размерностями  и  определяется  – постоянным векторным полем. Следовательно, скорость явления определяется приведенным выше в этом временном поле оператором дифференцирования . В частном случае, если , то имеем оператор, рассмотренный В.Х. Харасахалом. Выбор такого оператора связан с небольшим обобщением известного оператора, причем такой оператор часто используется в КАМ-теории. Скорость явления описываемого вектором  во временном поле  определяется выражением . Это явление эредитарное. Тем самым, его математическая модель вместе с вектор-функцией  зависит от величины заданной интегральным выражением , характеризующей наследственность. Здесь  – известная вектор-функция,  – характеристика векторного поля,  – параметр, который в основном измеряет время до этого момента. Чаще всего  – определяет начальный момент наследственности,  – неограничивающий начало явления наследственности до настоящего момента  и момент , выражающий время  влияния наследственности от момента  до настоящего времени . В случае флуктуационных эредитарных явлений параметр может иметь значения  или . В диссертационной работе ограничились рассмотрением последнего случая. В рассмотренных системах линейно определяли эредитарный член интегралом  или . В исследовании определены условия многопериодичности таких явлений и показаны пути решения краевых задач.

Актуальность задач исследования связана и с приложениями эредитарных колебаний в механике, электромагнетизме. Например, если явление колебаний имеет эредитарный характер, то уравнение движения струны при известном моменте  задается изменением угла кручения струны , подчиненным соотношению

,

где  и  – const, период эредитарности колебательного явления.

Также известно, что эредитарное биологическое явление "хищник-жертва"  связано законом колебаний, описываемым системой уравнений

,

,

где  и постоянные,  и функции, обращающиеся в нуль при , период эредитарности рассматриваемого биологического явления.

Очевидно, что вышеприведенные интегро-дифференциальные уравнения являются частными случаями математической модели эредитарных явлений, описываемых системой уравнений



относительно искомой -вектор-функции  с заданными -матрицами  и  и -вектор-функцией , где  – постоянная. Так как процесс является колебательным, то, как правило, матрица  и вектор-функция , в общем случае, являются почти периодическими по , а ядро  обладает свойством диагональной периодичности по .

Во многих случаях, особенно в химических реакциях и гидродинамике, эредитарные явления сопровождаются диффузионными явлениями. Так, если с целью очистки грязи в речную воду распыляется химическая смесь, то с этого периода начинается эредитарно-диффузионное явление. Начало изучения таких явлений связано с Г.Эвансом, учеником В. Вольтерра. Диффузионное явление является полудетерминантным, его будущее характеризуется только начальной стадией и оно необратимое. В этом случае диффузионность рассматриваемой в диссертационной работе задачи определяется оператором , вектор  является положительным компонентом. В исследовании изучается многопериодичность таких явлений. Также для этих явлений применены модифицированные методы решения краевых задач параболического типа.

Таким образом, диссертационное исследование посвящено решению фундаментальных теоретических и приоритетных актуальных проблем, связанных с приложениями естественно-технических процессов.

Обзор научной литературы, уточняющий актуальность диссертационного исследования, начинается с работ В. Вольтерра и его последователей в области интегро-дифференциальных уравнений, появивщихся в начале XX века [1-6]. А исследования постсоветского периода проводились в духе работ [7-17]. Известно, что такие исследования проводятся сначала для линейных уравнений и систем с одной независимой переменной и посвящены задачам начально-граничным [18-20] и периодическим решениям [21, 22]. Дальнейшие разработки и другие направления теории систем интегро-дифференциальных уравнений можно найти в работах [23-39]. Нельзя не упомянуть фундаментальные отраслевые научно-монографические и учебно-методические издания [40-55], на которых опирались в ходе настоящего исследования. С теоретической и методической точки зрения основой исследования являются работы [56-75]. Отметим также работы [76-87], которые увеличивали научный интерес, стимулировали проведение диссертационного исследования. Здесь приведены исследования 1) связанные с интегро-дифференциальными уравнениями, 2) в которых изучены периодические или почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений с одной независимой переменной, 3) где рассмотрены краевые задачи для некоторых интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с двумя независимыми переменными.

В диссертационной работе представлены результаты, полученные исследованием многочастотных колебательных решений рассматриваемых систем способом, предложенным В.Х. Харасахалом [56, стр. 101-103], который в ходе своих исследований Д.У. Умбетжанов [56, стр. 31-32] фактически превратил в настоящий метод, далее развитый Ж.А. Сартабановым [62, стр. 52-54] и в диссертационном исследовании распространен на интегро-дифференциальные системы, учитывающие конечную эредитарность и диффузионность описываемых явлений.

Обратим внимание на то, что предложенные методы исследования являются перспективными и могут быть применены к аналогичным проблемам родственных процессов.

**Современное состояние темы.** Если рассматривать решения, выходящие из точки  системы (0.1) и (0.2) с оператором  вдоль характеристического уравнения , , то в соответствии с ними получили бы известные системы интегро-дифференциальных уравнений одной временной переменной  вида

, (0.01)



. (0.02)

Итак, из решений задач, поставленных для систем (0.1) и (0.2), получим решения соответствующих задач для систем (0.01) и (0.02). Обратно, из задач для этих систем к задачам предшествующих систем можно перейти по теореме Г. Бора о связи почти периодических функций одной переменной и периодических функций с неограниченным числом переменных. Такой исследовательский подход к задачам является основой метода В.Х. Харасахала.

Обращаем внимание на то, что рассматриваемые в диссертации задачи и исследование их вышеописанным методом ранее не рассматривались. Здесь следует отметить, что эти задачи являются неисследованными расширенными на случаи систем уравнений в частных производных аналогами начально-краевых задач для систем (0.01) и (0.02) рассматриваемых в пространстве квазипериодических функций по временной переменной. Следовательно, современное состояние исследуемых задач характеризуется состоянием указанных задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Сначала обратим внимание на вид интегрального члена систем, который можно рассматривать как оператор, действующий на искомую функцию и колебательность ее образа. Заметим, что задачи, связанные с колебательностью решений систем, как правило, рассматриваются для систем, которые содержат интегральные члены с промежутками интегрирования  либо  и  либо . Это естественно, так как при таких промежутках интегральные члены, как операторы переводят колебательные функции в колебательные. Такое свойство играет важную роль в теории колебаний, причем эти промежутки определяют периоды эредитарности явлений в зависимости их конечности или бесконечности. В публикациях редко встречаются случаи  конечных периодов [88] и сравнительно часто бесконечный случай периода [89-95], причем, в основном, исследуется только периодический случай задач. А квазипериодические и почти-периодические случаи остаются не раскрытыми в силу отсутствия условий почти-периодичности решений систем и появления малых знаменателей в связи с многочастотностью колебаний.

В диссертационном исследовании предпочтение дается задачам для систем с интегральным членом по отрезку , так как при  имеем промежуток , если получаемый при этом несобственный интеграл сходится. Очевидно, что этот последний случай сужает класс рассматриваемых задач.

Переход от обыкновенного оператора дифференцирования к часто используемому в КАМ-теории оператору , затем, из результатов, полученных для системы вида (0.1) в качестве следствия получение новизны для (0.01) является двояко выигрышным, следовательно, привлекательным исследованием. Это с одной стороны, развитие методов исследования волн с многопериодической структурой в сплошных средах, описываемых уравнениями в частных производных, с другой стороны – изучение многочастотных (квазипериодических) колебаний, получаемых путем пересечения интегральных волновых поверхностей с поверхностями характеристик оператора дифференцирования. Наиболее близкие по методу исследования приведены в работах В.Х. Харасахала, Д.У. Умбетжанова, Ж.А. Сартабанова, А.Б. Бержанова. Но в этих исследованиях не рассматривались проблемы начально-многопериодических решений для системы типа (0.1).

Вторая часть диссертационных исследований связана с диффузионностью задач. Его современное состояние также связано с уровнем исследования колебательных по временной переменной решений двухточечных краевых задач для системы вида (0.02). Из числа изданий, близких к ним по изучению качественных свойств, кроме колебательности решений краевых задач для уравнений и систем, можно отнести работы многих исследователей, а в качестве ближайших исследований только по методам можно еще работы В.Х. Харасахалa, Д.У. Умбетжановa, Ж.А. Сартабановa, А.Б. Бержановa. Также здесь можно повторить заключительную мысль, связанную с первой частью о методах и результатах исследований, использованных для уравнения (0.2).

**Целью настоящей работы является** исследование начальных задач для ограниченно эредитарных квазилинейных интегро-дифференциальных систем уравнений с оператором дифференцирования по направлению векторного поля, задач многопериодических решений, исследование краевых задач и развитие их для интегро-дифференциальных уравнений параболического типа.

**Задачи исследования:**

а) определение достаточных условий существования решений начальных задач для ограниченно эредитарных линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных систем уравнений с оператором дифференцирования по заданному постоянному векторному полю дифференцирования;

б) исследование существования и единственности многопериодических решений систем эредитарных линейных и квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю и их построение;

в) исследование решения двухточечной краевой задачи по одной из временных переменных для линейных и квазилинейных систем с эредитарным и оператором дифференцирования по векторному полю систем интегро-дифференциальных уравнений;

г) исследование многопериодических по временным переменным решений краевых задач для эредитарных линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю параболического типа.

**Объектом исследования являются** решения начальных, многопериодических по временным переменным и краевых задач для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с ограниченной эредитарностью и оператором дифференцирования по векторному полю.

**Предметом исследования являются** методы изучения условий существования, условий единственности, структуры решений рассматриваемых задач и способы построения искомых решений.

**Научная новизна:**

1) установлены условия многопериодичности нулей оператора дифференцирования ; определены условия однозначной разрешимости начальной задачи линейного однородного интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью, равной периоду; построен разрешающий оператор и найдено представление решения начальной задачи; указаны условия отсутствия многопериодических решений рассматриваемого уравнения, кроме нулевого; получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью; установлены условия существования матричной функции типа Грина;

2) в случае произвольного периода эредитарности установлены более общие условия многопериодичности нулей оператора дифференцирования; необходимые и достаточные условия периодичности однородного линейного интегро-дифференциального уравнения с произвольной конечной эредитарностью; выведено представление решения начальной задачи линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения с произвольной конечной эредитарностью; найдены условия существования матричной функции типа Грина задачи многопериодического решения этого уравнения и приведено его интегральное представление с оценкой;

3) указаны достаточные условия существования и единственности многопериодического решения квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с произвольной конечной эредитарностью, когда нелинейности систем а) не содержат и б) содержат интегральный эредитарный член с конечным периодом;

4) получены достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования в случае произвольной конечной эредитарности;

5) найдены достаточные условия однозначной разрешимости начальной и двухточечной краевой задачи для линейной системы интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с оператором дифференцирования с конечной эредитарностью; приведены условия многопериодичности по временным переменным этого решения системы;

6) установлены условия однозначной разрешимости задачи многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной вдоль полуоси решений для линейных систем конечно-эредитарных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа с оператором дифференцирования;

7) представлены достаточные условия однозначной разрешимости задачи о многопериодическом по временным переменным и ограниченном по пространственной переменной решении для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений конечно-эредитарного и конвективно-диффузионного типа.

**Положения, выносимые на защиту:**

- достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений заданной конечной эредитарности с оператором дифференцирования по направлению векторного поля на основе построения разрешающего оператора и достаточные условия многопериодических решений таких систем с интегральным представлением их в терминах матричной функции типа Грина;

- необходимые и достаточные условия существования и единственности многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений произвольной конечной эредитарности с оператором дифференцирования и их интегральные представления;

- распространение методов линейного случая на квазилинейные системы интегро-дифференциальных уравнений произвольной конечной эредитарности с оператором дифференцирования и достаточные условия существования многопериодических решений, рассматриваемых систем когда нелинейности систем а) не содержат и б) содержат эредитарный член;

- обобщение метода многопериодических решений и достаточные условия разрешимости двухточечных краевых задач для линейных и квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю;

- разработка метода исследования и установления достаточных условий однозначной разрешимости начальной и двухточечной краевой задачи для линейной системы параболического типа конечно-эредитарных интегро-дифференциальных уравнений;

- условие модификации одного метода однозначной разрешимости задачи о многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной вдоль полуоси решения для линейной системы конечно-эредитарных параболических интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю;

- представление условий однозначной разрешимости задачи о многопериодичности по временным переменным и ограниченности по пространственной переменной решения для линейных и квазилинейных систем конечно-эредитарных и конвективно-диффузионных интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю.

**Достоверность и обоснованность.** В диссертационной работе широко применяются методы и результаты теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, теории колебаний. Основным методом исследования и решения задач, рассматриваемых в диссертации, являются методы Харасахала-Умбетжанова и методы работ Ж.А. Сартабанова по их развитию и другие их модификации.

**Теоретическая и практическая значимость результатов.** Результаты диссертации носят, в основном, теоретический характер. Научная значимость работы заключается в разработке методов исследования линейных и нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по направлению векторного поля, в установлении достаточных условий разрешимости двухточечных краевых задач по пространственной переменной для линейных интегро-дифференциальных уравнений параболического типа в пространстве многопериодических по временным переменным функций, в получении условии существования и единственности многопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений с  оператором дифференцирования и -периодом эредитарности, а также для линейных интегро-дифференциальных уравнений конвективного параболического типа в нахождении достаточных условий разрешимости начально-краевых задач в пространстве многопериодических временных переменных. Разработанные методы исследования имеют широкую перспективу в теории уравнений с частными производными интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с различными эредитарностями.

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.**

Прежде всего диссертационная работа связана с фундаментальными исследованиями В. Вольтерра и исследованиями о периодических решениях систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений. Из них можно выделить те, которые можно получить из рассматриваемых систем раздела 1 в случае одномерности времени. Эти системы описывают прикладные процессы динамики, теории упругости, электромагнетизма, биохимические процессы, связанные с наследственностью конечного периода. Более широкие применения имеют вопросы о многочастотных периодических решениях таких систем, которые оставались неисследованными. Системы такого вида привлекательны тем, что правые части их задаются операторами, переводящими класс первично колебательных функций в себя. Следовательно, имеем широкую возможность развить методы колебательных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений на случаи интегро-дифференциальных уравнений рассматриваемого типа. Намерение исследования многочастотных периодических решений таких систем привело к рассмотрению систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по многомерному времени по направлению векторного поля. Реализация этого подхода привела к массе трудностей, которые успешно преодолены в ходе исследования. Главной причиной этого является неразработанность общей теории даже линейных систем интегро-дифференциальных уравнений конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю. Использованные методы данной работы имеют как основательные, так и частичные пересечения с исследованиями интегро-дифференциальных уравнений как Фредгольмовского, так и Вольтеровского типа [96-98], особенно по части общей теории и постановок задач.

При исследовании разрешимости задач оказали существенные влияния работы по вопросам периодических краевых задач [99-103], а также общего характера различных типов краевых задач [104, 105]. При исследовании колебательных решений рассматриваемых систем отталкивались исходя от общей теории периодических и многочастотно периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений [106-109]. Для разработки методов общей теории уравнений в частных производных со специальными операторами дифференцирования по векторным полям и систем интегро-дифференциальных уравнений параболического типа, рассмотренных в разделе 2 фундаментальное значение имели исследования [110-113]. В данной работе развиты и распространены методы исследований решений краевых задач и задач о многопериодических решениях для систем уравнений в частных производных первого порядка на системы интегро – дифференциальных уравнений конечной эредитарности с оператором дифференцирования по направлению векторного поля.

**Личный вклад автора** заключается в том, что все результаты, приведенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Участие научных консультантов заключается в постановке задач и обсуждении полученных результатов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- VIII Международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры». Актобе, 1 ноября, 2018;

- International conference «Mathematical analysis, Differential equation and applications». Bishkek: KTMU, 17-23 June, 2018;

- Международная научная конференция «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченная к 70-летию д.ф.-м.н., профессора М.И.Рамазанова. Караганда, 12-13 июня, 2019;

- Международнаяая конференция «Актуальные проблемы анализа, дифференциальных уравнений и алгебры» (EMJ-2019), посвященная 10-летию выпуска журнала «Eurasian Mathematical Journal».Нур-Султан, 16-19 октября, 2019;

- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. Алматы, 5-8 апреля, 2020;

- Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан, посвященная 75-летию академика НАН РК Т.Ш.Кальменова. Алматы, 5-8 апреля, 2021;

- Научный семинар «Исследование задач нелинейной оптимизации систем с распределенными параметрами», Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Керимбеков);

- Научный семинар «Качественная теория дифференциальных уравнений», Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан (руководители семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Саадабаев, д.ф.-м.н., профессор Б.К. Темиров);

- Научный семинар «Качественные и приближенные методы исследования дифференциальных уравнений», Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор А.Т.Асанова);

- Научный семинар кафедры математики, Актюбинского регионального университета имени К. Жубанова «Проблемы прикладной математики и информатики» (руководитель семинара – д.ф.-м.н., профессор Ж.А. Сартабанов).

**Публикации**. По теме диссертации опубликовано 15 работ, в том числе 1 публикация в рейтинговом научном журнале, индексируемом в базе Scopus [114], 4 публикации [115-118] в научных изданиях, входящих в перечень, рекомендованный Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК для публикации основных научных результатов научной деятельности, 10 публикаций в материалах международных конференций [119-128].

**Краткое содержание работы.** Диссертационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников. Первый раздел работы разбит на четыре подраздела. В соответствии с методикой исследования задач раздела 1 наряду с системой (0.1) рассматриваются ее частные случаи

, (0.3)

, (0.4)

, (0.5)

 (0.6)

и для них исследуются начальные задачи, задачи многопериодичности решений и краевые задачи. Отметим, что все входные данные этих систем многопериодические.

Решения уравнения (0.3) называются *нулями* оператора дифференцирования  по направлению вектора .

**В подразделе 1.1** устанавливаются условия многопериодичности нулей оператора  и их необходимые в дальнейшем свойства. Для системы (0.4) определяются условия, при которых существует ее матрицант, приводится его построение методом итераций, указываются необходимые свойства.

Предположим выполненными условия:

, , (0.7)



, , , (0.8)

, , (0.9)

. (0.10)

При условии многопериодичности и гладкости матрицы коэффициентов  при неизвестных и ядра  эредитарного члена система (0.5) линейным преобразованием приводится к интегро-дифференциальной системе



и пользуясь методом итераций строится ее резольвента , доказываются необходимые свойства, касающиеся гладкости и многопериодичности.

Затем с помощью резольвенты и использованной замены определяется разрешающий оператор системы (0.5), дается представление решения начальной задачи для рассматриваемой системы и доказывается теорема.

**Теорема 0.1.** *При условиях (0.7) и (0.8),* , , *у системы (0.5) существует разрешающий оператор , обладающий свойствами -периодичности по , диагональной -периодичности по  и удовлетворяющий оценке*

,

*а решение начальной задачи имеет представление вида* .

Доказывается теорема о необходимом и достаточном условии многопериодичности решения начальной задачи. Как следствие теоремы о многопериодичности решения начальной задачи получено условие отсутствия ненулевого многопериодического решения. Доказано, что при экспоненциальной дихотомичности разрешающего оператора система (0.5) не имеет многопериодических решений, кроме нулевого.

Для линейной неоднородной интегро-дифференциальной системы (0.6) ставится начальная задача, определяется структура общего решения данной системы, решается вопрос об установлении условий существования многопериодических решений рассматриваемой системы. Исследование проводится на основе метода последовательных приближений к начальной функции, определяемой условием многопериодичности решений этой системы при выполнении условий экспоненциальной устойчивости линейной однородной системы. Рассматривается случай, когда разрешающий оператор обладает свойствами экспоненциальной дихотомичности.

Пусть матрицант  расщепляется на сумму двух матриц  и , каждая из которых является решением уравнения (0.5) с начальными условиями  и , причем

, (0.11)

 (0.12)

и удовлетворяют оценкам

 (0.13)

В терминах матричной функции типа Грина доказывается теорема о существовании единственного многопериодического решения системы (0.6).

**Теорема 0.2.** *Пусть выполнены условия (0.7), (0.8),* , , *, (0.11)-(0.13) и (0.9). Тогда уравнение (0.6) имеет единственное -периодическое решение вида*

.

В заключение, заметим, что в вышерассмотренных системах в качестве периода эредитарности взят период  систем по переменной . Как видно, из приведенных исследований, что его величина не играет особой роли и за период эредитарности можно взять любое число .

Также заметим, что эредитарный интегральный член системы можно взять как с опережающими, так и запаздывающими переменными пределами интегрирования. Переход от одного вида к другому реализуется сдвигом времени под интегралом. Запаздывающий вид удобен для пояснения смысла эредитарности явления. Поэтому системы (0.5) и (0.6) являются частными случаями системы (0.1).

Таким образом, **в подразделе 1.2** рассматриваются задачи с учетом этих замечаний для системы вида

, (0.14)

. (0.15)

В этом подразделе доказывается обобщение теоремы о многопериодичности нулей оператора дифференцирования, приводятся построение и свойства разрешающего оператора однородного уравнения, применительно к виду (0.14), устанавливается разрешимость и представление решения начальной задачи для данной системы, а также -периодичности решений системы только по , доказывается теорема о необходимом и достаточном условиях -периодичности решений (0.14) по всем переменным .

Предположим выполненными условия:

, , (0.16)



, . (0.17)

В терминах матрицы монодромии, полученной разрешающим оператором, доказывается теорема о -периодичности решений по .

**Теорема 0.3.** *Пусть выполнены условия (0.16) и (0.17). Для того чтобы решение  было -периодическим решением системы (0.14), порожденным -периодическим нулем  оператора  необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция  была собственным вектором матрицы монодромии :* .

В работе устанавливается отсутствие многопериодических решений системы (0.14), кроме нулевого.

В подразделе 1.1.2 устанавливается существование единственного многопериодического решения системы (0.15) при условии экспоненциальной дихотомичности разрешающего оператора, интегральное представление матричной функций типа Грина и его оценка по норме. Без требований условий дихотомичности разрешающего оператора доказывается более общая теорема о существовании единственного многопериодического решения неоднородной системы (0.15).

**Теорема 0.4.** *Пусть выполнены условия (0.16), (0.17), (0.9) и линейная однородная система (0.14) не имеет -периодических решений, кроме тривиального. Тогда система неоднородных линейных интегро-дифференциальных уравнений (0.15) имеет единственное -периодическое решение вида*

.

Заключая исследования, посвященные задачам линейных систем, следует отметить, что в подразделе 1.1 построен разрешающий оператор, который занимает центральное место в изучении ряда задач. В подразделе 1.2 ведущее положение занимает исследование многопериодичности решений систем, касающееся необходимых и достаточных условий, а также их построения в случаях экспоненциальной устойчивости и экспоненциальной дихотомичности однородных систем в терминах методов Ляпунова и функции Грина.

В целом, в данном исследовании установлено сочетание непрерывного развития явлений с их дискретным развитием. Первое из этих развитий описывается дифференциальными уравнениями, а второе функционально-разностными уравнениями. Начальная функция определяется конечно-разностным уравнением с разностью  и она является -периодической по , а решение соответствующего дифференциального уравнения с этой начальной функцией является -периодическим по .

Здесь же получены интегральные представления многопериодических решений, которые позволяют развитие методов линейных систем для квазилинейных систем.

В соответствии с этим в **подразделе 1.3** идет реализация идеи о многопериодических задачах для квазилинейных систем (0.1) при условии экспоненциальной дихотомичности соответствующих линейных систем, в случаях: а) нелинейность  не содержит эредитарного члена , а является обычной вектор-функцией своих аргументов; б) зависит от этого члена  и нелинейность имеет вид . Очевидно, что эти два случаи можно было бы объединить и рассматривать  как операторную функцию, действующую на вектор-функцию .

В работе они исследуются раздельно в соответствии с публикациями и с отличиями налагаемых на них условий.

Таким образом, наряду с системой (0.1) рассматривается система

. (0.18)

Предположим выполненными условия

, , (0.19)

, , (0.20)

, , ,. (0.21)

При условии экспоненциальной дихотомичности вводится оператор  вида

 (0.22)

с матричной функцией типа Грина .

Далее, отмечается, что при достаточно общих условиях, в силу интегрального представления многопериодического решения линейного неоднородного уравнения (0.15), задача о многопериодических решениях системы (0.18) эквивалентна разрешимости операторного уравнения

 (0.23)

в пространстве  -периодических функций , ограниченных по норме числом .

Доказывается теорема об установлении достаточных условий однозначной разрешимости операторного уравнения (0.22), (0.23) в  методом сжатых отображений.

**Теорема 0.5.** *Пусть выполнены условия (0.7), (0.8), (0.19), (0.21),*  *и* *. Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (0.18) имеет единственное -периодическое решение  из , ограниченное по норме числом .*

Из данной теоремы следуют достаточные условия существования и единственности многопериодического решения системы (0.18).

Подробное распространение идеи теоремы 0.5 подраздела 1.3.1 на общий случай (0.1) системы (0.18) представлено в подразделе 1.3.2.

Ставится задача о нахождении достаточных условий существования единственного -периодического по  решения квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с -эредитарностью (0.1) при экспоненциальной дихотомичности системы. Доказывается следующая теорема.

**Теорема 0.6.** *При выполнении условий (0.16), (0.17), (0.20) и* , *начальная задача (0.1) с условием*  *однозначно разрешима в пространстве  -периодических по , непрерывно дифференцируемых по  -вектор-функций , ограниченных по норме  постоянной , где  при , -замыкание .*

Исследуется операторное уравнение (0.23) в пространстве  -периодических функций. Доказывается дифференцируемость решения операторного уравнения (0.23) с оператором

, (0.24)

устанавливаются условия существования единственного решения операторного уравнения (0.23), (0.24) в пространстве  -периодических по  функций, гладкость решения и его оценка по норме.

Приводится как следствие доказанных теорем о существовании квазипериодических решений интегро-дифференциальных систем, когда оператор дифференцирования  является обычным оператором -дифференцирования по . Это есть приложение проведенного исследования в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В **подразделе 1.4** рассматривается нелинейная конечно-эредитарная система интегро-дифференциальных уравнений (0.1) с граничным условием

. (0.25)

Ставится задача об установлении достаточных условий однозначной разрешимости краевой задачи (0.1), (0.25) в пространстве  непрерывно дифференцируемых по , -периодических по , ограниченных по норме числом  функций .

Доказывается теорема об установлении достаточных условий разрешимости однородной краевой задачи {(0.14), (0.25)}, как следствие определяется отсутствие ненулевых решений этой задачи, а также приводятся условия, при которых существует матричная функция типа Грина данной краевой задачи.

В этом подразделе устанавливаются условия, при выполнении которых неоднородная краевая задача {(0.15), (0.25)} однозначно разрешима.

Относительно входных данных системы (0.1) будем считать выполненной совокупность условий

, (0.26)

, (0.27)

, (0.28)

где -вектор, -вектор.

По граничным условиям допустим выполненной группу требований:

, (0.29)

, (0.30)

 (0.31)

вместе с условиями

, (0.32)

. (0.33)

Условия (0.26), (0.27) и (0.28) назовем условиями А), а условия (0.29), (0.30), (0.31), (0.32) и (0.33) –условиями Б).

**Теорема 0.7.** *При выполнении А) и Б) условий краевая задача {(0.1), (0.25)} эквивалентна интегральному уравнению*

**

. (0.34)

Доказывается теорема устанавливающая достаточные условия однозначной разрешимости (0.34), а следовательно, задачи {(0.1), (0.25)}.

Следующий **раздел 2** посвящен исследованию задач с начально-краевыми условиями по пространственной переменной  и условиями многопериодичности решений по временным переменным  для параболических конечно-эредитарных систем интегро-дифференциальных уравнений (0.2) с оператором дифференцирования по направлению векторного поля. Он состоит из трех подразделов. Каждый подраздел начинается с введения и постановки задачи. Согласно индуктивному методу исследования работы начинаются от частных случаев к общему. В связи с этим приводим некоторые частные виды системы (0.2):

****, (0.35)

****, (0.36)

****

, (0.37)

****

, (0.38)

****

 (0.39)

с начальным условием

, (0.40)

граничными условиями

, , (0.41)

при 

. (0.42)

Заметим, что к граничному условию (0.41) линейной заменой приводятся более общие краевые условия:

, . (0.43)

Исследование подраздела 2.1 начинается с рассмотрения начально-краевой задачи для уравнения (0.35) с начальным условием (0.40) и граничным условием (0.41) при .

Применив метод разделения переменных в разрезе временных переменных  и пространственной переменной  леммой определяется единственное решение начально-краевой задачи {(0.35), (0.40), (0.41)}, многопериодическое по  и ограниченное по , а также представление этого решения на основе матричной функции типа Грина  мгновенного точечного источника и начальной функции .

Далее, рассматривается задача {(0.36), (0.40), (0.41)} при  c однородными начально-краевыми условиями

, , 

и ее решение представляется функцией  и свободным членом , где

,

, (0.44)

. (0.45)

Затем, суммируя эти решения, получено решение общей задачи {(0.36), (0.40), (0.41)}. Доказывается теорема устанавливающая достаточные условия существования единственного -периодического решения задачи {(0.36), (0.40), (0.41)}. Развивая исследование теоремы на систему (0.37) определяются леммой достаточные условия отсутствия многопериодического по  решения краевой задачи {(0.37), (0.41)}, кроме нулевого и на его основе в теореме устанавливаются достаточные условия существования единственного -периодического по  решения неоднородной краевой задачи {(0.38), (0.41)} и приводится его интегральное представление на основе функции  мгновенного точечного источника.

В диссертационной работе в виде лемм приводятся обобщение результатов теорем и лемм на случаи задач с неоднородными граничными условиями.

В этом подразделе доказывается теорема о структуре общего решения неоднородной интегро-дифференциальной системы, которое состоит из суммы решения с начально-краевыми условиями для однородного уравнения и многопериодического решения неоднородной интегро-дифференциальной системы параболического типа с конечной эредитарностью. Заменой  задачу {(0.38), (0.43)} можно привести к краевой задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа с оператором дифференцирования по многомерному времени



 (0.46)

с граничным условием

. (0.47)

Ставится задача об установлении достаточных условий однозначной разрешимости и существования единственного многопериодического решения задачи {(0.46), (0.47)}. Решение рассматриваемой задачи имеет вид

, (0.48)

где

, , . (0.49)

, , (0.50)

Доказывается следующая теорема

**Теорема 0.8.** *При условиях (0.44), (0.45) задача {(0.46), (0.47), (0.50)} однозначно разрешима, причем ее решение представимо соотношением (0.48), а при дополнительном условии (0.49), задача имеет единственное -периодическое по  решение*

.

**Подраздел 2.2** посвящен исследованию задач такого же характера по временным переменным, но по пространственной переменной распространенными на полуоси .

Здесь для удобства каждая из временных переменных  считается изменяющейся в бесконечной полосе действительной оси комплексной плоскости: , ,  – ширина полосы, .

В связи с этим все входные данные рассматриваемых систем и начально-граничных условий предполагаются аналитическими по  и -периодическими.

Таким образом, для рассмотрения вводится пространство  -периодических аналитических по  функций , определенных при .

В работе утверждаются ряд достаточных условий однозначной разрешимости задачи {(0.35), (0.42)} с оценкой по норме.

В случае одномерного времени такая задача была изучена еще Фурье с целью определения температурных колебаний почвы.

Оценка решения получена на основе свойств коэффициентов Фурье аналитической функции. Определяются -периодические решения уравнения (0.36), полученного возмущением уравнения (0.35) многопериодическим источником при различных ситуациях и результаты теорем касаются систем диффузионного характера без эредитарности.

Устанавливаются достаточные условия отсутствия многопериодических решений, кроме нулевого для однородной параболической системы с эредитарностью.

Рассматривается уравнение



, (0.51)

где  – бегущие волны определяемые уравнением  с неизвестными параметрами  и постоянными  с условием, когда следует

. (0.52)

Ставится вопрос об исследовании многопериодического решения полного линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения параболического типа (0.51).

Приводятся условия существования единственного многопериодического решения соответствующей неоднородной системы с многопериодическими граничными режимами и источниками. Доказывается следующая теорема.

**Теорема 0.9.** *Пусть функции  и  принадлежат классу . Тогда при условиях (0.52),*  *и*  *уравнение (0.51) имеет единственное ограниченное по  -периодическое по  решение вида*  *с сомножителями*  *и* *.*

В **подразделе 2.3** рассматриваются задачи для конечно-эредитарной интегро-дифференциальной квазилинейной системы конвективно-диффузионного типа, обладающие свойствами конвективности, то есть описывающие явления диффузии при турбулентных движениях на полуоси .

Ставится задача: исследовать распространение многопериодических конвективно-диффузионных волн с экспоненциально убывающей амплитудой вдоль положительной полуоси и замкнутой линии. Здесь доказывается теорема устанавливающая достаточные условия, при которых неоднородная система (0.39) имеет единственное -периодическое по  монотонно убывающее по  решение с оценкой по норме.

Доказываются теоремы относительно случая, когда внешняя сила  наряду с  обладает свойством -периодичностью по , то есть она является сужением на  функции  периода  по  и определяются условия -периодичности решения системы (0.39), а также обобщается на квазилинейный случай, когда внешняя сила  многопериодична по всем независимым переменным . А именно, доказывается теорема, в которой приводятся условия, устанавливающие существование единственного решения нелинейной системы (0.2) периода  по .

Из исследованных задач и полученных результатов следует, что диссертационная работа посвящена одной из приоритетных задач теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

**1 НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ И МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КОНЕЧНО-ЭРЕДИТАРНЫХ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕКТОРНОМУ ПОЛЮ**

**1.1 Исследование начальных и многопериодических задач для линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по направлению векторного поля**

1.1.1 Линейные однородные -уравнения и системы интегро-дифференциальных уравнений

А. Многопериодические нули оператора дифференцирования.

В этом подразделе выясняется влияние направления векторного поля на вопрос существования многопериодических нулей оператора дифференцирования.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

, (1.1.1)

где  – искомая вектор-функция переменных ;  – оператор дифференцирования,  – постоянный -вектор,  – скалярное произведение векторов  и .

Векторное поле временных переменных  определяется уравнением

. (1.1.2)

Уравнение (1.1.2) имеет решение вида

. (1.1.3)

Здесь , . Решая (1.1.3) относительно переменной  получим первый интеграл .

Интегральные кривые  уравнения (1.1.2) называются *характеристиками* уравнения (1.1.1) или *характеристической функцией* для оператора .

Нулем оператора  назовем гладкую функцию  удовлетворяющую уравнению

. (1.1.4)

Через  обозначим пространство функций, - периодических по  и гладких по  порядка , где  – -вектор.

Нули  оператора , принадлежащие пространству , определяются произвольной гладкой порядка  и -периодической по  функцией  в виде

, (1.1.5)

где  – характеристика оператора .

Так как характеристика  обладает свойствами вида

, (1.1.6)

, (1.1.7)

то вопрос о многопериодичности нулей (1.1.5) зависит от рациональной зависимости вектор-периода  и вектора , где ;  – постоянный -вектор. Предполагается, что периоды  рационально несоизмеримы, то есть отношения  при  не являются рациональными.

Поставим задачу о существовании -периодических по  нулей  оператора .

Так как начальная функция , то она обладает -периодичностью по , то есть  и  для нее идентичные точки:

. (1.1.8)

Тогда из соотношений (1.1.6)-(1.1.8) следует, что, если

, , , (1.1.9)

то нулями оператора  являются только произвольные постоянные функции

, (1.1.10)

то есть  не зависит от . Это следует из того, что функция не может иметь двух несоизмеримых периодов по одной и той же переменной.

Условие (1.1.9) является условием несоизмеримости векторов  и .

В случае выполнения условия соизмеримости векторов  и  вида

, , ,  (1.1.11)

при некоторых фиксированных значениях  величины , наряду с постоянными нулями (1.1.10) оператор  имеет и непостоянные нули , обладающие свойством -периодичности по части переменных :

, (1.1.12)

где , .

**Теорема 1.1.1.** *При условии (1.1.9) уравнение (1.1.4) имеет только постоянные -периодические решения (1.1.10), а при условии (1.1.11) оно наряду с постоянными имеет и переменные -периодические решения вида (1.1.12) с произвольными гладкими функциями .*

Например, если , то при  оператор  имеет только постоянные нули, а при  он имеет -периодические по  решения. Действительно, если  – функция периода , то  представляет -периодический нуль оператора . В частности, если , то  является -периодическим нулем.

Б. Матрицант -уравнения с многопериодической матрицей.

Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

, (1.1.13)

где  – -матрица.

Предположим выполненными условия -периодичности, непрерывности по  и непрерывной дифференцируемости по :

, . (1.1.14)

Здесь  – -вектор, показатель степени гладкости по ;  – множество целочисленных векторов ,  – кратный период с кратностью  периода , периоды  – рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Рассмотрим матричное уравнение

. (1.1.15)

Учитывая, что , по общеизвестной методике [57, стр. 36] построения матрицанта уравнения (1.1.13) определим  исходя из интегрального матричного уравнения

 (1.1.16)

с единичной -матрицей .

Заметим, что в силу условий (1.1.14), матрица  является диагонально -периодической по  и -периодической по :

, .

При условии (1.1.14) для уравнения (1.1.15) задача Коши однозначно разрешима с начальным условием  и определяется соотношением ,

где , .

Следовательно, уравнение (1.1.15) имеет решение  с нормированным начальным условием:

.

Решение интегрального уравнения (1.1.16) ищем в виде ряда

, (1.1.17)

члены, которого находим из рекуррентных соотношений:

,

, … ,

, 

Покажем, что ряд (1.1.17) сходится абсолютно и равномерно.

Учитывая ограниченность матрицы  имеем

,

, … ,

, … ,

где , ,  – одна из матричных норм,  в области : , , , , , , .

Для ряда (1.1.17) мажорантным является ряд . Тем самым, матричный ряд (1.1.17) сходится абсолютно и равномерно при , .

Тогда , следовательно, при  имеем

. (1.1.18)

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицант  обладает свойством многопериодичности по  и :

, . (1.1.19)

Можно показать, что мматрицант  удовлетворяет уравнению (1.1.15)

 (1.1.20)

и начальному условию .

В заключение отметим, что рассматриваемое уравнение изучено по принципу от простого к сложному. В связи с этим подробно проведено построение матрицанта -уравнения.

В. Многопериодическое линейное однородное интегро-дифференциальное уравнение с конечной эредитарностью.

В данном подразделе с помощью матрицанта, интегро-дифференциальное уравнение линейной заменой приводится к более простому интегральному уравнению, резольвента которого определяется итерированием его ядра. Доказываются утверждения, связанные с оценками резольвенты и ядра, касающиеся сходимости итерации по построению резольвенты. Обосновываются свойства резольвенты относительно гладкости и -многопериодичности по переменной  и диагональной -периодичности по . Доказывается теорема многопериодичности по  решений линейного однородного интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью. Устанавливается условие отсутствия -периодических решений этого уравнения, кроме нулевого.

Рассмотрим линейное однородное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных

, (1.1.21)

где  и  – -матрицы, причем матрица  удовлетворяет условию (1.1.14).

Будем считать выполненными условия -периодичности, непрерывности по  и непрерывной дифференцируемости по  для матрицы :



, , . (1.1.22)

Здесь  и  – векторы с единичными компонентами, соответствующих размерностей показателей степени гладкости по  и .

Теперь, используя замену

, (1.1.23)

из уравнения (1.1.21) имеем



.

Отсюда в силу (1.1.23) получим выражение

.

Тогда оно приводится к виду



. (1.1.24)

Далее уравнение (1.1.24) умножая слева на , получим



.

Таким образом, однородное интегро-дифференциальное уравнение (1.1.21) приведено к виду

 (1.1.25)

с ядром , где . Очевидно, что .

Так как , то матрица  также обладает указанными для матрицанта  свойствами гладкости, многопериодичности и ограниченности.

В силу свойств матриц ,  и свойства (1.1.22) ядра  получим



, ,

,

где ,  – одна из известных матричных норм.

Легко убедиться, что матричное решение  уравнения (1.1.25) с начальным условием  удовлетворяет матричному интегральному уравнению

.

Заметим, что здесь учтено соотношение

.

В связи с этим рассмотрим уравнение

, (1.1.26)

где , .

*Резольвентой* интегрального уравнения (1.1.26) назовем матрицу

, (1.1.27)

где ,



,

… …. … … …. … … …. …



,



, .

Чтобы доказать существование резольвенты (1.1.27), решение интегрального уравнения (1.1.26) ищем в виде:

 (1.1.28)

с начальным приближением .  находим из соотношения

,(1.1.29)

Из последнего соотношение при  имеем



,

где ,







Тем самым ,

где 

.

Далее продолжая этот процесс, получим

, , (1.1.30)

где итерированные ядра определяются из рекуррентных соотношений





. (1.1.31)

Или 

,



.

**Лемма 1.1.1.** *При условиях (1.1.14) и (1.1.22) для итерированных ядер справедливы оценки*

,  (1.1.32)

*при , , , , ,* , .

Доказательство. На основе (1.1.31) имеем:

, ,







,

… …. … … … … … … …









.

Что и требовалось доказать.

**Лемма 1.1.2.** *При условиях леммы 1.1.1 для  справедливы оценки*

 (1.1.33)

Доказательство. С учетом (1.1.32) из (1.1.30) получим

,

,

,

… … … … … … … … …



Что и требовалось доказать.

Из (1.1.33) следует, что ряд (1.1.28) сходится абсолютно и равномерно относительно ,  для  – произвольно выбранная константа. Отметим, что итерированные ядра  обладают свойством:

.

На основании условий (1.1.14), (1.1.22) можно показать, что матрицант  диагонально -периодичен по  и -периодичен по :

, .

В силу ряда (1.1.28) воспользовавшись (1.1.30), имеем:



. (1.1.34)

Ряд  сходится абсолютно и равномерно к

непрерывной функции , являющейся *резольвентой*

ядра. В силу произвольности  резольвента  существует при всех .

Разрещающее ядро резольвента  удовлетворяет интегральному уравнению



. (1.1.35)

Заметим, что при  резольвента обращается в ядро

.

Решение уравнения (1.1.35) находим методом последовательных приближений и ищем в виде ряда

.

Далее на основе оценок (1.1.32) получим





, .

Следовательно,

, (1.1.36)

где ;  меняются между  и ,  с произвольной константой , , .

Тогда матрицу  представим через резольвенту (1.1.27) на основе (1.1.34) и имеем

. (1.1.37)

Непосредственно можно показать, что  обладает непрерывными частными производными по  и .

Резольвента дифференцируема, причем удовлетворяет уравнению



. (1.1.38)

Отметим следующие свойства резольвенты :

1) Из эквивалентности решения  начальной задачи для уравнения (1.1.25) с условием  и решения интегрального уравнения (1.1.26) следует дифференцируемость  по всем переменным .

Покажем, что  удовлетворяет уравнению (1.1.38). Действительно, применяя оператор  к обеим частям уравнения (1.1.35) находим:















.

Отсюда имеем



.

Таким образом, резольвента  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1.1.38). Заметим, что походу использованы некоторые свойства оператора . Что и требовалось доказать.

2) Резольвента  является многопериодической функцией по  с периодом  и диагонально -периодической по , т.е.  обладает свойствами периодичности:



, .

Действительно,











.

Заметим, что в ходе доказательства использовалась многопериодичность ядра . Что и требовалось показать.

**Лемма 1.1.3.** *При условиях леммы 1.1.1 для функции  имеет место оценка*

. (1.1.39)

Доказательство. Используя (1.1.36), (1.1.37) получим



.

Что и требовалось доказать.

Далее, на основе замены (1.1.23) имеем матрицу

. (1.1.40)

Используя (1.1.18) и (1.1.39) оценим (1.1.40)



. (1.1.41)

Очевидно, что

.

В силу (1.1.20), (1.1.38) имеем



.

Следовательно, с учетом (1.1.40) имеем

. (1.1.42)

Это означает, что матрица (1.1.40) удовлетворяет однородному уравнению (1.1.21). Матрица (1.1.40) называется *разрешающим оператором* интегро-дифференциального уравнения (1.1.21).

Решение  интегро-дифференциального уравнения

 (1.1.43)

с начальным условием



при выполнении вышеприведенных предположений представляется так

. (1.1.44)

Далее, предположим также выполненным условие несоизмеримости векторов  и  вида (1.1.9). Так как вектор-функция  является нулем оператора , то при условии (1.1.9) она является постоянной: . Следовательно, -периодические решения  уравнения (1.1.43) содержатся среди решений представимых в виде

. (1.1.45)

Таким образом, подытоживая можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 1.1.2.** *При условиях (1.1.9), (1.1.14) и (1.1.22) у системы (1.1.43) существует разрешающий оператор , обладающий свойствами -периодичности по , диагональной -периодичности по  и удовлетворяющий оценке (1.1.41), а решение начальной задачи имеет представление вида (1.1.45).*

Отметим, что свойство периодичности следует из соответствующих свойств матрицанта и резольвенты.

**Теорема 1.1.3.** *Пусть выполнены условия (1.1.9), (1.1.14) и (1.1.22). Тогда для того, чтобы решение (1.1.45) было -периодическим, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие*

, . (1.1.46)

Действительно, из свойств многопериодического вида матрицанта  и резольвенты , (1.1.8) и (1.1.37) ясно, что оператор  является -периодическим по .

Если решение (1.1.45) является -периодическим по , то имеем

.

Отсюда при  с учетом  получим

, .

Таким образом, необходимость условия (1.1.46) доказана.

Достаточность этого условия следует из того, что наряду с решением (1.1.45) вектор-функция

, (1.1.47)

полученная сдвигом  на , также является решением уравнения (1.1.43). Причем при  в силу условия (1.1.45) эти решения (1.1.46) и (1.1.47) имеют одинаковые начальные условия. Следовательно, в силу свойства единственности решений уравнения (1.1.43), они совпадают всюду при :  фиксированном значении . Так как , то достаточность доказана. Теорема доказана.

Из курса линейной алгебры известно, что условие (1.1.46) и условие

,  (1.1.48)

эквивалентны относительно существования ненулевых решений системы (1.1.43). Тем самым, невыполнение условия (1.1.48) в любой точке :

, , (1.1.49)

гарантирует отсутствие ненулевых -периодических решений уравнения (1.1.43).

**Следствие 1.1.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.3. Тогда для того чтобы уравнение (1.1.21) не имело -периодических решений, отличных от нулевого, необходимо и достаточно выполнение условия (1.1.49).*

Предположим, что выполняется условие

,  (1.1.50)

с постоянными  и .

Нетрудно проверить, что матрица (1.1.50) удовлетворяет уравнению (1.1.43) и . Очевидно, что

 (1.1.51)

при ,  в силу оценки (1.1.50), с учетом (1.1.51) имеем неравенство

, . (1.1.52)

Из соотношения (1.1.52) следует выполнение условия (1.1.49) об отсутствии -периодических решений уравнения (1.1.43), кроме нулевого.

Таким образом, доказано следующее следствие.

**Следствие 1.1.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.3. Тогда выполнение условия (1.1.50) достаточно, чтобы у уравнения (1.1.43) отсутствовало -периодическое решение, отличное от нулевого.*

Следствие 1.1.2 остается в силе, если условие (1.1.52) заменяется условием

, . (1.1.53)

Пусть матрицант  расщепляется на сумму двух матриц  и , каждая из которых является решением уравнения (1.1.43) с начальными условиями  и , причем

, (1.1.54)

 (1.1.55)

и удовлетворяет оценкам

 (1.1.56)

Заметим, что при выполнении одного из (1.1.50), (1.1.53) и (1.1.54)-(1.1.56) решения (1.1.45) уравнения (1.1.43) с ненулевым начальным данным окажутся неограниченными. Следовательно, уравнение (1.1.43) кроме нулевого, ограниченного решения вида (1.1.45) не имеет. (1.1.54)-(1.1.56) являются более общим, чем условия (1.1.50) и (1.1.53). Таким образом, имеем следующее более общее следствие, чем следствие 1.1.2.

**Следствие 1.1.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.3. Тогда при условиях (1.1.54)-(1.1.56) уравнение (1.1.43) не имеет -периодических решений, кроме нулевого.*

1.1.2 Многопериодичность решения начальной задачи для неоднородной системы интегро-дифференциальных уравнений с конечной эредитарностью

В данном подразделе доказываются две теоремы: А) в случае экспоненциального убывания резольвенты по норме на основе определения начальной функции, обеспечивающей многопериодичность решения, причем она строится с использованием условия многопериодичности решения интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью; Б) пользуясь матричной функцией типа Грина в случае экспоненциальной дихотомии резольвенты.

А) Случай экспоненциального убывания резольвенты по норме.

Пусть  – пространство -вектор-функций , заданных в  гладкости  по , обладающих свойством -периодичности по : ,  с нормой , где  – метрика вектора , , , , .

Положим  – пространство начальных -вектор-функций , заданных в  гладкости  по , обладающих свойством -периодичности: ,  с нормой

,  – метрика вектора .

Рассмотрим задачу о нахождении решения  однородного уравнения (1.1.21), удовлетворяющего начальному условию

. (1.1.57)

Очевидно, что -периодические решения  уравнения (1.1.21) при  удовлетворяют условию (1.1.57), так как из  следует .

Основная задача диссертационного исследования заключается в изучении вопросов, связанных с существованием -периодических решений рассматриваемых интегро-дифференциальных уравнений. Перейдем к рассмотрению задачи Коши вида {(1.1.21), (1.1.57)}.

Легко убедиться, что задача {(1.1.21), (1.1.57)} имеет решение , причем представляется в виде

. (1.1.58)

Действительно, применив оператор  к соотношению (1.1.58) в силу (1.1.42), (1.1.25) с учетом  имеем



. (1.1.59)

Из (1.1.59) с учетом, что  в силу (1.1.58) получим





.

Что и требовалось доказать.

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение

, (1.1.60)

где  – характеристика оператора ,  и  – заданные -матрицы,  – известная -вектор-функция.

Относительно матриц  и  вышеприведенные предположения (1.1.14) и (1.1.22) остаются в силе.

Пусть  удовлетворяет условию многопериодичности и гладкости:

, . (1.1.61)

Поставим задачу об отыскании решения  уравнения (1.1.60), удовлетворяющего начальному условию

, (1.1.62)

обеспечивающему его многопериодичность.

Решение  начальной задачи {(1.1.60), (1.1.62)} ищем в виде

 (1.1.63)

с неопределенной пока гладкой функцией .

Подставив (1.1.63) в (1.1.60) имеем



. (1.1.64)

В силу (1.1.42) из (1.1.64) получим .

Отсюда имеем уравнение

. (1.1.65)

Интегрируя уравнение (1.1.65) получим

 (1.1.66)

с произвольной гладкой вектор-функций .

Подставив (1.1.66) в (1.1.63) имеем общее решение



 (1.1.67)

уравнения (1.1.60) с произвольной гладкой вектор-функцией . При  из (1.1.67) с учетом начального условия (1.1.62) получим .

Тогда решение задачи {(1.1.60), (1.1.62)} имеет вид



. (1.1.68)

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**Теорема 1.1.4.** *При условиях (1.1.14) и (1.1.22) общее решение по Коши уравнения (1.1.60) с начальным условием (1.1.62) имеет структуру (1.1.68).*

В (1.1.68) предполагая, что вектор-функция  любая из , используя необходимое и достаточное условие многопериодичности Умбетжанова-Сартабанова

 (1.1.69)

ищем среди решений (1.1.68) многопериодическое решение системы (1.1.60).

Воспользовавшись необходимым и достаточным условием периодичности (1.1.69) для решения (1.1.68) имеем



. (1.1.70)

Вводя обозначение

,

совершая сдвиг на период , а также учитывая -периодичность матрицанта  и вектор-функции  находим

.

Полагая , решая уравнение (1.1.70) методом последовательных приближений имеем:



 (1.1.71)

Походу используя формулу типа свертки и используя -периодичность вектор-функции  при  из (1.1.71) получим















.

При  имеем







.

Далее воспользовавшись методом полной математической индукции, полагая при  имеем

.

Таким образом, установили



для всех  Тем самым имеем функцию



, (1.1.72)

которая удовлетворяет требованиям начального условия (1.1.62).

Подставляя (1.1.72) в (1.1.68), используя групповое свойство, получим представление самого решения









, (1.1.73)

которое является -периодическим по .

Отметим некоторые свойства функции :

1) Функция  удовлетворяет уравнению (1.1.60) и при  обращается в ;

2) Функция является -периодической функцией:

, ;

3) 

, (1.1.74)

где , , ;

4) Решение  единственное в классе -периодических функций.

Таким образом, в случае экспоненциального убывания разрешающего оператора по норме имеем нижеследующую теорему.

**Теорема 1.1.5.** *Если выполнены условия (1.1.14), (1.1.22), (1.1.50) и (1.1.61), то существует единственное многопериодическое решение  с начальной функцией  вида (1.1.72), которое является решением начальной задачи {(1.1.60), (1.1.62)}, определяемое в виде (1.1.73), обладающее свойствами 1)-4), включая оценку (1.1.74).*

Также заметим, что замена условия (1.1.50) на (1.1.53) приводит к аналогичной теореме 1.1.5, но в приведенных выше представлениях  приходится заменить на .

Б) Случай экспоненциальной дихотомии резольвенты.

Далее, поставим задачу о существовании единственного -периодического решения уравнения (1.1.60) при условиях (1.1.14), (1.1.22), (1.1.54)-(1.1.56) и (1.1.61) и о построении этого решения.

Построим *матричную функцию типа Грина*

 (1.1.75)

которая обладает свойствами:

. 

,; (1.1.76)

. ; (1.1.77)

. , ; (1.1.78)

. , , . (1.1.79)

Действительно, условие  следует из того что,  являются матричными решениями однородного уравнения (1.1.43):

.

Свойство  следует из равенства (1.1.55).

Так как начальные данные  и  не зависят от , то матричные решения  и  обладают свойствами многопериодичности вида

, , (1.1.80)

, . (1.1.81)

Из этих свойств (1.1.80) и (1.1.81) следует свойство .

Свойство  следует из свойства (1.1.56). Таким образом, свойства (1.1.76)-(1.1.79) доказаны. Матричная функция , определенная соотношением (1.1.75) со свойствами (1.1.76)-(1.1.79), называется *матричной функцией типа Грина* многопериодической задачи для однородной системы (1.1.43), соответствующей системе (1.1.60).

**Теорема 1.1.6.** *Пусть выполнены условия (1.1.9), (1.1.14), (1.1.22), (1.1.54)-(1.1.56) и (1.1.61). Тогда уравнение (1.1.60) имеет единственное -периодическое решение вида*

. (1.1.82)

Действительно, чтобы убедиться, что соотношение (1.1.82) является решением уравнения (1.1.60) используя (1.1.75) представим его в виде



.

Несобственные интегралы сходятся равномерно в силу оценки (1.1.79).

Далее, применив оператор  на основе (1.1.76) и (1.1.77) убеждаемся, что (1.1.82) удовлетворяет уравнению (1.1.60). Остается проверить, что это решение -периодично. Очевидно, что -периодичность его по  следует из многопериодического свойства характеристики  и -периодического свойства (1.1.61) вектор-функции . Для того чтобы проверить -периодичность по  необходимо после сдвига  на  произвести замену  и опять же воспользоваться свойствами многопериодичности

функций  и . Что и требовалось доказать.

**1.2 Представление многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с  оператором дифференцирования и -периодом эредитарности**

Исследуется задача о существовании -периодических решений  по  системы

 (1.2.1)

с оператором дифференцирования , который обращается в оператор полной производной  вдоль характеристик  с начальным данным , где ; постоянный вектор, с отличным от нуля координатами ; вектор; скалярное произведение векторов; , ,  – имеют прежний смысл;  – вектор-период с рационально несоизмеримыми координатами;  – положительная постоянная.

С задачей такого вида связаны задачи исследования эредитарных колебаний 1) в механике и электромагнетизме уравнение движения струны при известном моменте  задается изменением угла кручения струны , подчиненным соотношению

, (1.2.2)

где  и  – const, период эредитарности колебательного явления;

2) биологических явлений "хищник-жертва"  связанные законом колебаний, описываемым системой уравнений

 (1.2.3)

где  и постоянные,  и функции, обращающиеся в нуль при

, период эредитарности рассматриваемого биологического явления.

Интегро-дифференциальные уравнения (1.2.2) и (1.2.3) являются частными случаями математической модели эредитарных явлений, описываемых системой уравнений

 (1.2.4)

относительно искомой -вектор-функции  с заданными -матрицами  и  и -вектор-функцией , где  – постоянная. Так как процесс является колебательным, то, как правило, матрица  и вектор-функция , в общем случае, являются почти периодическими по , а ядро  обладает свойством диагональной периодичности по .

В частности, указанные входные данные системы (1.2.4) являются квазипериодическими по  с частотным базисом  . Отметим, что в теории флуктуаций важное значение имеет вопрос о существовании квазипериодических решений  системы (1.2.4) с измененным частотным базисом , причем положим .

В решении этого вопроса важную роль играет известная теорема Г.Бора о глубокой связи между квазипериодическими функциями и периодическими функциями от многих переменных (многопериодическими функциями). Согласно этой теореме определяются матрично-векторные функции , , , , обладающие свойствами , , , а оператор  заменяется оператором дифференцирования .

Вышеприведенные примеры задач о колебаниях струны и о флуктуациях количеств совместно живущих особей двух видов, связанные с поставленной задачей указывают на актуальность последней с точки зрения её применимости в жизни. Наряду с этим особо следует обратить внимание на то, что методы исследования многопериодических решений интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в частных производных относятся к малоизученному разделу математики. Поэтому разработка методов теории многопериодических решений интегро-дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой особый научный интерес.

Целью работы является получение условий существования многопериодических решений линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с заданным оператором дифференцирования . Для достижения этой цели решаются с начала начальные задачи для рассматриваемых систем уравнений, а затем устанавливаются необходимые и достаточные условия существования многопериодических решений линейных систем уравнений.

Теоретический базис данного исследования основан на работах ряда авторов. Как отмечено выше учет эредитарного характера различных процессов физики, механики, биологии приводит к рассмотрению интегро-дифференциальных уравнений, особенно, к исследованию задач для них, относящихся к теории периодических флуктуаций. Если эредитарность явления ограничена конечным периодом  времени , то эффект эредитарности задается интегральным оператором с переменными пределами от  до .

Интегро-дифференциальные уравнения, описывающие явления с такими эффектами эредитарности рассмотрены в [5, стр. 188-193], [101, стр. 96]. Различные процессы наследственной механики сплошной среды описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных, изучения которых начаты с работ [1, стр. 296-297].

Исследование многочастотных колебаний привело к понятию многомерного времени. В связи с этим развивается теория периодических по многомерному времени решений уравнений в частных производных как по временным, так и по пространственным независимым переменным. Известно, что системы канонических уравнений Гамильтона, при достаточно общих условиях, можно решить методом Якоби, суть которого заключается в переходе от её интегрирования к интегрированию дифференциального уравнения в частных производных. Аналогичный подход реализуется в работе [58, стр. 37], где квазипериодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений исследуются с переходом к изучению многопериодических решений уравнений в частных производных. Этот метод был развит с распространением его на решение ряда задач о колебаниях в системах интегро-дифференциальных уравнений.

В данном исследовании впервые рассматривается задача о существовании многопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений, со специальным оператором  дифференцирования, описывающих процессы наследственного характера с конечным периодом -эредитарности по времени . При решении этой задачи сталкивались с проблемами, связанными с многомерностью времени; неразработанностью общей теории таких систем; определением структур и интегральных представлений решений линейных интегро-дифференциальных систем уравнений; распространением результатов линейного случая на нелинейный случай; гладкостью решений интегральных уравнений, эквивалентных рассматриваемым задачам и др. Эти преграды по решению задач преодолены благодаря распространению и развитию методов работ Ж.А.Сартабанова и его последователей.

В заключении отметим, во-первых, конечная эредитарность явлений в их математических моделях характеризуется интегралом как от  до , так и от  до . Переход от одного интегро-дифференциального уравнения в другое реализуется линейной заменой под интегралом. Во-вторых, в подразделе 1.1 в качестве периода -эредитарности взяли период  колебаний явления по  и убедились, такое предположение не играет особой роли. Также заметим, что описание явления, связанное с промежутком , является более удобным при объяснении наследственности явления. В дальнейшем эти обстоятельства учтены, которые в некоторых местах исследования привели к повторным рассмотрениям.

1.2.1 Представление многопериодических решений однородной системы интегро-дифференциальных уравнений

Сначала изучим нули оператора дифференцирования и их многопериодичность.

*Нулем оператора*  назовем гладкую функцию , удовлетворяющую уравнению .

Линейная функция

 (1.2.5)

является общим решением характеристического уравнения  с начальным данным , а его интеграл, полученный из (1.2.5) относительно  вида

 (1.2.6)

является нулем оператора , удовлетворяющим условию .

Также нетрудно убедиться, что если  – любая функция гладкости  по , то функция

 (1.2.7)

есть нуль оператора , удовлетворяющая условию .

В силу произвольности функции  из класса  функций гладкости  по  соотношение (1.2.7) представляет собой общую формулу нулей оператора . В связи с исследованием вопроса о многопериодичности нулей оператора  следует обратить внимание на следующие свойства характеристик  оператора :

, (1.2.8)

, (1.2.9)

 (1.2.10)

вытекающие из линейности функции (1.2.6), где , множество целых чисел.

Если  – нуль оператора  -периодична по , то начальная функция  является -периодической по :

, . (1.2.11)

Тем самым, условие (1.2.11) есть необходимое условие для -периодичности нуля .

Допустим, что для нуля  оператора  выполнено необходимое условие (1.2.11) - периодичности по . Тогда , согласно (1.2.7), имеет вид

. (1.2.12)

Очевидно, что в силу условий (1.2.10) и (1.2.11) исследуемый нуль (1.2.12) является -периодичным по . Чтобы нуль  был -периодическим по  потребуем выполнение условия

, (1.2.13)

которое имеет место в силу свойства (1.2.9). Отсюда ясно, что, при условии (1.2.11), соотношение (1.2.13) имеет место, если только найдется некоторый целочисленный вектор  и выполнено равенство

, (1.2.14)

которое означает соизмеримость векторов  и .

Здесь следует отметить, что условие (1.2.14) требуется, если начальная функция  обязательно зависит от переменной . В противном случае, когда , то условие (1.2.13) выполняется автоматически и условие (1.2.14) не понадобится. Таким образом, если условие (1.2.14) не выполняется, то тогда - периодическим нулем оператора  являются постоянные.

Очевидно, что, в силу условия (1.2.8), нули  оператора  вида (1.2.7) обладают свойством диагональной -периодичности по : . Доказательство этого свойства следует из (1.2.8) и (1.2.7) на основе непосредственной проверки. Полученные результаты подытожим в виде нижеследующей теоремы.

**Теорема 1.2.1.** *1) Если условие (1.2.14) не выполняется, то -периодическими нулями оператора  являются только постоянные, многопериодических переменных нулей не имеет. 2) Если условие (1.2.14) выполняется, то любой нуль оператора  с начальной функцией вида (1.2.11) является -периодическим, в частности, им может быть и любая постоянная. 3) Любой нуль вида (1.2.7) обладает свойством диагональной -периодичности по , причем из -периодичности нуля по  следует -периодичность её и по .*

В заключение, отметим еще одно групповое свойство характеристики

, (1.2.15)

необходимое в дальнейшем, в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой.

Рассмотрим начальную задачу для линейной однородной системы

 (1.2.16)

относительно искомой -вектор-функции  с условием

 (1.2.17)

в предположениях

, , (1.2.18)



, . (1.2.19)

Из [58, стр. 38-39], при условии (1.2.18) методом последовательных приближений строится матрицант  линейной системы уравнений вида

,

который обладает свойствами

, (1.2.20)  
, (1.2.21)

, (1.2.22)

где  – единичная -матрица.

Тогда заменой

 (1.2.23)

систему (1.2.16) приводим к виду

 (1.2.24)

с ядром . В силу (1.2.8)-(1.2.10) характеристик , (1.2.19) ядра  и (1.2.20)-(1.2.22) матрицанта  обладает свойствами многопериодичности и гладкости вида



, . (1.2.25)

Далее, при условии (1.2.19), интегрируя вдоль характеристик: , пользуясь свойством (1.2.15) вида , из уравнения (1.2.24), методом последовательных приближений, находим его матричное решение , исходя из интегрального уравнения

, (1.2.26)

причем в силу свойства (1.2.25) ядра , имеем следующее соотношение

, . (1.2.27)

Очевидно, что в силу (1.2.26) и (1.2.27) получим

, (1.2.28)

. (1.2.29)

Отметим, что матрица , ядро  и период  таковы, что матрица  обратима, причем .

Тогда матрица , построенная на основе замены (1.2.23) обратима, удовлетворяет уравнению (1.2.16), обращается в единичную матрицу  при , обладает свойством диагональной -периодичности по  и -периодичности по :

,

, (1.2.30)

, . (1.2.31)

Свойства (1.2.30) и (1.2.31) матрицы  являются следствиями свойств (1.2.20)-(1.2.22) и (1.2.27), (1.2.28), (1.2.29) матриц  и .

Матрицу  называют разрешающим оператором интегро-дифференциальной системы (1.2.16). Построение разрешающего оператора, то есть, резольвенты приведено в подразделе 1.1.

**Теорема 1.2.2.** *Пусть выполнены условия (1.2.18) и (1.2.19). Тогда решение  начальной задачи (1.2.16)-(1.2.17) однозначно определяется соотношением*

. (1.2.32)

Доказательство. В силу условия (1.2.17), в соответствии с (1.2.11) и (1.2.12), вектор-функция  является нулем оператора : . На основе соотношений (1.2.15), (1.2.30) и (1.2.32) имеем







.

Таким образом, убедились, что вектор-функция (1.2.32) удовлетворяет системе (1.2.16). В силу (1.2.6) и (1.2.30) при  имеем условие (1.2.17). Единственность решения (1.2.32) следует из однозначности определения матриц  и . Теорема доказана полностью.

Теперь после установления структуры общего решения (1.2.32) системы (1.2.16) имеем возможность исследовать многопериодичность её решений.

**Теорема 1.2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.2. Для -периодичности решения  системы (1.2.16), необходимо, чтобы его начальная при  функция  была -периодической непрерывно дифференцируемой функцией переменной :*

, . (1.2.33)

Доказательство. Действительно, при  из формулы общего решения (1.2.32) системы (1.2.16) имеем

, (1.2.34)

причем оно -периодично по . Следовательно, выполняется условие

. (1.2.35)

В частности, из множества (1.2.35) получим соотношение

. (1.2.36)

Подставив представление (1.2.34) в тождество (1.2.36) имеем

.

Тогда в силу свойств (1.2.10) и (1.2.31) отсюда получим

.

Далее, положив , с учетом (1.2.30), имеем , .

Таким образом, тождество (1.2.33) доказано. Гладкость начальной функций  следует из гладкости самого решения  системы (1.2.16). Что и требовалось доказать.

**Теорема 1.2.4.** *Для того чтобы при условиях теоремы 1.2.3 решение  системы (1.2.16) было -периодическим по  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.2.33) относительно начальной функции  при .*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.2.3. Чтобы доказать достаточность покажем, что соотношение (1.2.36) следует из условия (1.2.33). Для этого достаточно воспользоваться представлением (1.2.34) и свойствами (1.2.10) и (1.2.31) характеристики и матрицанта, соответственно.

**Теорема 1.2.5.** *Для того чтобы при условиях теоремы 1.2.4 решение  системы (1.2.16) было -периодическим по  необходимо и достаточно, чтобы начальная при  функция  была -периодическим решением линейной -периодической по  функционально-разностной системы*

 (1.2.37)

*с разностью  по .*

Доказательство. Условие -периодичности решения  имеет вид

. (1.2.38)

В силу свойств единственности решения системы (1.2.16) для выполнения условия (1.2.38), необходимо и достаточно, чтобы имело место условие

. (1.2.39)

Тогда пользуясь представлением (1.2.34) тождество (1.2.39) перепишем в виде

.

Отсюда в силу свойств (1.2.9) и (1.2.30) имеем необходимое и достаточное условие (1.2.37). Если  является -периодическим нулем оператора , то решение  вида (1.2.34):

, (1.2.40)

назовем -периодическим по  решением, порожденным -периодическим нулем  оператора дифференцирования .

**Теорема 1.2.6.** *Пусть выполнены условия (1.2.18) и (1.2.19). Для того чтобы решение  было -периодическим решением системы (1.2.16), порожденным -периодическим нулем  оператора  необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция  была собственным вектором матрицы монодромии :*

. (1.2.41)

Доказательство. Согласно теореме 1.2.1 имеем . Следовательно, необходимое и достаточное условие (1.2.37), приведенное по теореме 1.2.5 имеет вид

. (1.2.42)

Очевидно, что . Тогда из соотношения (1.2.42) имеем условие -периодичности решений  из рассматриваемого класса, порожденных многопериодическими нулями оператора .

Заметим, что если не выполняется условие соизмеримости (1.2.14), то :  и условие (1.2.41) многопериодичности имеет вид

. (1.2.43)

Чтобы отсутствовали ненулевые -периодические решения у системы (1.2.16), в данном случае, достаточно требовать выполнения условия

. (1.2.44)

Исследование многопериодических решений вида (1.2.40) системы (1.2.16) представляет отдельное интересное направление теории многопериодических решений таких систем, которые проводятся на основе условий (1.2.41)-(1.2.44). Во многих случаях возникает необходимость выяснения условий отсутствия многопериодических решений систем вида (1.2.16), отличных от тривиального . Для этого, согласно теореме 1.2.5, необходимо требовать, чтобы -периодическая функционально-разностная система (1.2.37) не имела, отличного от нуля, -периодического по  решения. В связи с этим, предположим, что разрешающий оператор  системы интегро-дифференциальных уравнений (1.2.16) удовлетворяет условию

, , , . (1.2.45)

Тогда матрица  при  обращается в единичную матрицу  и при , согласно условию (1.2.45), экспоненциально убывает. Следовательно, матрица монодромии  при всех  удовлетворяет условию

, (1.2.46)

где .

Тем самым, представив систему (1.2.37) в виде

 (1.2.47)

и интегрируя её  раз имеем .

Оценивая последнее соотношение, на основе (1.2.46) имеем неравенство

.

Отсюда переходя к пределу при , учитывая, что величина  ограничена в силу её -периодичности, имеем , то есть система (1.2.47) имеет только нулевое -периодическое решение. Доказана теорема.

**Теорема 1.2.7.** *При условиях теоремы 1.2.5 для того чтобы, система интегро-дифференциальных уравнений (1.2.16) не имела многопериодических решений, кроме нулевого, достаточно выполнение условия (1.2.45).*

Заметим, что доказанная теорема 1.2.7 остается справедливой, если условие (1.2.45) заменить условием

, , , . (1.2.48)

Более общим, чем (1.2.45) и (1.2.48), условием отсутствия отличного от нулевого многопериодического решения является условие разложимости разрешающего оператора  на сумму двух матричных решений  и  системы (1.2.16) в виде

, (1.2.49)

, (1.2.50)

удовлетворяющих условиям

, (1.2.51)

. (1.2.52)

В частности, когда одна из матриц  и  равна нулю, то тогда получим соответственно либо условие (1.2.45), либо условие (1.2.48). В случае выполнения условий (1.2.49)-(1.2.52) говорят, что разрешающий оператор  обладает свойством экспоненциальной дихотомичности. Заметим, что для системы (1.2.16) случай экспоненциальной дихотомичности возможен, когда для матрицы монодромии  существуют проекторы  и , обладающие свойствами  – тождественный оператор,  – нулевой оператор и , где  проектирует пространство решений на подпространство экспоненциально убывающих по норме решений, а  на подпространство экспоненциально возрастающих решений.

Тогда система

 (1.2.53)

эквивалентна системе

, (1.2.54)

. (1.2.55)

Как выше, было обосновано, что системы (1.2.54) и (1.2.55) имеют только нулевые многопериодические решения, следовательно, система (1.2.53) также имеет только нулевое решение, если только выполнены условия (1.2.49)-(1.2.52). Таким образом, можно сформулировать теорему, которая обобщает доказанную выше теорему 1.2.7.

**Теорема 1.2.8.** *Пусть выполнены условия (1.2.18), (1.2.19) и (1.2.49)-(1.2.52). Тогда система (1.2.16) не имеет многопериодических решений, кроме тривиального.*

1.2.2 Построение многопериодического решения неоднородного интегро-дифференциального уравнения с оператором дифференцирования

Рассмотрим линейную неоднородную систему интегро-дифференциальных уравнений

, (1.2.56)

соответствующую системе (1.2.16), где  – заданная -вектор-функция, обладающая свойством многопериодичности и гладкости (1.1.61).

При условии (1.1.61) поставим задачу об определении решения  системы (1.2.56), удовлетворяющего начальному условию

. (1.2.57)

Решение этого вопроса начнем с отыскания частного решения  системы (1.2.56) с нулевым начальным условием

. (1.2.58)

Это решение будем искать в виде

 (1.2.59)

с неизвестной, непрерывной и гладкой по  -вектор- функцией

, (1.2.60)

где  – разрешающий оператор однородной системы (1.2.16).

Действуя оператором  на вектор-функцию (1.2.59) с учетом (1.2.60) имеем







. (1.2.61)

Подставив выражения (1.2.59) и (1.2.61) в систему (1.2.56) получим, что

. (1.2.62)

Тогда в силу (1.2.62) находим искомое решение

. (1.2.63)

Очевидно, что решение (1.2.63) удовлетворяет условию (1.2.58).

Так как решение  линейного неоднородного уравнения состоит из суммы решений однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения, то имеем выражение общего решения по Коши

 (1.2.64)

системы (1.2.56) с начальным условием (1.2.57).

Таким образом, имеем теорему о решении начальной задачи для неоднородной системы интегро-дифференциальных уравнений (1.2.56).

**Теорема 1.2.9.** *При условиях (1.2.18), (1.2.19) и (1.1.61) начальная задача (1.2.56)-(1.2.57) имеет единственное решение  в виде (1.2.63)-(1.2.64).*

Доказательство. Существование решения  при условиях теоремы доказано выводами (1.2.63) и (1.2.64). Единственность решения (1.2.64) следует из единственности решения начальной задачи для однородной системы (1.2.16).

Теперь займемся исследованием задач о многопериодических решениях системы (1.2.56). Предположим выполненными условия теоремы 1.2.8. Тогда однородная система (1.2.16), соответствующая системе (1.2.56) не имеет -периодических, отличных от нуля, решений, причем она обладает свойством экспоненциальной дихотомичности. В этом случае вопрос о существовании многопериодических решений системы (1.2.56) исследуем на основе метода матрицы типа Грина. Для построения матрицы типа Грина , пользуясь свойством экспоненциальной дихотомичности, положим

 (1.2.65)

где  и  – слагаемые разрешающего оператора , состоящие из их суммы (1.2.49).

Построенная *матричная функция типа Грина* (1.2.65) обладает нижеследующими свойствами:

.. (1.2.66)

Это свойство следует из свойства (1.2.50) оператора .

.. (1.2.67)

Отметим, что  свойство следует из равенства 

.

.. (1.2.68)

Данное свойство является следствием свойства (1.2.31) разрешающего оператора .

.,,. (1.2.69)

Эту оценку имеем из неравенств (1.2.51)-(1.2.52).

**Теорема 1.2.10.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.9 и матрица  с ядром  таковы, что линейная однородная система (1.2.16) обладает свойством экспоненциальной дихотомичности, выраженным соотношениями (1.2.49)-(1.2.52). Тогда неоднородная система интегро-дифференциальных уравнений (1.2.56) имеет единственное -периодическое решение*

, (1.2.70)

*удовлетворяющее оценке*

, (1.2.71)

*где* .

Доказательство. Сходимость интеграла (1.2.70) и дифференцируемость решения (1.2.70) следуют из дифференцируемости матрично-векторных функций ,  и оценки (1.2.69). В силу (1.2.66) и (1.2.67) доказывается, что вектор-функция (1.2.70) удовлетворяет системе (1.2.56). Многопериодичность следует из свойств (1.2.68) и (1.1.61). Неравенство (1.2.71) является следствием оценки (1.2.69). Экспоненциальная дихотомичность системы (1.2.16) обеспечивает единственность -периодического решения системы (1.2.56).

**Лемма 1.2.1.** *Пусть однородная линейная система (1.2.16) при условиях (1.2.18), (1.2.19) и (1.1.61) не имеет -периодических решений, кроме нулевого. Тогда при условии (1.1.61) соответствующая неоднородная линейная система (1.2.56) может иметь не более одного -периодического решения.*

Доказательство. Предположим, что при условиях данной леммы система (1.2.56) имеет два разных -периодических решений  и . Тогда их разность  является -периодическим решением линейной однородной системы (1.2.16), которая имеет только нулевое -периодическое решение. Полученное противоречие доказывает справедливость леммы.

Предположив, что -периодическая начальная функция  -периодического решения :

, (1.2.72)

представленного соотношением (1.2.64), обладает свойством

, (1.2.73)

его можно представить и формулой

, (1.2.74)

так как  в силу условия (1.2.73) является -периодическим нулем оператора . Тогда, исключив из соотношений (1.2.72) и (1.2.74) неизвестную начальную функцию , получим



. (1.2.75)

Далее, пользуясь представлением (1.2.63) решения , приняв обозначение  и положив

 (1.2.76)

 (1.2.77)

соотношение (1.2.75) представим в форме

. (1.2.78)

Таким образом, отыскивая -периодическое решение  системы (1.2.56) среди решений с начальными условиями, обладающим свойством (1.2.73), показали, что оно определяется формулой (1.2.78), которая раскрывается соотношениями (1.2.63) и (1.2.75)-(1.2.77).

**Теорема 1.2.11.** *Пусть выполнены условия (1.2.18), (1.2.19), (1.1.61) и линейная однородная система (1.2.16) не имеет -периодических решений, кроме тривиального. Тогда система неоднородных линейных интегро-дифференциальных уравнений (1.2.56) имеет единственное -периодическое решение  вида (1.2.78).*

Доказательство. Вывод решения (1.2.78) приведен выше. Следовательно, существование -периодического решения системы (1.2.56) доказано. Единственность следует из леммы 1.2.1.

Отметим, что выше изученные задачи для рассмотренных систем можно рассмотреть вдоль характеристик  с фиксированными начальными данными . Тогда в силу того, что оператор  переходит в оператор  полной производной, из доказанных теорем как следствия имеем соответствующие утверждения о существовании решений начальных задач для систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений и теоремы о существовании их квазипериодических по Бору решений, порожденных многопериодическими решениями исходных систем, на которых здесь останавливаться не будем.

В заключении прежде всего отметим, что предложена методика исследования решений задач, удовлетворяющих начальным условиям и обладающих свойством многопериодичности с заданными периодами для линейных систем интегро-дифференциальных уравнений с  оператором дифференцирования в частных производных, -эредитарным эффектом и линейным интегральным оператором. Эта методика является обобщением методик и решений аналогичных задач для систем уравнений в частных производных с оператором . Рассматриваемые задачи для таких систем в такой постановке изучаются впервые. Обоснована актуальность основной поставленной задачи. Решения всех подзадач, разобранных по достижению цели, сформулированы в виде теорем с доказательствами. К научной новизне относятся теоремы о многопериодичности нулей оператора ; о решениях начальных задач для всех рассмотренных видов систем; о необходимых, а также достаточных условиях существования многопериодических решениях как однородных, так и неоднородных систем, а также интегральные представления решений неоднородных систем в двух случаях, когда соответствующие однородные системы обладают свойствами: 1) экспоненциальной дихотомичности и 2) отсутствия нетривиальных многопериодических решений, вообще. Также заметим, что следствия, вытекающие путем рассмотрения полученных результатов вдоль характеристик  с фиксированной  относятся к приложениям их в теории квазипериодических решений систем обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.

Разработанная здесь методика вполне применима к исследованию задач, о колебаниях струны эредитарного характера и о флуктуациях биологического развития «хищник-жертва», приведенных в постановочной части работы, которые можно отнести к примерам прикладного аспекта.

**1.3 Многопериодические решения квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования и ограниченной эредитарностью**

1.3.1 Исследование многопериодического решения системы нелинейных интегро-дифференциальных -уравнений в случае, когда нелинейность не содержит эредитарности

Рассматривается квазилинейное уравнение



, (1.3.1)

где предполагается, что  в области  переменных  непрерывна по всем переменным, обладает ограниченными непрерывными частными производными первого порядка по  и , многопериодична по 

, . (1.3.2)

Здесь  – -вектор,  – -вектор показатель степени гладкости по  и по  соответственно.

Чтобы исследовать решения с начальными данными и -периодические решения, предположим выполненными условия (1.1.14), (1.1.22) и (1.3.2). Решение  с начальным условием

 (1.3.3)

определяется методом последовательных приближений из уравнения

. (1.3.4)

Для исследования -периодического решения, кроме условий (1.1.14), (1.1.22) и (1.3.2) еще предположим выполненными условия (1.1.9) и (1.1.54)-(1.1.56). Уравнениями вида (1.3.1), в частности (1.1.60), описываются явления переноса субстанции биологических систем. Определенный интерес представляет исследование многопериодических решений таких уравнений, характеризующих флуктуации систем по временным переменным.

Введем пространство  непрерывных функций  -периодических по , ограниченных по норме .

В силу (1.3.2) положим, что

, ,  (1.3.5)

с некоторыми постоянными . Из (1.3.5) имеем:

, (1.3.6)

. (1.3.7)

Положим, что постоянные , ,  и  связаны между собой соотношением

. (1.3.8)

Очевидно, что из неравенства (1.3.8) следует

. (1.3.9)

Введем в рассмотрение оператор

. (1.3.10)

Здесь  – матричная функция типа Грина, удовлетворяет начальному условию c единичной матрицей :  и условиям (1.2.66)-(1.2.69).

Для установления единственной неподвижной точки  воспользуемся принципом неподвижных точек оператора в полном нормированном пространстве. Затем следует доказать дифференцируемость  по . При установлении существования неподвижной точки  и обоснования её дифференцируемости появляются дополнительные условия на уравнение (1.3.1). Можно показать, что оператор  пространство  отображает в себя.

Действительно, в силу оценок (1.1.56), (1.2.69) и (1.3.7) имеем



. (1.3.11)

Для функций  и  имеет место оценка









. (1.3.12)

Отметим, что при оценивании были использованы неравенства (1.1.56) и (1.3.6).

Непосредственной проверкой убеждаемся, что если  является непрерывной -периодической, то, в силу условий (1.3.2) и (1.1.80)-(1.1.81) этим же свойством обладает и функция . В силу предположения (1.3.8) со следствием (1.3.9) из оценок (1.3.11) и (1.3.12) видно, что оператор  переводит пространство  в себя и будет оператором сжатия с коэффициентом сжатия меньше единицы. Тем самым, по теореме Каччиополи-Банаха [47, стр. 39-40] в классе  существует единственная неподвижная точка  оператора , т.е. , которая является решением интегро-дифференциального уравнения (1.3.1).

Выберем вектор-функцию  и построим приближенные функции , . Тем самым получим последовательность вектор-функций

. (1.3.13)

Тогда . Теперь покажем, что последовательность вектор-функций (1.3.13) равномерно сходится и ее предел является функцией этого же класса.

Для этого рассмотрим ряд

. (1.3.14)

Заметим, что , . Тогда . На основе (1.3.12) для каждого  имеем . Ряд (1.3.14) мажорируется сходящимся числовым рядом

. (1.3.15)

Из (1.3.15) следует, что последовательность (1.3.13) равномерно сходится к некоторой функции .

Следовательно, в силу полноты пространства  оператор  имеет единственную неподвижную точку :

. (1.3.16)

Для обоснования дифференцируемости неподвижной точки , введем систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида



, (1.3.17)

которая получена из системы (1.3.1), рассматривая её вдоль характеристик  оператора . Очевидно, что для вольтерровой системы (1.3.1) обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений при условиях (1.3.2) и (1.3.5) выполнены все условия теоремы существования и единственности, теоремы о дифференцируемости решений по параметру.

Единственное ограниченное решение системы (1.3.17) определяется интегральным уравнением

. (1.3.18)

Так как  удовлетворяет операторному уравнению (1.3.16), то функция  является ограниченным решением уравнения (1.3.18), а следовательно (1.3.17). Тогда решение  дифференцируемо по  и по компонентам  векторного параметра .  дифференцируя по  и  получим дифференцируемость  по .

Применяя оператор  к операторному уравнению (1.3.16) убеждаемся, что  удовлетворяет системе (1.3.1).

Нетрудно обосновать эквивалентность задачи о многопериодических решениях уравнения (1.3.1) с задачей разрешимости интегрального уравнения



с оператором (1.3.10) при достаточно общих случаях.

**Теорема 1.3.1.** *Пусть выполнены условия (1.1.14), (1.1.22), (1.1.56), (1.3.2), (1.3.5) и (1.3.8). Тогда система интегро-дифференциальных уравнений (1.3.1) имеет единственное -периодическое решение  из , ограниченное по норме числом .*

Теперь докажем единственность этого решения.

Пусть  – многопериодическое решение системы (1.3.1) с периодом .

Рассмотрим линейное уравнение



. (1.3.19)

Согласно теореме 1.2.11 о существовании единственного -периодического решения линейной системы, она допускает единственное многопериодическое решение вида

. (1.3.20)

Но ясно, что линейной системе (1.3.19) удовлетворяет и многопериодическая функция  как решение нелинейной системы (1.3.1). Тогда в силу единственности многопериодического решения системы (1.3.19) имеем . Подставив  в левую часть (1.3.20) получим, что

.

Из последнего тождества следует, что  является неподвижной точкой оператора  из пространства . В силу единственности неподвижной точки .

Таким образом, единственность решения  из  доказана.

1.3.2 Многопериодическое решение квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений с -оператором и -периодической эредитарностью в общем случае

Рассматривается задача о существовании -периодических решений  по  квазилинейной системы

интегро-дифференциальных уравнений в частных производных



 (1.3.21)

с оператором дифференцирования , где  – имеют прежний смысл,  известная -вектор-функция, ,  – замыкание .

Интегро-дифференциальным уравнением в частных производных описываются многие задачи гидродинамики, акустики, теории переноса и других разделов механики сплошных сред. Основы наследственной теории упругости заложены в работах Л.Больцмана и В.Вольтерра. Как известно, В.Вольтерра использовал интегро-дифференциальные уравнения в задачах наследственной упругости, развил теорию эредитарной упругости на случай эредитарных колебаний, исследовал явления электрического и магнитного гистерезиса, обосновал существование периодических флуктуаций в биологических ассоциациях, создал общую теорию функционалов. Интегро-дифференциальным уравнениям, составляющим основу теории колебательных процессов в естествознании и технике посвящено многочисленные исследования авторов, отметим [129, 130]. Известно что, если явление колебаний имеет эредитарный характер, то уравнение движения струны при известном моменте  задается изменением угла кручения струны, а также эридитарное биологическое явление "хищник-жертва" связано законом колебаний [98, стр. 113-116]. Отметим что, математическая модель эредитарных явлений, описываемая системой уравнений

 (1.3.22)

является первым приближениeм относительно искомой -вектор-функции  с заданными -матрицами  и  и -вектор-функцией , где -период эредитарности явления. Так как процесс является колебательным, то, как правило, матрица  и вектор-функция  в общем случае, являются почти периодическими по , а ядро  обладает свойством диагональной периодичности по .

Согласно теореме Бора определяются матрично-векторные функции , , , , , обладающие свойствами , , , а оператор  заменяется на оператор дифференцирования .

В [16, стр. 11] исследованы вопросы качественной теории интегро-дифференциальных уравнений, приведены представления решения интегро-дифференциальных уравнений через резольвенту ядра [25, стр. 157-158]. Рассмотрены существование периодических решений нелинейных интегро-дифференциальных систем [76, стр. 1-5]. Для систем с последействием установлены существование семейств вынужденных движений, которые при неограниченном возрастании времени экспоненциально стремятся к периодическим режимам [87, стр. 58]. Интегро-дифференциальными уравнениями описываются реологические процессы [28, стр. 211-212], наследственная упругость модели, ползучести металла при высоких температурах [27, стр. 63-64]. Интегро-дифференциальные уравнения находят применения при описании процессов с последействиями, используются в задачах теории наследственности [98, стр. 108-112], возникают в задачах взаймодействия волн электромагнитных полей. На современном этапе развития теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных значительно возрос интерес к изучению многопериодических и почти периодических решений таких уравнений. Исследование многопериодических и почти периодических колебаний имеет теоретическое и практическое значение в науке и технике. Многообразие задач механики, физики и техники, описывающих периодические и почти периодические процессы, приводят к изучению нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Исследованию таких вопросов посвящены многие работы авторов. Монография [56, стр. 103-119] посвящена исследованию почти периодических решений систем уравнений с квазипериодическими правыми частями. В монографии [58, стр. 81] исследуются многопериодические и почти периодические как по временным, так и по пространственным переменным решения систем эволюционных уравнений в частных производных, содержащих различные малые параметры. Существование и построение многопериодических и псевдопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений изучены в [63, стр. 126-127]. В [73, стр. 338] установлены существования многопериодических по части переменных решения счетной системы квазилинейных уравнений.

Приисследовании решения нелинейной интегро-дифференциальной системы изучены необходимые сведения относительно нулей дифференциального оператора  из подраздела 1.1.1. Для линейной однородной интегро-дифференциальной системы (1.2.16) с некоторым постоянным периодом эредитарности , при условиях (1.2.18), (1.2.19) методом последовательных приближений, можно определить  с начальным условием , обладающий свойствами (1.2.30), (1.2.31). Если для системы (1.2.16) рассмотрим начальную задачу с условием (1.2.17), то при условиях (1.2.18) и (1.2.19) можно установить существование единственного решения  вида (1.2.40). Для -периодичности решения  системы (1.2.16) с начальным условием , на основе соотношений (1.2.18), (1.2.19), (1.2.30), (1.2.31), (1.2.17), (1.2.40) можно доказать, что начальная функция  будет -периодическим решением линейной функционально-разностной системы

 (1.3.23)

с разностью  по  из класса гладких функций .

В случае расщепления разрешающего оператора  на сумму двух матриц  и , обладающих свойствами, аналогичным (1.2.30) и (1.2.31) и удовлетворяющих оценкам (1.2.51), (1.2.52) с некоторыми постоянными  и , систему (1.2.16) назовем системой, обладающей свойством экспоненциальной дихотомичности. В силу условия (1.2.18), (1.2.19) и (1.3.23) можно доказать, что система (1.2.16), обладающая свойством экспоненциальной дихотомичности, не имеет -периодических решений, кроме нулевого. При тех же условиях (1.2.18), (1.2.19) и (1.2.51), (1.2.52) можно установить, что линейная неоднородная интегро-дифференциальная система (1.2.56) с -вектор-функцией , удовлетворяющей требованиям (1.1.61) имеет единственное решение (1.2.64) при любой начальной функции  и допускает единственное -периодическое решение (1.2.63) в случае экспоненциальной дихотомичности системы (1.2.16), где матричная функция  имеет структуру (1.2.65) и обладает свойствами (1.2.66)-(1.2.69). Матрицу , определенную соотношением (1.2.65), удовлетворяющую условиям (1.2.66)-(1.2.69) назовем *матричной функцией типа Грина* задачи о -периодических решениях для системы вида (1.2.56) со свободным членом (1.1.61).

Теперь приступим к исследованию разрешимости начальной задачи для квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений.

Представив систему (1.3.21) в виде

,

, (1.3.24)

рассмотрим начальную задачу с условием

 (1.3.25)

в пространстве  -периодических по , непрерывно дифференцируемых по  и  -вектор-функций : , ограниченных по норме , где ,  при ,  – замыкание , ,  и  – постоянные,  – пространство -периодических непрерывно дифференцируемых по  функций , ограниченных по норме  с постоянной  из промежутка , .

Операторы ,  и матрица  в системе (1.3.24) имеют прежний смысл, -вектор-функция  обладает свойствами

, , (1.3.26)

где векторы  и  имеют единичные компоненты и они отличаются друг от друга своими размерностями  и , ,  – замыкание .

Нетрудно показать, что в соответствии со структурой решения (1.2.64) начальной задачи для линейной системы (1.2.56), задача (1.3.24)-(1.3.25) эквивалентна однозначной разрешимости интегрального уравнения



 (1.3.27)

в пространстве  с некоторой постоянной  из промежутка .

Для исследования гладкости решения  системы (1.3.27) необходимо определить матричное уравнение для матрицы Якоби  искомого решения  c начальным условием . Очевидно, что матрицу Якоби  вектор-функции  по  можно представить как вектор-строка вектор-столбцов вида , где , причем . При вычислении матрицы Якоби, то есть при произведении матрицы  на вектор  удобно представить матрицу  в виде вектор-столбца  вектор-строк , . Тогда матрицу Якоби  матрицы  можно представить в виде матрицы векторных элементов , , a  вычисляется по правилу

 (1.3.28)

с использованием операции  – скалярного произведения, где . Следовательно, в силу (1.3.28) имеем





. (1.3.29)

Здесь при дифференцировании  по  пользовались соотношением  при  и  при , . В силу (1.3.24)-(1.3.25) матрица Якоби  искомого решения  удовлетворяет матричному уравнению



 (1.3.30)

и условию

****, (1.3.31)

где -матричная функция  построена по формулам (1.3.28) и (1.3.29), применением их к ,  и , причем она имеет вид



 (1.3.32)

Таким образом, матрица  является решением задачи (1.3.30)-(1.3.31) с вектор-функцией (1.3.32). Аналогично, определим начальную задачу для  по  искомого решения  интегральной системы (1.3.27). Положив ,   , , ,  имеем





Допуская непрерывную дифференцируемость решения  системы (1.3.27), с учетом эквивалентности её с задачей (1.3.24)-(1.3.25), дифференцированием системы (1.3.24) по  получим

 (1.3.33)

где вектор-функция  определена соотношением



 (1.3.34)

а определяемая системой (1.3.33) производная  искомого решения  по , в силу условия (1.3.25), удовлетворяет начальному условию

. (1.3.35)

В силу (1.2.18), (1.2.19) и (1.3.26) матричная функция  и вектор-функция  обладают свойствами



, , (1.3.36)

****

**,** ,(1.3.37)

где гладкость функций по векторам и матрицам означает гладкость по их элементам, а вектор-порядка  имеют единичные элементы размерности  соответственно. Заметим, что функции  и **** линейные относительно аргументов  и . Далее, аналогично переходу от задачи (1.3.24)-(1.3.25) к системе (1.3.27), от задач (1.3.33)-(1.3.35) и (1.3.30)-(1.3.31) переходим к эквивалентным интегральным системам



 (1.3.38)



 (1.3.39)

где 

Теперь исследуем вопрос о существовании непрерывного по  -периодического по  решения  интегральных систем уравнений {(1.3.27), (1.3.38), (1.3.39)}, ограниченных по норме  при .

В силу условий (1.3.26), (1.3.36), (1.3.37) функция  обладает свойствами

, . (1.3.40)

Здесь  – векторы с единичными компонентами размерностей  и .

Из условия (1.3.40) следует условие Липшица

 (1.3.41)

с некоторой постоянной  при , .

Тогда положив , в силу условия (1.3.41), имеем

, . (1.3.42)

Вводя обозначение  систему {(1.3.27), (1.3.38), (1.3.39)} можно представить в виде одного интегрального уравнения

 (1.3.43)

где .

Рассмотрим в пространстве  непрерывных по  и -периодических по  -вектор-функций , ограниченных по норме  при , Так как  при  обращается в единичную матрицу , , то

, (1.3.44)

где  при .

Тогда в силу оценки (1.3.42) и (1.3.43) получим .

Так как параметры  и  управляемые, то можно предположить выполненными условия

. (1.3.45)

Следовательно, оператор , определяемый соотношением



, (1.3.46)

полное пространство  отображает в себя и является сжатым. Тогда он в  имеет единственную неподвижную точку , которая в силу (1.3.46) является единственным решением уравнения (1.3.43). Очевидно, что первая компонента  решения  является единственным решением интегральной системы (1.3.27), а другие компоненты  и , являясь решениями систем (1.3.38) и (1.3.39), находятся в связи с первой компонентой соотношениями  в силу (1.3.33) и (1.3.30) с начальными условиями (1.3.35) и (1.3.31) для них. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.3.2.** *При выполнении условий (1.2.18), (1.2.19), (1.3.26) и (1.3.45) начальная задача (1.3.24)-(1.3.25) однозначно разрешима в пространстве  -периодических по , непрерывно дифференцируемых по  -вектор-функций , ограниченных по норме  постоянной , где  при ,  – замыкание .*

Вопрос о существовании многопериодических решений квазилинейной системы интегро-дифференциальных уравнений (1.3.24) исследуем при выполнении условия (1.2.51), (1.2.52) экспоненциальной дихотомичности однородной системы (1.2.16).

Построив матрицу типа Грина  по формуле (1.2.65) со свойствами (1.2.66)-(1.2.69), в соответствии со структурой многопериодического решения (1.2.63) неоднородной системы (1.2.56), введем в рассмотрение оператор

, (1.3.47)

определенный в пространстве  непрерывных -периодических по  -вектор-функций , ограниченных по норме  при  числом .

При условии (1.3.26) вектор-функция  удовлетворяет условию Липшица относительно  c некоторой постоянной . Следовательно для  имеем неравенство

. (1.3.48)

Тогда в силу условия (1.3.48) имеем оценку

, (1.3.49)

где .

Пусть параметры  связаны неравенством

. (1.3.50)

**Теорема 1.3.3.** *При условиях (1.2.18), (1.2.19), (1.2.51), (1.2.52), (1.3.26) и (1.3.50) оператор , определенный соотношением (1.3.47) в пространстве  имеет единственную неподвижную точку .*

Доказательство. В силу условий теоремы и соотношений (1.3.48) и (1.3.49) можно показать, что оператор (1.3.47) переводит пространство  в себя и является сжатым. Очевидно, что пространство  – полное. Следовательно, по теореме Каччиополи-Банаха оператор  в  имеет единственную неподвижную точку. Что и требовалось доказать.

Теперь наряду с оператором  введем операторы  и  соотношениями

,

, (1.3.51)



, (1.3.52)

где  – -вектор,  – строчный вектор с векторными компонентами , , функции  и  определены соотношениями

,

, (1.3.53)

где , ,



 (1.3.54)

в соответствии с (1.3.33) и (1.3.30), , , , . Очевидно, что в силу (1.2.19), (1.3.36) и (1.3.37) эти функции удовлетворяют условию Липшица относительно , причем в качестве постоянной Липшица берем  и функции  будем считать ограниченными по норме постоянной .

Следовательно, оператор

, (1.3.55)

полученный расширением оператора (1.3.47) на основе дополнительных операторов (1.3.51) и (1.3.52), определенных при ,  удовлетворяет условиям

, (1.3.56)

для 

Очевидно, что пространство  – полное. При условии (1.3.50) оператор , определенный соотношением (1.3.55) в силу (1.3.56) переводит пространство  в себя и является сжимающим. Следовательно, найдется единственная неподвижная точка , для которой имеем покомпонентную систему тождеств

 (1.3.57)

где .

Тогда в соответствии с общей теорией дифференциальных уравнений в банаховых пространствах из соотношений (1.3.57) следует непрерывная дифференцируемость неподвижной точки  оператора  по  и , причем

,  (1.3.58)

в силу (1.3.30)-(1.3.34), (1.3.53) и (1.3.54).

Таким образом, доказана следующая теорема о разрешимости операторного уравнения

 (1.3.59)

в пространстве гладких многопериодических функций .

**Теорема 1.3.4.** *При условиях теоремы 1.3.3 неподвижная точка  оператора  непрерывно дифференцируема по , причем справедливы соотношения (1.3.58).*

Теперь можно доказать следующую теорему о существовании единственного многопериодического решения системы интегро-дифференциальных уравнений (1.3.21).

**Теорема 1.3.5.** *Пусть выполняются условия (1.2.18), (1.2.19) и линейная однородная система интегро-дифференциальных уравнений (1.2.16) обладает свойством экспоненциальной дихотомичности (1.2.51), (1.2.52). Тогда квазилинейная система интегро-дифференциальных уравнений (1.3.21) с нелинейностью, обладающей свойством (1.3.26) при условии (1.3.50) допускает единственное -периодическое решение, ограниченное числом .*

Доказательство. Задача о существовании единственного -периодического решения для системы (1.3.21) эквивалентна задаче об однозначной разрешимости операторного уравнения (1.3.59) с оператором (1.3.47) в пространстве  гладких -периодических вектор-функций.

При условиях данной теоремы 1.3.5 теоремой 1.3.3 доказана однозначная разрешимость системы (1.3.59) в пространстве  непрерывных по  и -периодических по  функций, а теоремой 1.3.4 вместе с однозначной разрешимостью доказана дифференцируемость её решения по . Следовательно, система (1.3.21) имеет единственное -периодическое решение, ограниченное числом . Что и требовалось доказать.

В заключении рассмотрим систему (1.3.21) вдоль характеристики  с фиксированной начальной точкой . Тогда оператор , действующий на  переходит в оператор полной производной  функции . Далее положив , ,   из системы (1.3.21) имеем систему обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений вида

. (1.3.60)

Тогда для системы (1.3.60) из теоремы 1.3.5 получим следующее следствие.

**Следствие 1.3.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.3.5. Тогда система обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (1.3.60), в предположении рациональной несоизмеримости частот , имеет единственное квазипериодическое решение  с теми же частотами, ограниченное числом .*

В справедливости следствия 1.3.1 можно убедиться на основе общеизвестной теоремы Г. Бора о связи многопериодических и квазипериодических функций.

**1.4 Однозначная разрешимость краевой задачи для квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в случае конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю**

Искомую вектор-функцию рассматриваемой задачи обозначим через  аргументов , , , . Оператор  вида  с постоянными коэффициентами  представляет собой дифференцирование функции  по направлению векторного поля . Функция  есть характеристический интеграл оператора . Если вектор-функция  описывает линейный эредитарный процесс с конечным периодом , то она в математическую модель процесса входит в виде интегрального члена  с ядром .

Рассмотрим квазилинейную систему



 (1.4.1)

с граничным условием

, (1.4.2)

где , , ,  – -периодические непрерывно дифференцируемые по , ,  непрерывные по ,  – заданная при , непрерывная по  гладкая по  -вектор-функция,  – замыкание , , ,  – замыкание .

Ставится задача об установлении достаточных условий однозначной разрешимости краевой задачи (1.4.1)-(1.4.2) в пространстве  непрерывно дифференцируемых по , -периодических по , ограниченных по норме  числом  функций .

Через  обозначим разрешающий оператор однородной системы

 (1.4.3)

при условиях

, (1.4.4)

. (1.4.5)

Существование единственного оператора  при  доказывается методом итераций, примененным к интегральному уравнению, соответствующему уравнению (1.4.3) с единичной начальной матрицей . Доказывается [58, стр. 34], что  обладает свойствами -периодичности по  и гладкости по . Так как решение  начальной задачи для уравнения (1.4.3) с условием

 (1.4.6)

задается формулой

, (1.4.7)

то решение краевой задачи для этого уравнения с граничным условием (1.4.2) будем искать удовлетворяющим условию

, (1.4.8)

где матрицант  при  обращается в единичную матрицу . Условие (1.4.8) имеет вид

. (1.4.9)

Так как  с разностью , то уравнение (1.4.9) при  можно записывать в виде

. (1.4.10)

Здесь ,  – -периодические гладкие по  матрицы. Если конечно-разностное уравнение (1.4.10) имеет -периодические гладкие по  решения

, (1.4.11)

то краевая задача для уравнения (1.4.3) с граничным условием (1.4.2) разрешима. Если в условии (1.4.2) хотя бы одна из матриц  и  неособенная, то имеем дело с регулярным случаем. Предположим

. (1.4.12)

Тогда условие (1.4.10) можно представить в виде

, (1.4.13)

где  матрица вида

. (1.4.14)

Применяя метод итерации  раз из (1.4.13) имеем эквивалентное условие

. (1.4.15)

Далее, рассмотрим случай, когда бесконечное произведение  при  является сходящимся к -периодической непрерывно дифференцируемой матрице 

. (1.4.16)

Известно, что если (1.4.13), (1.4.14) имеет -периодическое решение , то можно указать последовательность целочисленных векторов , таких, что

, (1.4.17)

где  и имеем

, . (1.4.18)

Тогда допустив разрешимость задачи {(1.4.10)-(1.4.11)} при условиях (1.4.12) и (1.4.16) переходя к пределу при  с учетом (1.4.17) и (1.4.18) из (1.4.15) получим

. (1.4.19)

Таким образом, показано, что при выполнении вышеперечисленных условий краевая задача разрешима, а начальная функция ее решения является решением алгебраического уравнения (1.4.19). Начиная с условия (1.4.8) через его представления (1.4.9), (1.4.10), (1.4.13) и (1.4.15) при условиях (1.4.12) и (1.4.16) приходим к (1.4.19). При этом все преобразования, проведенные в этих представлениях однозначно обратимые. Следовательно, обратно, если  функция, удовлетворяющая условия (1.4.11) является решением уравнения (1.4.19), то оно удовлетворяет условию (1.4.8), которое обеспечивает разрешимость поставленной задачи {(1.4.3), (1.4.2)}, причем ее решение определяется соотношением (1.4.7). Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 1.4.1.** *При условиях -периодичности и непрерывной дифференцируемости матриц  и , обладающих свойством (1.4.16), краевая задача для системы (1.4.3) с матрицами (1.4.4) и (1.4.5) при граничном условии (1.4.2), (1.4.12) разрешима, если система (1.4.19) имеет решения, обладающие свойствами (1.4.11).*

**Следствие 1.4.1.** *Если при условиях теоремы 1.4.1 имеет место условие невырожденности*

, (1.4.20)

*то краевая задача {(1.4.3), (1.4.2)} имеет только нулевое решение.*

Действительно, при условии (1.4.20) система (1.4.19) имеет только нулевое решение. Следовательно, по теореме 1.4.1 задача {(1.4.3), (1.4.2)} имеет только нулевое решение. При условии (1.4.19) краевая задача {(1.4.3), (1.4.2)} не имеет ненулевого решения, следовательно, разрешающий оператор  с начальным условием  удовлетворяет неравенству

 .

Отсюда при  имеем . Тем самым, в силу (1.4.14) получим

. (1.4.21)

Матричную -функцию , переводящую  в  назовем *матричной* *функцией типа Грина* краевой задачи {(1.4.3), (1.4.2)}, если она обладает следующими свойствами:

,

;

, ;

, ;

, .

Теперь займемся построением этой функции. Чтобы 

удовлетворяла условию , ее следует выбрать в виде

 (1.4.22)

где  и  – непрерывные по , -периодические и непрерывно дифференцируемые по  матрицы.

На основе свойств  и  получим



Тогда из второго уравнения этой системы имеем

,

а из первого уравнения получаем

.

Следовательно, в силу (1.4.21) из последних систем уравнений имеем



, (1.4.23)





. (1.4.24)

Подставив (1.4.23) и (1.4.24) в (1.4.22) получим представление матричной функции типа Грина в виде

 (1.4.25)

Многопериодичность по  матричной функции типа Грина (1.4.25) следует из соответствующего свойства матриц  и  по .

Таким образом, имеем следующую теорему о существовании матричной функции типа Грина рассматриваемой линейной краевой задачи.

**Теорема 1.4.2.** *Если наряду с условиями теоремы 1.4.1 выполнено и условие (1.4.20), то для краевой задачи {(1.4.3), (1.4.2)} существует матрица типа Грина вида (1.4.25).*

Теперь рассмотрим краевую задачу для неоднородной системы

 (1.4.26)

с граничным условием (1.4.2), где  – функция обладающая свойствами

. (1.4.27)

**Теорема 1.4.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.2 и условие (1.4.27). Тогда краевая задача {(1.4.26), (1.4.2)} имеет единственное решение , представимое матричной функцией типа Грина (1.4.25) в виде*

*.*  (1.4.28)

Доказательство. Функцию (1.4.28) запишем в виде

**

и применив оператор  к обеим частям последнего, имеем









.

Здесь учтено, что  и  – групповое свойство характеристик.

Этим убеждаемся, что (1.4.28) действительно является решением уравнения (1.4.26). Теперь проверим, что оно удовлетворяет граничному условию



.

Здесь отметим, что учтено групповое свойство характеристик: . Периодичность решения по  с периодом  следует из -периодичности функций  и . Единственность следует из того, что краевая задача для однородного уравнения (1.4.3) с условием (1.4.2) имеет только ненулевое решение. Действительно, если предположим, что существуют два различных решения, то их разность является решением однородной краевой задачи, которая имеет только нулевое решение. Эти решения совпадают. А это противоречит предположению их различности. Тем самым, решение задачи {(1.4.26), (1.4.2)} единственно. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим краевую задачу {(1.4.1)-(1.4.2)}. Относительно входных данных системы (1.4.1) будем считать выполненными совокупность условий (1.4.4), (1.4.5), а также

, (1.4.29)

где --вектор, --вектор.

По граничным условиям допустим выполненными группа требований: (1.4.12), (1.4.16), (1.4.20) вместе с условиями

, (1.4.30)

. (1.4.31)

Условия (1.4.4), (1.4.5) и (1.4.29) назовем условиями А), а условия (1.4.12), (1.4.16), (1.4.20), (1.4.30) и (1.4.31) – условиями Б).

**Теорема 1.4.4.** *При выполнении А) и Б) условий краевая задача {(1.4.1)-(1.4.2)} эквивалентна интегральному уравнению*

**

. (1.4.32)

Доказательство. Достаточность доказывается аналогично доказательству теоремы 1.4.3. Доказательство необходимости начинается с предположения о существовании решения  краевой задачи {(1.4.1)-(1.4.2)}.

Тогда неоднородная линейная система (1.4.26) с членом неоднородности



имеет решение вида (1.4.28) и в силу однозначной разрешимости краевой задачи левая часть формулы (1.4.28) заменяется на . Следовательно,  обращает (1.4.32) в тождество. Что и требовалось доказать.

**Теорема 1.4.5.** *При выполнении группы условий А) и Б) интегральное уравнение (1.4.32) для достаточно малых возмущений  имеет единственное непрерывное по  -периодическое по  решение.*

Доказательство. Рассмотрим пространство  -периодических по  непрерывных вектор-функций  удовлетворяющих краевому условию (1.4.2), ограниченных по норме числом :. Очевидно, что в силу (1.4.29)  удовлетворяет условию Липшица по  с постоянной :

, (1.4.33)

где ; , .

Как следствие неравенства (1.4.33) имеем

, (1.4.34)

где .

Тогда оператор  вида



 (1.4.35)

отображает пространство  в себя и в силу оценок (1.4.33) и (1.4.34), при выполнении условия

, (1.4.36)

обладает свойствами , , где , , . В частности, это неравенство выполняется при малых  и . Из условия (1.4.36) следует неравенство

, (1.4.37)

которое означает сжатость оператора (1.4.35).

Очевидно, что пространство  полное, а определенный в нем оператор (1.4.35) при условии (1.4.36) отображает его в себя и в силу условия (1.4.37) является сжатым. Тогда по теореме Каччиополи-Банаха оператор  в  допускает единственную неподвижную точку 

. (1.4.38)

Из (1.4.38) имеем существование единственного решения уравнения (1.4.32).

Заметим, что малое возмущение  гарантируется малостью параметров  и , из которой следует условие (1.4.36). Теорема 1.4.5 доказана полностью.

Рассматриваемая интегро-дифференциальная система описывает процессы с эредитарностью конечного периода. Исследование систем с оператором  связано с использованием метода изучения задач теории многочастотных колебательных явлений по времени, в основе которого находится переход от задач для обыкновенных дифференциальных уравнений к задачам уравнений в частных производных.

В основе методов проведенного исследования работы находятся методы классической теории краевых задач для дифференциальных уравнений как в обыкновенных, так и в частных производных [109, стр. 207-208], [110, стр. 63].

**2 МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С КОНЕЧНОЙ ЭРЕДИТАРНОСТЬЮ И ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВЕКТОРНОМУ ПОЛЮ**

**2.1 Многопериодическое решение начально-краевой задачи для линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа**

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение параболического типа с оператором дифференцирования по многомерному времени



 (2.1.1)

относительно искомой функции  переменных , , ; ,  – вектор, ; , , ,  – заданные функции;  и исследуется начально-краевая задача с условиями

, (2.1.2)

,

. (2.1.3)

Здесь , ,  – рационально несоизмеримые периоды; -вектор;  – класс гладких в  функций порядка ;

,

, (2.1.4)

. (2.1.5)

Данное исследование носит теоретический характер, но оно относится к разделам теории дифференциальных уравнений со многими приложениями. В связи с этим, обратим внимание на структуру уравнения, которое содержит 1) оператор дифференцирования , указывающий на многочастотность колебаний по временным переменным, 2) диффузионный член , связанный с распространением примеси вдоль оси  и 3) интегральный член типа , описывающий наследственность процесса с конечной продолжительностью . Теперь представим себе поток вдоль действительной оси , биохимическое состояние которого изменяется многопериодично по времени  (с суточной, месячной или годовой периодичностью) на допустимом уровне. Допустим, биохимическое состояние потока нарушено загрязнением – многопериодическим выбросом грязи или насыщением каким-то химическим элементом – йодом. Для восстановления состояния потока многопериодично добавляются очистительные или нормализующие элементы. Таким образом, состояние потока вдоль оси подвергается внешнему воздействию многопериодическому по временам. Концентрационные химические процессы в потоке являются диффузионными и связанными с предыдущими состояниями конечной продолжительности (наследственностью). Следовательно, модель процесса описывается линейной комбинацией  и членами 1)-3) с внешней силой . Этой иллюстрацией объясняется прикладной аспект исследования задачи (2.1.1)-(2.1.3). На современном этапе развития теории интегро-дифференциальных уравнений имеют важное значение исследования сложных проблем физики, химии, биологии, экологии. Как известно, интегро-дифференциальные уравнения параболического типа описывают передачу тепла, диффузию частиц, проникновение магнитного поля в плазму и другие процессы, связанные с наследственным распространением. Исследованием теории задач сплошной среды, приводящихся к интегро-дифференциальным уравнениям, занимались и занимаются многие авторы. Отметим работы [27, стр.113, 132], [28, стр. 136] по общей теории и [58, стр. 138-140] по колебаниям систем и ссылаемся на многочисленные исследования, цитируемые в них. Действительно, на более вековой истории и библиографии развития качественного исследования проблем интегро-дифференциальных уравнений как обыкновенных, так в частных производных особо останавливаться нет необходимости, поскольку о них подробную информацию можно получить из заключения и дополнения трудов основателя данного направления В. Вольтерра. Только отметим, что впервые задача для параболического интегро-дифференциального уравнения исследована Г. Эвансом.

Дальнейшие сведения о современном периоде развития исследований данного направления изложены во многих фундаментальных трудах. Заметим, что интегро-дифференциальными уравнениями описываются реологические процессы, наследственная упругость модели, ползучести металла при высоких температурах. Интегро-дифференциальные уравнения возникают в задачах взаимодействии волн электромагнитных полей. В [131] установлена разрешимость задачи теории вязкоупругости для интегро-дифференциального уравнения. В работе [132] рассмотрена задача проникновения электромагнитного поля в вещество с коэффициентом электропроводности, зависящим от температуры. Особый интерес представляют процессы, связанные с колебательными наследственными распространениями, которые приводят к качественному исследованию периодических и почти периодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений. Задачи подобного вида можно исследовать методом перехода к уравнениям с оператором дифференцирования в частных производных. Очевидно, что применение различных методов к одной и той же задаче представляет различные условия разрешимости исследуемого вопроса. Но исследуемая задача отличается от традиционных не только методом исследования, но и видом, и содержанием, связанными с оператором . Основная задача заключается в исследовании многопериодических решений системы параболического типа методом Г. Эванса, применение которого не встречается в современной научной литературе, причем многопериодические решения системы вдоль характеристик оператора дифференцирования  по  и , обращаются в квазипериодические по  решения обыкновенного интегро-дифференциального уравнения, полученного из исходного при . Данное исследование является развитием идей и методов работы Д.У.Умбетжанова и Ж.А.Сартабанова для рассматриваемого уравнения.

Изучение вопроса существования многопериодического решения начально-краевой задачи представляет важную и приоритетную задачу. Проблема поиска разрешимости краевых задач для интегро-дифференциального уравнения параболического типа приводит к конструированию методов качественного исследования рассматриваемых задач. Отметим, что методы исследования многопериодических решений интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений в частных производных относятся к малоизученному разделу математики. Поэтому разработка методов теории многопериодических решений как уравнений в частных производных, так и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой особый научный интерес. В работе исследуется начально-краевая задача для линейного интегро-дифференциального уравнения. С помощью соответствующей замены рассматриваемая краевая задача приведена к однородной, неоднородной задаче для интегро-дифференциального уравнения. Заметим, что рассматриваемое уравнение параболично вдоль каждой характеристики оператора  и принцип максимального значения решений, также теорема единственности для уравнения параболического типа остаются в силе. Вводится операторная функция, действующая на искомую функцию как линейный оператор. Для аналитического операторного представления решения интегрального уравнения используется метод (итерационных) последовательных приближений. Изучая операторное представление решения в виде ряда, показывается, что операторный ряд мажорируется числовым рядом. Исследуется сходимость данного ряда, доказывается его абсолютная и равномерная сходимость, а также устанавливается дифференцируемость рассматриваемого ряда по всем независимым переменным. При определенных условиях доказывается однозначная разрешимость рассматриваемых начально-краевых задач. На основе фундаментального решения интегро-дифференциального уравнения, обладающего соответствующими свойствами получены признаки существования и единственности многопериодического решения по многомерным временным переменным. Используя необходимое и достаточное условие периодичности для однородной и неоднородной начально-краевой задачи параболических уравнений, а также для краевых задач линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа установлены существование и единственность многопериодических решений по всем аргументам и найдены некоторые свойства искомых решений.

А) Ограниченные и многопериодические решения начально-краевой задачи.

Заменой

 (2.1.6)

задачу (2.1.1), (2.1.3) можно привести к задаче вида



, (2.1.7)

. (2.1.8)

Здесь

. (2.1.9)

Рассмотрим начально-краевую задачу для однородного уравнения

, (2.1.10)

с начальным условием

 (2.1.11)

и однородным граничным условием

, (2.1.12)

где начальная функция  обладает свойствами

, . (2.1.13)

Ненулевое ограниченное решение  задачи (2.1.10)-(2.1.12) при условиях (2.1.13) находим методом разделения переменных в разрезе временных  и пространственной  переменных. Тогда в силу (2.1.12) решая задачу с параметром  имеем нетривиальное решение . При каждом  и  уравнение  имеет общее решение , где .

Определим решение (2.1.10) в виде ряда

. (2.1.14)

Начальную функцию (2.1.11) со свойствами (2.1.13) представим в виде ряда

, .

На основе (2.1.13) периодическая по  и  функция , а также решение (2.1.14) почленно непрерывно дифференцируемы по  и . Непрерывная дифференцируемость (2.1.14) по  следует из экспоненциального по  свойства членов ряда. Решение задачи (2.1.10)-(2.1.12) представимо в виде

, (2.1.15)

где функция  и является аналогом функции мгновенного точечного источника [110, стр. 205].

Отметим свойства функции , периодической по :

. ; . ;

. ; . ;

. ,

где  , ;

. .

Очевидно, что если уравнение (2.1.10) параболично вдоль каждой характеристики  оператора , то принципы максимального значения решений и теорема единственности для параболического уравнения остаются в силе. Доказана следующая лемма.

**Лемма 2.1.1.** *При условии (2.1.13) относительно начальной функции, начально-краевая задача {(2.1.10)-(2.1.12)} имеет единственное решение вида (2.1.15).*

**Следствие 2.1.1.** *При условиях леммы 2.1.1 решение краевой задачи {(2.1.10)-(2.1.12)} является многопериодическим по  только при ненулевом начальном условии.*

Теперь рассмотрим задачу для неоднородного уравнения

 (2.1.16)

с начально-граничными условиями

, (2.1.17)

, (2.1.18)

где функция  обладает свойствами

. (2.1.19)

Из свойства (2.1.19) имеем представление  с коэффициентами  вида

,

. (2.1.20)

Решение  задачи {(2.1.16)-(2.1.18)} будем искать в виде:

, (2.1.21)

где  в силу (2.1.16)-(2.1.17) и (2.1.21) определяются так  с условиями  и решения этих начальных задач представимы в виде

. (2.1.22)

Подставив (2.1.22) в (2.1.21), затем пользуясь (2.1.20) получим представление решения задачи {(2.1.16)-(2.1.18)}

. (2.1.23)

Если (2.1.17) заменим на (2.1.11), то для (2.1.16) имеем начальное условие

. (2.1.24)

В силу леммы 2.1.1, получим решение задачи (2.1.16), (2.1.18), (2.1.24)



. (2.1.25)

Теперь, исследуем решение задачи (2.1.16), (2.1.18), (2.1.24), удовлетворяющее условию -периодичности по 

, . (2.1.26)

С этой целью из решения (2.1.25) заменой  на  получим



. (2.1.27)

Из последнего следует необходимое условие для -периодичности решения :

, (2.1.28)

где , , координаты вектора  отличные от нуля.

Условие (2.1.28) выполняется, в частности, когда начальная функция  не зависит от : . Пусть выполнено необходимое условие (2.1.28) при . Тогда решение вида (2.1.25) имеет вид



 (2.1.29)

так как .

Если решение (2.1.29) действительно обладает свойством -периодичности по  при некоторой функции , то подставив его в (2.1.26) и переходя к пределу при  получим решение

. (2.1.30)

При переходе к пределу при  учтено свойство функции мгновенного источника  при . Задача (2.1.16), (2.1.18), (2.1.24) не имеет другого -периодического решения, поскольку {(2.1.10)-(2.1.12)} не имеет нетривиального -периодического решения. Доказана теорема.

**Теорема 2.1.1.** *При условии (2.1.19) задача {(2.1.16)-(2.1.18)} однозначно разрешима в пространстве  ограниченных функций и ее решение  представляется в виде (2.1.23). Общая задача (2.1.16), (2.1.18), (2.1.24) имеет решение (2.1.25) и обладает свойством , а единственное решение , обладающее свойством -периодичности по  представляется соотношением (2.1.30).*

Перейдем к рассмотрению начально-краевой задачи для линейного однородного интегро-дифференциального уравнения вида



, (2.1.31)

, , (2.1.32)

. (2.1.33)

Наряду с задачей {(2.1.31)-(2.1.33)} рассмотрим интегральное уравнение





. (2.1.34)

На основе теоремы 2.1.1 и (2.1.25) можно убедиться, что интегральное уравнение (2.1.34) и задача {(2.1.31)-(2.1.33)} эквивалентные. Положим

. (2.1.35)

Очевидно, что функция (2.1.35) является нулем оператора дифференцирования , удовлетворяющим начальному и граничному условию (2.1.32)-(2.1.33). Определим линейную относительно  операторную функцию



. (2.1.36)

Отметим, что в (2.1.36)  действует на  как линейный оператор. Тогда интегральное уравнение (2.1.34) имеет вид



. (2.1.37)

Для аналитического операторного представления решения уравнения (2.1.37) применим метод (итерационных) последовательных приближений

,



.

Рассмотрим операторные выражения







где . Положим  – тождественный оператор.

Тем самым имеем формальное операторное представление решения 

, (2.1.38)

где .

Исследуем сходимость операторного ряда (2.1.38) при , , . Положим  для функции , определенную при .  ограничена при  некоторым числом : . Оператор  ограничен величиной  при условиях (2.1.4): , , . Тем самым, . Тогда ряд (2.1.38) мажорируется числовым рядом

, (2.1.39)

где учтено, что  в силу соотношения (2.1.35).

Таким образом, из (2.1.39) заключаем, что ряд (2.1.38) сходится

абсолютно и равномерно при . Непосредственно можно доказать дифференцируемость ряда (2.1.38) по . Из единственности решения интегрального уравнения (2.1.37) следует однозначная разрешимость {(2.1.31)-(2.1.33)}. Вводим оператор , который на функцию  действует так

 (2.1.40)

Далее положив

 (2.1.41)

имеем линейный оператор .

Тогда на основе (2.1.37) и (2.1.40)-(2.1.41) решение представимо в виде ряда, образованного повторным интегрированием линейного оператора .

Введем линейный оператор









. (2.1.42)

Функцию (2.1.42) называют фундаментальным решением задачи {(2.1.31)-(2.1.33)}.  удовлетворяет условию -периодичности по ,  и диагональной -периодичности по : .

Нас интересуют также решения задачи {(2.1.31)-(2.1.33)}, которые при  являются ограниченными. В частности, решения обладают таким

свойством, если (2.1.42) удовлетворяет оценке

, , , . (2.1.43)

**Лемма 2.1.2.** *При условии (2.1.4) задача {(2.1.31)-(2.1.33)} имеет единственное решение  вида (2.1.38), причем при дополнительном условии (2.1.43) относительно фундаментального решения (2.1.42) эта задача не имеет -периодических по  решений, кроме тривиального.*

Вернемся к изучению краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения (2.1.7) с условиями

, , (2.1.44)

. (2.1.45)

Решение  задачи (2.1.7), (2.1.44), (2.1.45) состоит из суммы решения  однородного уравнения, удовлетворяющего условиям (2.1.44), (2.1.45) и  неоднородного уравнения с нулевым начальным и с теми же граничными условиями: ,

.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  имеет вид

. (2.1.46)

**Теорема 2.1.2.** *При условиях (2.1.4), (2.1.9) задача (2.1.7), (2.1.44), (2.1.45) однозначно разрешима, причем ее решение представимо соотношением (2.1.46), а при дополнительном условии (2.1.43), задача имеет единственное -периодическое по  решение* .

Б) Многопериодическое решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

На основе доказанных лемм и теорем, приводим соответствующие леммы о многопериодичности решений рассматриваемых задач и основную теорему относительно задачи {(2.1.1)-(2.1.3)}.

Рассмотрим начально-краевую задачу (2.1.10)-(2.1.13) записав в виде

, (2.1.47)

, (2.1.48)

,

. (2.1.49)

Функция  удовлетворяет уравнению (2.1.47) и в силу (2.1.15) имеем решение задачи {(2.1.47)-(2.1.49)}.



. (2.1.50)

**Лемма 2.1.3.** *Задача {(2.1.47)-(2.1.49)} имеет единственное ограниченное решение , представимое в виде (2.1.50) и не имеет многопериодических по  решений, кроме тривиального.*

Рассмотрим неоднородное уравнение

. (2.1.51)

В силу теоремы 2.1.1 имеем решение:

. (2.1.52)

**Лемма 2.1.4.** *При условии (2.1.19) задача (2.1.51), (2.1.48), (2.1.49) для неоднородного уравнения имеет единственное решение в виде суммы , слагаемые которой определяются соотношениями (2.1.50) и (2.1.52).*

**Лемма 2.1.5*.*** *Задача для неоднородного уравнения (2.1.51) с граничным условием (2.1.3), при условии (2.1.19) имеет единственное -периодическое решение .*

Рассмотрим однородное интегро-дифференциальное уравнение

, (2.1.53)

соответствующее уравнению (2.1.1) с входными данными (2.1.4).

Согласно лемме 2.1.2 и замене (2.1.6) определим решение задачи {(2.1.47)-(2.1.49)}



. (2.1.54)

**Лемма 2.1.6.** *При условии (2.1.4) начально-краевая задача для однородного интегро-дифференциального уравнения (2.1.53) с условиями (2.1.48)-(2.1.49), однозначно разрешима и ее решение представимо в виде (2.1.54), а при дополнительном условии (2.1.43) задача не имеет многопериодических решений, кроме нулевого.*

В силу замены (2.1.6) и (2.1.9) наряду с решением (2.1.54) имеем решение неоднородного уравнения (2.1.1) с нулевым начальным и ненулевыми граничными условиями

 (2.1.55)

неоднородного уравнения (2.1.1).

**Теорема 2.1.3.** *При условиях (2.1.4) и (2.1.5) задача {(2.1.1)-(2.1.3)} однозначно разрешима и ее решение определяется в виде суммы , слагаемые которой представляются соотношениями соотственно (2.1.54) и (2.1.55), а при выполнении оценки (2.1.43), уравнение (2.1.1) имеет единственное -периодическое решение вида* .

В заключении отметим, что основные особенности данного исследования связаны с многомерностью времени  и конечной эредитарностью описываемого многопериодического явления.

**2.2 Ограниченное на полуоси по пространственной переменной и многопериодическое по временным переменным решение линейного конечно-эредитарного интегро-дифференциального уравнения параболического типа**

Известно, что многие эредитарные явления биологии и механике описываются различными видами интегро-дифференциальных уравнений. Если состояние явления в момент  определяется совокупностью состояний в моментах промежутка , то такое явление называется эредитарным с конечным периодом эредитарности . В случае , состояние явления в момент  зависит от состояний его в моментах из промежутка . Эредитарность явления может быть связанной также с промежутком , где – некоторая постоянная. Когда эредитарность явления ограничена периодом , то линейное явление с ограниченной эредитарностью может быть описано интегро-дифференциальным уравнением вида

. (2.2.1)

В случае квазилинейного явления эредитарности периода  получим уравнение . В линейном (2.2.1) и квазилинейном уравнениях функции  и  – известные. Такими уравнениями наряду с биологическими явлениями, описываются процессы упругих деформаций, электромагнетизма и других разделов общей динамики, связанных с эредитарным распространением тепловых волн вдоль оси , магнитных, световых, звуковых и др. Распространения такого вида могут носить также диффузионный характер. Тогда уравнение описывающее это явление приобретает вид:

. (2.2.2)

В случае многочастотных волн и флуктуаций, для изучения процессов, необходимо будет ввести переменную , изменяющуюся на векторном поле  и приходится рассмотреть уравнение



. (2.2.3)

Все входные данные этого уравнения предположим периодическими по временным переменным ,  вектор-периода , с несоизмеримыми компонентами , .

Очевидно, что вдоль характеристик  векторного поля оператора  уравнение (2.2.3) обращается в уравнение (2.2.2), а его -периодические по  решения переходят в почти периодические по  решения последнего при . Таким образом, исследование вопроса многопериодических по  решений уравнения (2.2.3) периода  при  имеет важное значение в прикладных задачах теории флуктуаций и колебаний. Заметим, что исследования задач в такой постановке в научной литературе не встречаются. Исследование проведено в индуктивном порядке от частного к общему. В связи с этим поставленная задача изучена для различных линейных случаев уравнений (2.2.3). Ясно, что рассматриваемая задача и её методы изучения тесно связаны с некоторыми прикладными аспектами уравнений математической физики параболического типа и аналитическими вопросами теории многочастотных колебаний. Интересы исследователей к задачам для интегро-дифференциальных уравнений, начатые в конце XIX века не ослабевают и по сей день [133-136]. С различных точек зрения, где эредитарные члены уравнений описываются интегралами вольтеровского или фредгольмовского типов, а динамика явлений характеризуется обыкновенными или частными производными неизвестных, развивая их теорию от уравнений до включений.

А) Многопериодические нули оператора дифференцирования при многопериодическом граничном режиме.

Применив к функции  переменных , ,  оператор дифференцирования  введем в рассмотрение уравнение

, (2.2.4)

где  – оператор дифференцирования по временным переменным  вида , , ; ;  – оператор дифференцирования по . Уравнение с одномерным временем  вида  имеет решение , зависящее от  бегущих волн c параметром , тогда решение уравнения (2.2.4) с многомерным временем  можно представить соотношением

 (2.2.5)

с произвольными дифференцируемыми функциями ,  и  вектор-

переменной . Следовательно, соотношение (2.2.5) представляет собой нули оператора  при , . В дальнейшем будем заниматься ограниченными нулями оператора . Тогда устремив  к нулю из (2.2.5) получим предельную функцию

, (2.2.6)

а при , в случае , имеем

. (2.2.7)

Чтобы обеспечить ограниченность решения (2.2.5) при , в силу (2.2.6) и (2.2.7), необходимо ограниченность функций , ,  и наряду с условием , выполнение условий , .

Основная задача связана с установлением достаточных условий существования -периодических по  вещественно-аналитических при , , , , решений рассматриваемых уравнений. В связи с этим в данном случае предположим, что граничное условие (2.2.6) определяется функцией

, (2.2.8)

где  – класс -периодических вещественно-аналитических при  и непрерывных на замыканиях  функций, причем  – рационально несоизмеримые положительные постоянные,  – ширина полосы  из промежутка .

Из условия (2.2.8) имеем представление функции  в виде ряда Фурье:

, (2.2.9)

где , , , ;  – коэффициенты Фурье, обладающие свойствами  и удовлетворяющие оценке

 (2.2.10)

с нормой , . В силу рациональной

несоизмеримости частот  параметры , ,  становятся постоянными, для того чтобы функция, зависящая от разности  была  и -периодической как по  и так по  необходимо и достаточно, чтобы она была постоянной. При предположении (2.2.8) относительно (2.2.6) решение задачи {(2.2.4), (2.2.6)} ищем в виде ряда

 (2.2.11)

с постоянными коэффициентами  и показателями .

Очевидно, что (2.2.11) есть обобщение функции (2.2.5) в бесконечный ряд, который представляет решение уравнения (2.2.4) в общем виде.

Подставив (2.2.11) и (2.2.9) в граничное условие (2.2.6) формально получим , , ,  – множество неотрицательных целых чисел. Отсюда   при  – множество положительных целых чисел.

Так как нас интересует решение ограниченное по  в , то имеем

, , . (2.2.12)

В случае отрицательности  для определения показателей  имеем уравнение , , . Отсюда находим .

Следовательно, чтобы обеспечить ограниченность решения по  берем корни со знаком плюс:

, , . (2.2.13)

Таким образом, корни (2.2.12) и (2.2.13) оказались взаимно сопряженными. Следовательно, объединив эти формулы имеем

, (2.2.14)

где в эту формулу включен случай , при котором .

Подставив (2.2.14) в (2.2.11) получим решение



, (2.2.15)

Очевидно, что ряд (2.2.15) сходится абсолютно и равномерно при  и , почленно дифференцируем по  (конечное число раз), аналитичность по  при этом сохраняется. При обосновании этого утверждения используется оценка (2.2.10) и , которое следует из неравенства Буняковского-Шварца. Решение (2.2.15) многопериодично по , ограничено при  и единственно в классе ограниченных функций.

**Теорема 2.2.1.** *Задача {(2.2.4), (2.2.6)} при условии (2.2.8) имеет при  единственное вещественно-аналитическое -периодическое по  решение  вида (2.2.15), удовлетворяющее оценке*

, ,  (2.2.16)

*с произвольной постоянной  из промежутка , где * –  *постоянная, независящая от  и .*

Доказательства всех положений теоремы приведены выше. Для его завершения следует убедиться в справедливости оценки (2.2.16).

Действительно, из (2.2.15) имеем ряд

, (2.2.17)

, (2.2.18)

которые удовлетворяют неравенствам

. (2.2.19)

Случай отсутствия ** рассмотрен в [110, стр. 201-202]. Тогда в силу (2.2.10) из (2.2.19) следует оценка

. (2.2.20)

Следовательно, согласно свойствам коэффициентов Фурье аналитических функций [109, стр. 108], функция (2.2.17) с коэффициентами (2.2.18), удовлетворящими оценке (2.2.20), является аналитической и подчиняется ограничению (2.2.16).

Б) Многопериодическое решение линейного уравнения диффузионного типа с многочастотным колебательным источником.

Рассмотрим уравнение

, (2.2.21)

где , функция  представима в виде ряда

 (2.2.22)

с постоянными , , ; ,  причем

, (2.2.23)

где .

Многопериодическое решение уравнения (2.2.21) будем искать в виде

. (2.2.24)

Подставив (2.2.22) и (2.2.24) в (2.2.21) получим . Отсюда имеем уравнения ,  которые имеют -периодические по  решения



, (2.2.25)

так как выполнены условия , где , , . Подставив (2.2.25) в (2.2.24) получим решение

. (2.2.26)

Чтобы обеспечить сходимость ряда (2.2.26) предположим выполненным условие сильной несоизмеримости 

 (2.2.27)

с постоянными  и , либо последовательность  удовлетворяла условию ограниченности снизу

, . (2.2.28)

При выполнении одного из условий (2.2.27) и (2.2.28) совместно с оценкой (2.2.23) ряд (2.2.26) окажется сходящимся абсолютно и равномерно.

Таким образом, различают два вида бегущих волн

, , для которых а)  и б) , . В случае а)  окажутся нулями оператора , а при условии б) . Заметим, что аналогичный результат можно получить, когда вещественная функция  определена при комплексных значениях , . Итак, уравнение (2.2.21) при условиях (2.2.22)-(2.2.23) и при одном из условий (2.2.27) и (2.2.28) допускает единственное -периодическое по  решение (2.2.26) c величинами , .

В целом, уравнение (2.2.21) имеет бесконечное множество -периодических по  решений , состоящих из суммы решения  однородного уравнения (2.2.4) с ,  и решения  неоднородного уравнения (2.2.21) с , :

, (2.2.29)

где  определяется задачей {(2.2.4), (2.2.6)}, а  соотношением (2.2.26) и удовлетворяет граничному условию

. (2.2.30)

Решение (2.2.29) краевой задачи {(2.2.21), (2.2.30)} единственно.

**Теорема 2.2.2.** *При условиях (2.2.22), (2.2.23) и (2.2.27) либо (2.2.28) уравнение (2.2.21) имеет -периодические решения, представимые в виде (2.2.29) со слагаемыми (2.2.15) и (2.2.26).*

Если при некотором  имеем , то из соотношения (2.2.26) исключим соответствующее -слагаемое и введем функцию

 (2.2.31)

с произвольным постоянным вектором , удовлетворяющую уравнению

. (2.2.32)

Тогда на основе (2.2.31) и (2.2.32) решение (2.2.26) можно представить в виде

. (2.2.33)

**Теорема 2.2.3.** *Если  и  при , то при*

*условиях теоремы 2.2.2 уравнение (2.2.21) имеет решение*

*,*

*где  определена формулой (2.2.6), а  – соотношением (2.2.33).*

В) Многопериодические решения линейных однородных интегро-дифференциальных параболических уравнений с конечной эредитарностью.

Рассмотрим -периодическое по  уравнение



,

которое описывает многочастотное явление, распространяющееся вдоль полуоси  1) диффузионное с постоянной , 2) линейно-эредитарное с конечным периодом  и ядром , 3) в каждой точке  оно линейно связано с внешней средой коэффициентом  и 4) протекает со скоростью  определенной дифференцированием по направлению векторного поля оператора . Важным частным случаем процесса является, когда его эредитарность и связь с внешним миром не зависят от . В связи с этим в рассмотрение введем уравнение

. (2.2.34)

где матрицы  и  вещественно-аналитические функции.

Рассмотрим нуль оператор , зависящий от  бегущих волн  вида

 (2.2.35)

с постоянным коэффициентом  и параметром .

Очевидно, что  обладает свойством

,

. (2.2.36)

Далее заменой

 (2.2.37)

уравнение (2.2.34) на основе (2.2.35)-(2.2.36) приводим к уравнению

.

При условиях

. (2.2.38)

можно показать существование единственного решения , удовлетворяющего условию  при  и .

Предположим, что  удовлетворяет оценке

 (2.2.39)

с постоянными  и  при любом .

Тогда решение вида (2.2.37), которое ограничено при ,  и  и удовлетворяет оценке

 (2.2.40)

с некоторыми постоянными  и . Здесь  определяется на основе оценки нуля (2.2.35) оператора . Неравенство (2.2.40) показывает, что при условии (2.2.39) однородное уравнение (2.2.34) имеет только нулевое ограниченное -периодическое по  решение.

**Теорема 2.2.4.** *При условиях (2.2.38) и (2.2.39) уравнение (2.2.34) имеет только нулевое -периодическое по  решение.*

Г) Многопериодическое решение полного линейного неоднородного интегро-дифференциального уравнения параболического типа.

Введем в рассмотрение уравнение



. (2.2.41)

Здесь  – бегущие волны определяемые уравнением

 (2.2.42)

с неизвестными параметрами  и постоянными ,  с условием, когда  следует

, (2.2.43)

функции ,  и  -периодичные по  и , принадлежат классу . Из условий (2.2.42) и (2.2.43) имеем , причем  при . Следовательно, . Отсюда имеем  ; , . Чтобы обеспечить условие (2.2.43) выберем  в виде

. (2.2.44)

Таким образом, в силу последнего соотношения функция

 (2.2.45)

обладает свойством

. (2.2.46)

Можно показать, что

. (2.2.47)

Далее, вводим замену

 (2.2.48)

в уравнение (2.2.41) и в силу (2.2.47) получим



.

Тогда с учетом (2.2.46), сократив на  имеем уравнение



, (2.2.49)

Решение  однородного уравнения, соответствующего уравнению (2.2.49), с начальным условием  удовлетворяет оценке (2.2.40). Тогда нетрудно показать, что неоднородное уравнение (2.2.49) допускает единственное -периодическое по  решение

. (2.2.50)

Далее, подставив (2.2.50) в (2.2.48) получим единственное ограниченное по , -периодическое по  решение

 (2.2.51)

уравнения (2.2.41).

**Теорема 2.2.5.** *Пусть функции* *,  и  принадлежат классу . Тогда при условиях (2.2.43), (2.2.44) и (2.2.40) уравнение (2.2.41) имеет единственное ограниченное по  -периодическое по  решение вида (2.2.51) с сомножителями (2.2.50) и (2.2.45).*

Методом суперпозиции теорему можно обобщить, когда свободный член

 уравнения (2.2.41) можно представить в виде , где  - постоянная из (2.2.44).

**2.3 Многопериодическое по временным переменным и ограниченное по пространственной переменной решение конечно-эредитарной интегро-дифференциальной квазилинейной системы конвективно-диффузионного типа**

Рассматриваются колебания по многомерному времени в системах уравнений, описывающие конечно-эредитарные процессы конвективно-диффузионного характера. Процесс концентрации вещества в воде происходит при её движении, а состояние процесса определяется не только настоящим моментом, но и состояниями за этим моментом с продолжительностью  времени. В воду почти периодично добавляются насыщающие вещества (типа йода). Тем самым, процесс концентрации почти периодично изменяется. Вопрос: устанавливается ли при таких условиях почти периодическая во времени концентрация вещества в движущейся воде (потоке)?

Исследуется проблема такого вида, когда жидкость движется линейно на полуоси и при её круговом движении. В данном исследовании установлены достаточные условия того, что концентрация  многопериодическая, значит, почти периодична по  изменяясь во многомерном времени экспоненциально затухает вдоль оси . В случае линейного кругового движения указаны условия, при которых концентрация колеблется как по многомерному времени , так и по периодическому пути  с такими же периодами как у системы. Оказывается, что указанное состояние концентрации может сохраняться и при нелинейном круговом движении, если выполнены некоторые дополнительные условия. В работе обосновано и такое обстоятельство.

Следует заметить, что здесь в некотором смысле обобщены результаты по периодическому распространению температурных волн в почве на многопериодический случай по многим временным переменным для задачи концентрации в движущейся жидкости по трубе.

В случае кругового движения использован новый разработанный подход [69, стр. 35-36], который касается метода приведения к системе с матричным оператором дифференцирования по направлениям двух линейных векторных полей и нового вида композиции векторных функций, введенной авторами. Благодаря этому подходу стало возможным распространение результатов линейного случая на нелинейный случай.

Если обратить внимание на историю вопроса, то изучение эредитарно-диффузионного процесса относится к началу прошлого века, а колебания процессов с конечно-эредитарностью соответствуют флуктуациям биологической жизни совместно живущих видов, один из которых поедается другим видом [98, стр. 125]. В данной работе рассматривается случай, когда процесс обладает обеими свойствами и, дополнительно, диффузия конвективная, а колебания по времени почти периодичны с конечным частотным базисом, которые следуют из рассматриваемой системы при диагональном изменении временных переменных при .

Теория систем интегро-дифференциальных уравнений построена в фундаментальных трудах Я.В. Быкова, М.И. Иманалиева и др. Развитие этой теории в прямом и косвенном отношении продолжается с различных точек зрения в исследованиях Т.К. Юлдашева, А.М. Самойленко, А.Т. Асановой и др.

А) Распространение многопериодических конвективно-диффузионных волн с экспоненциально убывающей амплитудой вдоль положительной полуоси.

Явление, связанное с потоком, обусловленным диффузией , конвекцией  и внешней силой , описывается системой



 (2.3.1)

где  – искомая вектор-функция,  оператор дифференцирования по  вида ,

 – характеристический интеграл оператора ;  – период эредитарности; ,  – единичная матрица;  – матрица,  – ядро интегрального члена; , , ,  – положительные постоянные;  – заданная -вектор-функция; , .

Концентрация  очищающего вещества в потоке удовлетворяет следующим граничным условиям:

,

. (2.3.2)

Без внешнего воздействия концентрация вещества в потоке описывается однородной многопериодической по  системой



 (2.3.3)

с гладкой -периодической матрицей  и ядром 

, (2.3.4)



. (2.3.5)

В случае отсутствия конвективной диффузии имеем дело с явлением с ограниченной эредитарностью, описываемой системой

. (2.3.6)

При условиях (2.3.4) и (2.3.5) система с ограниченным последействием (2.3.6) допускает матрицант , удовлетворяющий уравнению

, (2.3.7)

где , обладающий свойствами

. (2.3.8)

В систему (2.3.3) вводим замену

, (2.3.9)

где  – произвольная -периодическая гладкая -векторная,  – скалярная функция. Тогда в силу (2.3.7) подстановкой (2.3.9) система (2.3.3) приводится к виду

,

которое эквивалентно скалярному уравнению

 (2.3.10)

в силу  и произвольности функции . Обеспечение быстрого исчезновения концентрации при прохождении короткого расстояния, в соответствии с условием (2.3.2), наводит на мысль об отыскании решения  уравнения (2.3.10) в экспоненциальной форме. В связи с этим положим

. (2.3.11)

Здесь  – произвольная -периодическая дифференцируемая функция, – параметр. Подставив (2.3.11) в уравнение (2.3.10) получим

. (2.3.12)

Таким образом, в силу (2.3.12) из (2.3.11) имеем решение

 (2.3.13)

уравнения (2.3.10) с оценкой

. (2.3.14)

Далее, объединив (2.3.9) и (2.3.13) получим решение

, (2.3.15)

где – гладкая -периодическая -вектор-функция.

В начальный момент  концентрация очищающего вещества описывается кривой

, , . (2.3.16)

Тем самым, концентрация , заданная соотношением (2.3.15) является решением конвективно-диффузионной задачи (2.3.3), (2.3.16). Ясно, что в неоднородных системах многопериодические колебания концентрации  можно вызвать, обеспечив амплитуду колебания возмущающей силы  по времени  в виде (2.3.16). Очевидно, что без очищающих веществ из вне концентрация растет со временем согласно закону (2.3.13). Многопериодическое воздействие очищающими веществами по временам может привести систему к периодическим колебаниям по ним.

Далее, исследуется обстоятельство такого характера.

Рассмотрим случай, когда амплитуда колебаний возмущающей силы  экспоненциально убывает с ростом  и имеет вид

. (2.3.17)

Относительно матрицанта  однородной системы (2.3.6) предположим выполненным условие экспоненциальной устойчивости

 (2.3.18)

с положительными постоянными  и , – знак одной из известных матричных норм.

Допустим, что между показателем устойчивости , коэффициентами диффузии , конвекции  и  существует связь вида

. (2.3.19)

Тогда при условиях (2.3.4), (2.3.5), (2.3.17)-(2.3.19), непосредственной проверкой, на основе (2.3.7), (2.3.8), (2.3.10) и (2.3.14) легко убеждаемся в равномерной сходимости несобственного интеграла

. (2.3.20)

Таким образом, полученная вектор-функция является -периодическим по  решением линейной системы (2.3.1), удовлетворяющим оценке

, (2.3.21)

где .

**Теорема 2.3.1.** *При условиях (2.3.4), (2.3.5), (2.3.17)-(2.3.19) неоднородная система (2.3.1) имеет единственное -периодическое по  решение , представимое в виде (2.3.20) и монотонно убывающее по экспоненциальному закону (2.3.21) при фиксированном  и ограниченное*

*величиной .*

Доказательство. При условиях (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.17), оценка матрицанта (2.3.18) системы (2.3.6) и решения (2.3.13) c (2.3.14) уравнения (2.3.10) позволяют получить неравенство

, (2.3.22)

которое при условии (2.3.19) гарантирует сходимость несобственного интеграла (2.3.20).

Так как  скалярная, то подинтегральное выражение   в силу тождеств (2.3.7) и (2.3.10) с учетом  удовлетворяет однородной системе (2.3.3), а дифференцирование по верхнему пределу  приводит к замене  на  в этом выражении и получению свободного члена . Тем самым, убеждаемся в том, что вектор-функция (2.3.20) удовлетворяет неоднородной системе (2.3.1).

Периодичность решения (2.3.20) по  периода  следует из -периодичности матриц  и вектора , в силу свойств (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.17). Чтобы убедиться в -периодичности его по  после сдвига  на  следует произвести линейную замену .

Свойства, касающиеся переменной  следуют из представления (2.3.20) и оценки (2.3.22). В частности, имеем оценку (2.3.21).

Вопросы гладкости решения (2.3.20) по всем переменным следуют из гладкости исходных данных (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.17) в соответствии с общей теорией уравнений в частных производных, причем интегральный член системы не вызывает особого затруднения.

Ограниченность решения по  и многопериодичность по  обеспечивает единственность этого решения, поскольку таковым решением соответствующей однородной системы является только нулевое.

Б) Распространение линейных многопериодических конвективно-диффузионных волн вдоль замкнутой линии.

Теперь предположим, что внешняя сила  является сужением в подпространство , многопериодической по всем переменным функции ,  и обладающей свойствами

. (2.3.23)

Следовательно, имеем

. (2.3.24)

Такое воздействие силы возможно, когда движение совершается по окружности длины , либо по замкнутой линии такой же длины.

Поставим вопрос об установлении условий существования ограниченных по  и квазипериодических по  решений уравнения (2.3.1) при условиях (2.3.23) и (2.3.24).

С целью решения этой задачи, положив  уравнение (2.3.1) представим в виде системы уравнений

 (2.3.25)

Систему (2.3.25) представим через вектор-функцию  с помощью  -матриц

 (2.3.26)

в виде единого векторного уравнения



 (2.3.27)

где -вектор-функция, нулевой -вектор, нулевая -матрица, единичная -матрица, .

Далее, имеем характеристические уравнения

 (2.3.28)

где скалярная величина,  – единичный множитель указывает на то, что для -уравнений характеристики определяются одним скалярным уравнением . Таким образом, из системы (2.3.28) имеем характеристики

, . (2.3.29)

Эти две группы характеристик, определенных номерами  и  соответствуют двум векторным уравнениям системы (2.3.25). В целом, (2.3.28) есть система характеристических уравнений для (2.3.27), а (2.3.29) – их характеристики. Уравнение (2.3.27), (2.3.26) называется уравнением блочного вида с матричным оператором дифференцирования, причем каждая строка этой системы, записываемая в скалярной форме, в соответствии с (2.3.29), имеет свою характеристику.

Если в силу (2.3.29) примем обозначения для характеристик  вида



 (2.3.30)

то вдоль них система (2.3.27) обращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений









 (2.3.31)

где  для первого уравнения системы (2.3.25) и , ,  для второго уравнения этой системы.

Таким образом, система уравнений в частных производных (2.3.25) или

(2.3.27)-(2.3.26) методом характеристик сведена к системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (2.3.31), определенной вдоль (2.3.30).

Для переменной , изменяющейся между  и , разрешив каждую из систем  относительно  и , имеем первые интегралы характеристических систем (2.3.28) в виде

 (2.3.32)

Подставив (2.3.32) в систему (2.3.31) можно представить ее в виде

,







, (2.3.33)

где  изменяется между  и , а переменные  ведут себя как параметры.

Характеристики  согласно (2.3.29)-(2.3.30) линейные относительно . Следовательно, обладают свойствами , , где , .

Тогда для  имеем

, . (2.3.34)

Другая группа характеристик , в силу (2.3.29) и (2.3.30), имеет свойства : , 

, где , , .

Тогда, положив , ,  эти свойства запишем в виде

, (2.3.35)

где .

Следовательно, , в силу (2.3.34) и (2.3.35), обладает свойствами

. (2.3.36)

В исследованиях уравнений в частных производных первого порядка большую роль играют композиции операторов. В нашем случае композиции связаны с аргументом , а другие аргументы  и  не имеют отношение к композиции. Следовательно, выделив эти свойства, функцию  можно еще представить в форме . Тогда композицию функции  и  представим в виде . Аналогично при  имеем . Такие композиционные обозначения важны, когда одна та же переменная в разных уравнениях системы рассматривается вдоль разных характеристик оператора дифференцирования. Интегрируя систему (2.3.33) по  от  до  имеем интегральные уравнения

,





, (2.3.37)

где , причем композиция двух вектор-функций  и  определяется по правилу

 (2.3.38)

Таким образом, в силу (2.3.36)-(2.3.38) матричное уравнение (2.3.27), а следовательно, (2.3.1) имеет следующее эквивалентное интегральное уравнение





 (2.3.39)

где , так как , причем в силу (2.3.36) легко проверяется -периодичность его правой части. В частности, исходя из (2.3.39), методом последовательных приближений, можно построить матрицант  на основе интегрального уравнения

,

где , который в силу (2.3.36) и -периодичности  и  по  является -периодическим и обладает гладкостью первого порядка по  и .

С помощью матрицанта решение интегрального уравнения (2.3.39) можно представить в виде

. (2.3.40)

Справедливость соотношения (2.3.40) проверяется непосредственной проверкой, что оно является решением уравнения (2.3.27).

Далее, предположим, что матрицант удовлетворяет условию

 (2.3.41)

с постоянными  и .

Отметим, что в силу условия (2.3.41) однородное матричное уравнение, соответсвующее неоднородному уравнению (2.3.39), имеет единственное нулевое ограниченное по  решение.

Так как матрицы  и  удовлетворяют однородному уравнению и при  обращаются в единичную матрицу, то в силу свойства единственности имеем . Также заметим, что из (2.3.30)

следует . Тогда для  имеем .

Теперь введем в рассмотрение вектор-функцию

, (2.3.42)

где несобственный интеграл сходится абсолютно равномерно в силу условия

(2.3.41) и который по  обладает свойством гладкости, в силу условия (2.3.23), матрицанта и характеристики.

Из -периодичности по  матрицанта  и  и свойства (2.3.36) характеристики  имеем -периодичность по  вектор-функции (2.3.42). Она также периодична и по . В этом убеждаемся заменой  в . Проверкой можно убедиться, что (2.3.42) удовлетворяет уравнению (2.3.27). Таким образом, доказана теорема.

**Теорема 2.3.2.** *При условиях (2.3.4), (2.3.5), (2.3.23) и (2.3.41) уравнение (2.3.1) имеет единственное -периодическое  решение вида (2.3.42).*

Единственность является следствием условия (2.3.41), из которого в силу структуры (2.3.40) решения следует единственное нулевоe ограниченное решение соответствующего однородного уравнения.

В) Нелинейные конвективно-диффузионные многопериодические колебания вдоль замкнутой линии.

Рассмотрим квазилинейное уравнение



. (2.3.43)

Все входные данные уравнения (2.3.43) имеют прежний смысл, кроме нелинейного члена .

Полученный теоремой 2.3.2 результат нетрудно распространить на квазилинейный случай, когда вместо  берем нелинейную вектор-функцию , являющейся сужением периодической по , -периодической по  функции , определенной при  в области .

Таким образом, для  выполнено условие

. (2.3.44)

Здесь -вектор с единичными

координатами. Приводим следствия условия (2.3.44) вида

, (2.3.45)

, (2.3.46)

где .

Предполагая выполненным условие (2.3.41) в рассмотрение введем интегральное уравнение

 (2.3.47)

в пространстве -периодических вектор-функций ,

ограниченных по норме  числом , где -вектор-функция, 0-нулевой вектор.

Далее, предположим, что параметры  и  связаны неравенством

, (2.3.48)

откуда следует неравенство

. (2.3.49)

В силу условий (2.3.44), (2.3.45) и (2.3.48) и их следствий (2.3.46) и (2.3.49), методом принципа неподвижных точек, доказывается нижеследующая теорема. Принцип общеизвестен, поэтому доказательство опускаем. Из (2.3.48) следует, что пространство  правой частью уравнения (2.3.47) отображается в себя, а ее сжатость следует из неравенства (2.3.49).

**Теорема 2.3.3.** *При условиях (2.3.4), (2.3.5), (2.3.41), (2.3.44), (2.3.45) и (2.3.48) уравнение (2.3.43) допускает единственное -периодическое по  решение.*

Доказательство. Исходное уравнение (2.3.43) приводим к уравнению вида (2.3.27), где в данном случае, . Все требования, связанные с (2.3.44), (2.3.49) удовлетворяются, если только этими свойствами обладает , а следовательно, . Поэтому, при условиях теоремы 2.3.3 уравнение (2.3.47) допускает единственное -периодическое по  решение, следовательно, в силу эквивалентности (2.3.43) с нелинейным аналогом уравнения (2.3.27), уравнение (2.3.43) имеет единственное -периодическое по  решение.

В заключении, отметим, что теорему 2.3.3 можно обобщить и в случае, когда матрицы  и  -периодично зависят от .

**Заключение**

**Краткие выводы по результатам диссертационных исследований.** В диссертации исследованы явления, обладающие тремя важными свойствами: многомерной колебательности, наследственности и диффузионности.

Исследования первого раздела посвящены проблемам существования многопериодических колебаний в системах, когда состояния связаны с наследственностью ограниченного периода. Многопериодичность процесса изучена на основе метода, идея которого заключается в переходе от обыкновенных дифференциальных систем, описывающих процесс к системам уравнений в частных производных первого порядка, представляемым в операторах дифференцирования по направлениям векторных полей. Общие вопросы систем такого характера ранее не изучались. Следовательно, прежде чем исследовать основные вопросы, приходилось разработать общие теории 1) колебательных систем с интегральным членом конечной эредитарности и 2) расширенных пространственной переменной систем такого вида, которые относятся к параболическому типу. По общей теории изучались вопросы а) существования решений начальных задач для рассматриваемых систем, б) свойства единственности решений, и в) построение решений с их представлениями. Исследовались основные проблемы, касающиеся:

1. условий существования, единственности и построения многопериодично колебательных решений по временным переменным и решений двухточечных краевых задач по одной из временных переменных для систем, рассматриваемых в первом разделе;

2. условий установления многопериодических по временным и ограниченным по пространственным переменным решений краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа, когда движения совершаются вдоль конечного отрезка и полуоси в линейном случае и полуоси в квазилинейном конвективно-диффузионном случае.

Заметим, что задача многопериодичности решений является также краевой задачей, но она относится к более сложному ее типу. Следовательно, исследование, в целом, посвящено достаточно серьезным и ранее не исследованным видам краевых задач как по временным, так и по пространственным переменным, от которых зависят рассматриваемые явления. Несмотря на такие трудности получены следующие научные результаты:

- достаточные условия однозначной разрешимости начальной задачи для линейных -систем интегро-дифференциальных уравнений конечной эредитарности с многопериодическими коэффициентами и свободными членами и установлены условия существования и единственности многопериодического решения этих систем. Даны их интегральные представления. Эти результаты освещены в подразделах 1.1-1.2.

- результаты, полученные в линейном случае распространены на квазилинейные случаи систем в подразделе 1.3 на основе принципа

неподвижных точек;

- установлены достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи по одной из временных переменных для линейных и нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений с заданным оператором дифференцирования приведены в подразделе 1.4;

- однозначная разрешимость начально-краевых задач в случае конечного отрезка для линейных интегро-дифференциальных систем конечной эредитарности с оператором дифференцирования и многопериодичность решения этой задачи по временным переменным установлены в подразделе 2.1;

- краевая задача в случае полуоси для таких же линейных систем решении в классе ограниченных функций с установлением многопериодичности ее решения по временным переменным в подразделе 2.2;

- в случае конвективной диффузионной задачи получены достаточные условия существования единственного многопериодического решения как для линейных систем, так и для квазилинейных конечно-эредитарных интегро-дифференциальных уравнений.

При рассмотрении всех этих задач для названных систем предварительно решались начальные задачи, устанавливалась единственность решения задачи, выводились интегральные представления решений в линейных случаях.

Заключая, отметим, что результаты решенных задач и их методы исследования имеют достаточно широкую перспективу распространения их на решение таких проблем для родственных систем уравнений: интегральных, разностных, дифференциальных, гиперболического и эллиптического типов и другие.

**Оценка полноты решения поставленных задач.** В работе впервые исследованы начально-краевые задачи и многопериодические задачи конечно-эредитарных систем интегро-дифференциальных уравнений с оператором дифференцирования по векторному полю и установлены условия многопериодических по временным и ограниченных по пространственным переменным решений краевых задач для конечно-эредитарных интегро-дифференциальных систем уравнений конвективно-диффузионного типа.

**Разработка рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов.** Результаты исследования имеют теоретическое значение и могут быть использованы при установлении многочастотных колебаний в интегро-дифференциальных системах, описывающих физико-механические и технические колебательные процессы, а также при организации элективных курсов для студентов физико-математических и инженерных специальностей.

**Оценка научного уровня выполненной работы в сравнении с лучшими достижениями в данной области.** Результаты выполненной научной работы опубликованы в журналах, рекомендованных Комитетом по обеспечению качества в сфере науки и высшего образования МНВО РК, в материалах международных научных конференций и в журнале, индексируемом в базе Scopus.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Volterra V. Sur les equations integro-differentielles et leurs applications // Acta Math. – 1912. – Vol. 35. – P. 295–356.
2. Volterra V. Vibrazioni elastiche nel caso della eredita // Rend. R. Accad. Dei Lincel. – 1912. – Vol. 21, №5. – P. 3–12.
3. Volterra V. Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentielles. – Paris, 1913. – 165 p.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 303 с.
6. Evans G.C. Sull equazione integro-dirrerenziale di tipo parabolico // Rend.R. Accad. Dei Lincel. – 1912. – Vol. 21, №5. – P. 25-31.
7. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Труды ЦАГИ. – 1934. – № 190. – С. 1-25.
8. Соболев С.Л. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений для нескольких независимых переменных. I // Изв. АН СССР. Cерия матем. – 1937. – №4. – C. 515-550.
9. Соболев С.Л. Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений с несколькими переменными. II // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1938. – №1. – С. 61-90.
10. Назаров Н.Н. Об одном классе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1947. – Т. 58. – С. 741-744.
11. Васильев В.В. К решению линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и вырожденным ядром // Прикладная математика и механика. – 1949. – №2. – С. 207-208.
12. Васильев В.В. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1955. – Т. 100. – С. 849-852.
13. Владимиров В.С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Изв. АН СССР. Cерия матем. – 1957. – Т. 21. – C. 3-52.
14. Владимиров В.С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц // Изв. АН СССР. Серия матем. – 1957. – Т. 21. – С. 681-710.
15. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Кирг. ун-т, 1957. – 327 c.
16. Быков Я.В. О некоторых методах построения решений интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Изд-во АН Кирг. ССР, 1961. – 107 c.
17. Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1972. – 356 c.
18. Талипова Л.А. Ветвление решений периодической краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра // Труды Фрунз. политехн. института. – 1975. – №88. – С. 92-99.
19. Ведь Ю.А. Об одном методе изучения однозначной разрешимости задач Коши для систем линейных однородных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Труды Фрунзенского политехнического института. – 1974. – № 76. – С. 19-24.
20. Шишкин Г.А. Решение одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами с помощью интегральных рядов // Дальневосточный математический сборник. – 1972. – №3. – С. 73-82.
21. Ткач А.Б. Чиссленно-аналитический метод исследования периодических решений интегро-дифференциальных уравнений с частными производными с импульсным воздействием // Нелинейные колебания. – Киев, 2005. – Т.8, №1. – С. 125-131.
22. Боташев А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 87 с.
23. Кривошеин Л.Е. Приближенные методы решения обыкновенных линейных интегро-дифференциальных уравнений. – Фрунзе: АН Кирг. ССР, 1962. – 184 c.
24. Адонц М.Т. Об одном классе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // ДАН АзССР. – 1954. – Т. 10, №3. – С. 167-174.
25. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 c.
26. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Издательство «Фан», 1974. – 214 с.
27. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
28. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 278 с.
29. Байнов Д.Д., Самойленко А.М., Сарафова Г.Х. Существование ограниченных решений одного класса интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Nonlinear Vibration Problems. – 1979. – Т. 19. – С. 127-135.
30. Grossman S. Periodicite finale des systemes integro-differentiels de Volterra // Rev. Roum. Math. Pures et Appl. – 1973. – Vol. 18. – P. 665-671.
31. Ведь Ю.А. Асимптотические оценки решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Изв. АН. Кирг. ССР. – 1979. – №1. – С. 9-16.
32. Cushing J.M. Bifurcation of periodic solution of integro-differential systems with applications to time delay models in population dynamics // SIAM Journal Appl. Math. – 1977. – Vol. 33. – P. 640-654.
33. Rascle M. Su rune equation integro-differentielle non lineaire issue de la Biologie // Journal Different. Equation. – 1979. Vol. 32. – P. 420-453.
34. Schiaffino A. On a Volterra diffusion system // Boll. Unlone Mat. Ital. – 1979. – Vol. 16. – P. 610-616.
35. Burton T.A. An integro-differential equation // Proc. Amer. Math. Soc., – 1980. – Vol. 79, №3. – P. 393-399.
36. Бранков Г. Основы биомеханики. – М.: Мир, 1981. – 255 c.
37. Гроссман С., Тернер Дж. Математика для биологов. – М.: Высшая школа, 1983. – 383 c.
38. Беллман Р. Математические методы в медицине. – М.: Мир, 1987. – 200 c.
39. Марчук Г.И. Математические модели в иммуннологии. – М.: Наука, 1988. – 239 c.
40. Urabe M. Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems // Funkcialaj Ekvacioj. – 1972. – V.15. – P. 75-100.
41. Sibuja Y. Some global properties of matrices of functions of one variable //Mathematische Annalen. – 1965. – Volume161, Issue 1 – P.67-77.
42. Vejvoda О., Herrmann L., Lovicar V., Sova M., Straskaba I. Partial differential equations: Time-periodic solutions. – Springer Netherlands, 1982. –358 p.
43. Štědrý M., Vejvoda O. Time periodic solutions of a one-dimensional two-phase stefan problem // Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1981. – Vol.127. – P.67-78.
44. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.
45. Пуанкаре А. Избранные труды. Т.І. – М.: Наука, 1974. – 772 с.
46. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
47. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
48. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.
49. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
50. Колмогоров А.Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. – 1954. – Т.96, №4. – С. 527-530.
51. Арнольд В.И. Малые знаменатели I: Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – Т. 25, №1. – С. 21-86.
52. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. – М.: Мир, 1973. – 168 с.
53. Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости. – Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаотич. динамика», 2001. – 448 с.
54. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
55. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.
56. Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 c.
57. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979. – 211 с.
58. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 c.
59. Умбетжанов Д.У. О почти многопериодическом решении одного интегро-дифференциального уравнения типа переноса // Украинский математический журнал. – 1989. – №1. – С. 79-85.
60. Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О почти многопериодическом решении одной счетной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Вопросы математики и прикладной математики. КазГУ. – Алма-Ата. – 1977. – С. 102-108.
61. Сартабанов Ж.А. Многопериодические колебания в некоторых дифференциальных и функционально-разностных системах: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-матем.наук: 01.01.02. – Алматы, Институт теор. и прикл.матем. НАН РК, 1996. – 31 с.
62. Сартабанов Ж.А. Многопериодическое решение одной системы интегро-дифференциальных уравнений // Известия АН КазССР, Серия физ.-мат. – 1987. – №5. – С.51-56.
63. Сартабанов Ж.А. Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. – 1989. – Т. 41, №1. – C. 125-130.
64. Сартабанов Ж.А. Периодты функциялар және кейбір қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері. Алматы: Республикалық баспа кабинеті. 2001. – 108 б.
65. Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. – Актобе: Принт А, 2007. – 168 с.
66. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем. – Уральск: Ред. изд. центр ЗКГУ, 2013. – 167 с.
67. Kulzhumiyeva А.А., Sartabanov Zh.А. On multiperiodic integrals of a linear system with the differentiation operator in the direction of the main diagonal in the space of independent variables // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 8, №1. – P. 67-75.
68. Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.А. On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field // Eurasian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 12, №1. – P. 68-81.
69. Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 12, №1. – P. 32-48.
70. Умбетжанов Д.У., Бержанов А.Б. О существовании почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Известия АН КазССР. Сер. физ.-матем. – 1983, – №5. – C. 11-15.
71. Бержанов А.Б., Сартабанов Ж.А., Сарсенбай А.С. Многопериодическое решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа переноса // Известия МОН и НАН РК. Серия физ.-матем. – 2002. – №5. – С. 33-40.
72. Бержанов А.Б. Исследование многопериодических по части переменных решений некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-матем.наук: 01.01.02. – Астана, ЕНУ, 2010. – 34 с.
73. Berzhanov A.B., Kurmangaliev E.K. Solution of a countable system of quasilinear partial differential equations multiperiodic in a part of variables // Ukrainian Mathematical Journal. – 2009. – Vol. 61, №2. – P. 336-345.
74. Бержанов А.Б. О многопериодическом по части переменных решении одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной Академии Наук, Нальчик. – 2007. – Т. 9, №2. – С. 26-29.
75. Абдикаликова Г.А. Построение почти периодического решения одной квазилинейной параболической системы // Известия МОН НАН РК. Сер.физ.-матем. – 2001. – №3. – C. 3-8.
76. Kuo-Shou Chiu, Periodic Solutions for Nonlinear Integro-Differential Systems with Piecewise Constant Argument. The Scientic World Journal Volume 2014, Article ID 514854.
77. Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С. Конструктивная теория краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия матем., мех., инф. – 2015. – №4(87). – C. 3-26.
78. Yuldashev T.K., Apakov Yu.P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii J. Math. – 2021. – Vol. 42, №6. – P. 1317–1327.
79. Yuldashev T.K., Eshkuvatov Yu.F. On a Fredholm type integro-differential equations of fifth order with degenerate kernel // Journal of Contemporary Applied Mathematics. – 2022. – Vol. 12, №1. – P. 27–34.
80. Gustavo L.V. Partial differential equations of first order and their applications to Physics / 2nd edition. – Mexico: University of Guadalajara, 2012. – 200 p.
81. Chattouh A. Numerical solution for a class of parabolic integro-differential equations subject to integral boundary conditions // Arabian Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 11, №2. – P. 213-225.
82. Банг Н. Д., Чистяков В. Ф., Чистякова Е. В.. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений // Изв. Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2015. – Т. 11. – С. 13-27.
83. Raad N. Butris, Ava Sh. Rafeeq. Periodic Solution for Nonlinear System of Integro-differential Equations with Parameter // International Journal Of Advancement In Engineering Technology, Management and Applied Science (IJAETMAS). – 2017. – Vol. 4, №4. – P. 40-49.
84. Saeedi L., Tari A., Momeni H. Masuleh. Numerical solution of a class of the nonlinear volterra integro-differential equations // J. Appl. Math. & Informatics. – 2013. – Vol. 31, №1-2. – P. 65-77.
85. Kerimbekov A., Abdyldaeva E. On the solvability of a nonlinear tracking problem under boundary control for the elastic oscillations described by Fredholm integro-differential equations // IFIP Advances in Information and Communication Technology. – 2016. – Vol. 494. – P. 312-321.
86. Шишкин Г.А.. Исследование и решение начальных задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра нейтрального типа // Вестник Бурятского государственного университета. – 2009. – С. 94-98.
87. Сергеев В.С. Вынужденные предельно периодические движения в системах с последействием, описываемых интегродифференциальными уравнениями типа Вольтерры // Труды Московского физико-технического института. – 2017. – Т. 9, № 3. – С. 57-65.
88. Самойленко А.М., Нуржанов О.Д. Метод Бубнова – Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // Дифференц. уравнения. – 1979. – №15. – C. 1503-1517.
89. Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. – Фрунзе: Илим, 1974. – 352 c.
90. Boichuk A.A., Chuiko S.M. Periodic solution of autonomous systems with pulse influence in critical cases // Ukrainian Mathematical Journal. – 1995. – Vol.47, №11. – P. 1478-1484.
91. Stanzhytskyi A.N., Samoǐlenko E.A. Coefficient conditions for existence of an optimal control for systems of differential equations // Siberian Math. Journal. – 2014. – Vol. 55, №1. – P. 156-170.
92. Зарипов С.К., Раджабов Н. Решения одного класса модельных интегродифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с сингулярным ядром // Доклады академии наук Республики Таджикистан. – 2017. – Т. 60, №3-4. – С.118-125.
93. Асанова А. Т. [Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике](http://www.mathnet.ru/rus/ivm9233) // Известия Вузов. Математика. – 2017. – №5. – C. 11-25.
94. Jenaliyev M.T., Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Tuleutaeva Zh.M. On the solution to a two-dimensional heat conduction problem in a degenerate domain // Eurasian Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 11, №3. – P. 89-94.
95. [Kalybay A.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6507391273), [Oinarov R.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56046185200), [Temirkhanova A.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=35485863600) [Integral operators with two variable integration limits on the cone of monotone functions](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-85065079057&origin=resultslist&sort=plf-f) //[Journal of Mathematical Inequalities](https://www.scopus.com/sourceid/19900191893?origin=resultslist). – 2019. – Vol. 13, № 1. – P. 1-16.
96. Виграненко Т.И. О задаче Коши для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Успехи математических наук. – 1955. –№2(64). – С. 147-152.
97. Филатов А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Акад. наук Узб. ССР; Ин-т кибернетики с вычисл. центром. – Ташкент: Фан, 1971. – 278 с.
98. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 c.
99. Шароглазов В.С. Об однозначной разрешимости краевых задач для линейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. – В книге: Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск, 1978. – №5. – С. 111-119.
100. Пархимович И.В. Многоточечные краевые задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений в классе гладких функций // Дифференциальные уравнения. – 1972. – №8. – С. 549-552.
101. Нахушев А.М. Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференциальные уравнения. – 1979. – Т. 15. – С. 96-105.
102. Яковлева Г.Ф. Об условиях существования периодических решений линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Учен. зап. физ.-мат. фак-та Кирг. уни-та. – 1957. – №4. – C. 111-127.
103. Боташев А.И., Талипова Л.А. Условия существования периодических решений нелинейных систем интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра в некритическом случае // Известия АН Кирг. ССР. – 1974. – №1. – C. 8-11.
104. Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Об однозначной разрешимости краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром // Нелiнiйнi коливання. – 2015. – Т. 18, № 4. – С. 489-506.
105. Asanova A.T., Dzhumabaev D.S. Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane // Ukrainian Mathematical Journal. – 2004. – Vol. 56, №4. – P. 682-694.
106. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
107. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. – Киев: ВУАН, 1934. – 109 с.
108. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматлит, 1963. – 407 с.
109. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. – 304 с.
110. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
111. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
112. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1968. – 592 с.
113. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1985. – 383 с.
114. Sartabanov Zh.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with -operator and -period of hereditarity // Eurasian Mathematical Journal. – 2022. – Vol. 13, №1. – P. 86-100.
115. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М., Абдикаликова Г.А. Многопериодическое решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа // Известия Вузов. Математика. – 2022. – №8. – С.56-68.
116. Абдикаликова Г.А., Айтенова Г.М., Сартабанов Ж.А. Многопериодическое решение системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Вестник КазНПУ им. Абая. Сер. физ.-матем. – 2018. – Т. 63, №3. – С. 5-11.
117. Aitenova G.M., Sartabanov Zh.A., Abdikalikova G.A., Kerimbekov A. Bounded and multiperiodic solutions of the system of partial integro-differential equations // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. – 2019. – Vol. 95, №3. – P. 8-18.
118. Sartabanov Zh.A., Aitenova G.M. Multiperiodic solutions of linear systems integro-differential equations with -operator and - period of hereditary // News of the National Academy of Sciences of the RK. Physico-Mathematical series. – 2019. – Vol. 6, № 328. – P. 106-122.
119. Абдикаликова Г.А., Айтенова Г.М., Сартабанов Ж.А. Об одном подходе исследования многопериодического решения интегро-дифференциального уравнения // Материалы VIII Международной научной конференции “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”. – Актобе. – 2018. – С. 3-8.
120. Sartabanov Zh.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of one system integro-differential in partial differential equations // The 8th International Conference on “Mathematical Analysis, Differential Equation & Applications MADEA 8”. – Cholpon-Ata (Issyk-Kul), Kyrgyz Republic. – 2018. – P. 15-16.
121. Sartabanov Zh.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of the nonlinear integro-differential equation with an operator of differentiation along straights // International scientific conference “Theoretical and applied questions of mathematics, mechanics and computer science”. – Karagandy. – 2019. – P. 46-47.
122. Sartabanov Zh.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with -operator and -hereditarity period // International Conference “Actual Problems of Analysis, Differential Equations and Algebra” (EMJ-2019). – Nur-Sultan. – 2019. – P. 133-135.
123. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М., Абдикаликова Г.А. Многопериодические решения интегро-дифференциальных уравнений с - периодом эредитарности // Традиционная международная апрельская математическая конференция. Тезисы докладов. – Алматы. – 2020. – С. 182-184.
124. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М. Многопериодическое решение линейного интегро-дифференциального уравнения параболического типа // Традиционная международная апрельская математическая конференция. Тезисы докладов. – Алматы. – 2021. – С.53-54.
125. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М. Ограниченные вдоль линий многопериодические колебания в некоторых интегро-дифференциальных системах конвективно-диффузионного типа // Сателлитная конференция Международной конференции “International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM) – 2022”. – Бишкек. – 2022. – C. 227-229.
126. Айтенова Г.М., Сартабанов Ж.А. Ограниченное на полуоси многопериодическое решение одного линейного интегро-дифференциального уравнения с конечной эредитарностью // Международная научная конференция “Актуальные задачи математики, механики и информатики”. – Караганда. – 2022. – С. 103-104.
127. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М. Однозначная разрешимость краевой задачи для квазилинейных систем интегро-дифференциальных уравнений в случае конечной эредитарности с оператором дифференцирования по векторному полю // The international conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. – Самарканд. – 2022. – P. 300-301.
128. Сартабанов Ж.А., Айтенова Г.М., Абдикаликова Г.А. Построение многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Материалы IX международной научной конференции “Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры”. – Актобе. – 2022. – Т.1. – С. 210-215.
129. Ros Oton X. Integro-differential equations: Regularity theory and Pohozaev identities // Universitat Politecnica de Catalunya. Barcelona, 2014. – 301 p
130. Lakshmikantham V., Rama Mohana Rao. Theory of integro-differential equations. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1995. – 355 p.
131. Власов В.В., Раутиан Н.А. Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Известия вузов. Математика. – 2012. – №6. – C. 56-60.
132. Джангвеладзе Т.А. Об одном нелинейном интегро-дифференциальном уравнении параболического типа // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, №1. – C. 41-46.
133. Imran A., Imran Kh. Numerical Solution of Partial Integrodifferential Equations of Diffusion Type. Hindawi Mathematical Problems in Engineering Volume 2017, Article ID 2853679, 11 pages.
134. Ilolov M.I. Fractional linear Volterra integro-differential equations in Banach spaces // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz. – 2019, – Vol. 173. – P. 58– 64.
135. Raad N. Butris, Hewa S. Faris. Periodic solutions for nonlinear systems of multiple integro-integral differential equations of (V F) and (F V) type with isolated singular kernels // General Letters in Mathematics (GLM). Gen. Lett. Math. – 2020. – № 9 (2). – P. 106-128.
136. Akram S., Nawaz A., Kalsoon H., Idreea M., Chu Yu-M. Existence of multiple periodic solutions for cubic nonautonomous differential equation // Mathematical Problems in Engineering. – 2020. – Vol. 2020. –P. 1-14.

**ПРИЛОЖЕНИЕ**

**Пример 1.**

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение



с оператором дифференцирования .



Пусть ; ; ; .

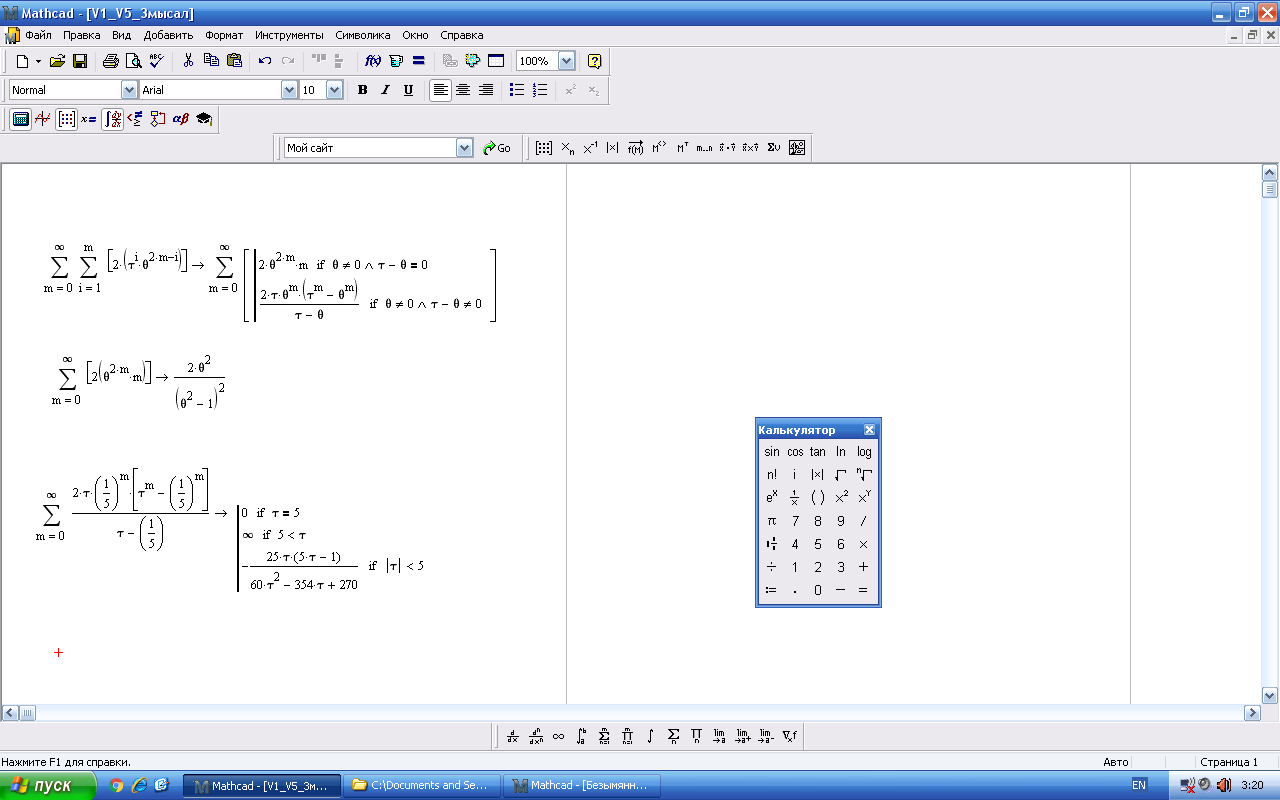
Матрицант системы

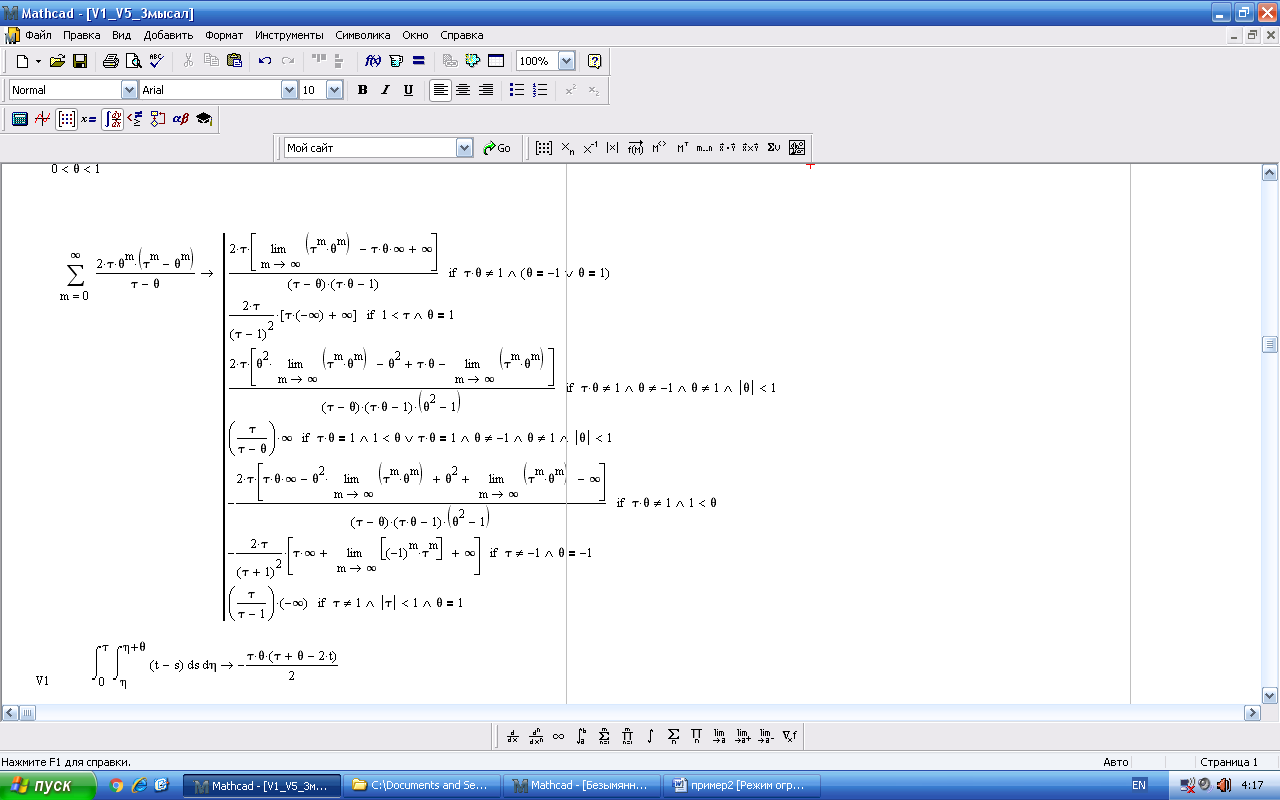


 где .

1) 

2) ,, 









.

**Пример 2.**

Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение



с оператором дифференцирования .

Пусть ; ; ; .





1) 

2) ,, 







