Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК 517.91 На правах рукописи

**АЙМАЛ РАСА ГУЛАМ ХАЗРАТ**

Дифференциальные уравнения на графах

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание степени

доктор философии (PhD)

Научные консультанты

доктор физико-математических наук,

профессор

Б.Е. Кангужин

доктор физико-математических наук,

профессор

З.Ю. Фазуллин

Республика Казахстан

Алматы, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| **ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**………………………………….…. | 4 |
| **ВВЕДЕНИЕ**…………………………………………………………………... | 5 |
| **1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛАПЛАСИАНЫ**………………………………. | 8 |
| 1.1 Дискретные графы ……………………………………………………….. | 8 |
| 1.2. Обобщенные лапласианы…………………………...................................  1.3 Примеры........................................................................................................ | 9  11 |
| 1.4 Операторы, связанные с пространствами вершин…................................ | 14 |
| 1.5 Метрические графы, квантовые графы и связанные с ними операторы | 19 |
| **2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ НА ГРАФЕ**……………………………………………….... | 27 |
| 2.1 Сопряженное дифференциальное выражение……………………….….. | 27 |
| 2.2 Краевые условия………………………………………………………..… | 27 |
| 2.3 Сопряженные краевые условия………………………………………….. | 29 |
| 2.4 Доказательство формулы Лагранжа…………………………………….. | 30 |
| 2.5 Частное решение краевой задачи………………………………………... | 33 |
| 2.6 Краевая задача оператора при ……………………………….…… | 35 |
| 2.7 Основная задача…………………………………………………………... | 39 |
| 2.8 Краевая задача оператора ……………………………………………… | 42 |
| 2.9 Дифференциальный оператор n-го порядка……………………….…..... | 46 |
| 2.10 Функция Грина оператора на отрезке ………………………… | 53 |
| 2.11 Возмущенная краевая задача………………………………………….... | 54 |
| 2.12 Аналитическая природа функции Грина оператора ………... | 57 |
| 2.13 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина…………..… | 63 |
| 2.14 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Лорана задачи …….. | 65 |
| 2.15 Двухтагольные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке……………………………………. | 67 |
| **3 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ**………………………………………………………………….…… | 77 |
| 3.1 Основные понятия, связанные с граф-деревом……………….………. | 77 |
| 3.2 Определение максимального оператора на граф-дереве…….………… | 77 |
| 3.3 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф-дереве………………………………………………………………………….. | 79 |
| 3.4 Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора  на графе-звезде при ……………………………………………..……….… | 83 |
| 3.5 Определение дифференциального оператора на графе-звезде………... | 84 |
| 3.6 Построение функции Грина задачи Дирихле………………………….... | 85 |
| 3.7 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле…. | 94 |
| 3.8 Формула Даламбера в случае негладких многоточечных задач для волнового уравнения……………………………………………………...….. | 100 |
| 3.9 Идентификация области определения оператора Штурма-Лиувилля на граф-звезде………………………………………………………………… | 114 |
| 3.9.1 Решение задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде…………………………………………………………………….…….. | 117 |
| 3.9.2 Построение биортогональный системы решений по набору граничных условий………...…………………………………………………. | 119 |
| 3.9.3 Эквивалентный набор граничных форм, имеющих интегральный вид……………………………………………………………………………… | 121 |
| 3.9.4 Выбор эталонных задач и уточненная постоновка обратной задачи……………………………………………………………………….…. | 123 |
| 3.9.5 Теорема единственности восстановления граничных функций…….. | 124 |
| 3.9.6 Уточнение теоремы единственности в случае граничных задач ….... | 127 |
| **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**………………………………………………………..…….. | 130 |
| **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**……………..……… | 131 |

**ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ**

|  |  |
| --- | --- |
|  | – норма гильбертова пространства |
|  | – оператор идентификации дуг и вершин |
|  | – норма оператора |
|  | – пространство квадратично суммируемых функций на графе |
| . | – инцидентных множество вершин |
| . | – геометрический граф с оператором идентификации |
|  | – Лапласиан, связанный с квантовым графом |
|  | – сопряженный дифференциальный оператор |
| . | – условия Коши в нуле |
|  | – граф-звезда |
|  | – символ Кронекера |

**ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы возрос интерес математиков к объектам, которые не являющихся гладкими многообразиями. Имеющийся математический аппарат адаптирован именно для таких многообразий. Однако на практике встречаются объекты типа фракталов и стратифицированных множеств. Современные математические средства необходимо модифицировать на такие объекты. В частности, геометрические графы составлены из нульмерных и одномерных многообразий и в то же время не являются гладкими многообразиями. Таким образом, представляет научный интерес адаптация имеющегося математического аппарата на графы.

С другой стороны, геометрические графы можно рассматривать как предельный случай конструкций, представляющих соединения различных стержней. Поэтому понятен и практический интерес к такого рода объектам.

Принято рассматривать дифференциальный оператор на графе как гибрид, состоящий из чисто дифференциальных операторов на дугах и матричных операторов на нульмерных внутренних вершинах графа. Подобные объекты интересны и со спектральной точки зрения.

В связи с тем, что дифференциальные операторы на графах не являются дифференциальными, а представляют собой фунционально-дифференциальными операторами, поэтому данная диссертация преследует цель.

**Цель:** математический аппарат, который создан для исследования спектральных свойств чисто дифференциальных операторов, перенести на функционально-дифференциальные операторы.

**Объект исследования** – дифференциальные операторы на графах, как операторы составленные из скалярных матричных и дифференциальных операторов. Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

1. Выписать явный вид функции Грина задачи Дирихле для оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде и разложить ее по системе соответствующих вычетов.
2. Выяснить природу распространения волн вдоль граф-звезды как кусочно-упругой струны.
3. Однозначное восстановление условий закреплений граф-звезды по некоторому набору собственных значений дифференциальных операторов заданных на этом графе.

**Положения, выносимые на защиту:** дано явное представление функции Грина задачи Дирихле для оператора двукратного дифференцирования на граф-звезде и обоснованы ее вычетные и спектральные разложения, найдена формула Даламбера распространения волн вдоль граф-звезды и обоснован метод продолжений в случае ограниченной струны в виде граф-звезды, доказано, что по набору некоторых эталонных задач для оператора Штурма-Лиувилля на граф-звезде однозначно удается восстановить условия закрепления в граничных вершинах граф-звезды.

**Методы исследования.**

В диссертации используются хорошо апробированные методы функционального анализа и теории функций комплексного переменного, результаты спектральной теории неограниченных операторов, методотология теории ОДУ на графах.

**Научная новизна исследования.**

Доказана возможность идентификации граничных условий дифференциальных операторов на граф-звезде по собственным значениям специально выбранных эталонных дифференциальных операторов. Обоснован метод продолжений для ограниченных струн в виде граф-звезды.

**Обоснованность и достоверность.**

Обоснованность и достоверность научных выводов, полученных в диссертации, подтверждаются их последовательным теоретическим и математическим обоснованием, а также данными, сопоставленными с имеющимися в открытых источниках технологическими и производственными данными.

**Теоретическая и практическая значимость исследования.** Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут найти применение в дальнейшем в развитии спектральной теории краевых задач на графах и в исследовании задач, возникающих в теории упругости.

**Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и результатов диссертации** подтверждается публикациями полученных результатов в журналах, имеющих ненулевой импакт-фактор.

**Оценка полноты выполнения целей исследования.** Все полученные результаты являются новыми и базируются на собственных методах решения. Цель диссертации полностью достигнута, поскольку решены три задачи, которые ставились изначально.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 13 работах. Из них 3 статьи в рейтинговых журналах, 5 статей в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 6 тезисов в материалах международных конференций.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из 136 страниц, которые включают в себя введение, три раздела с подразделами, заключение и список использованных источников.

**Основное содержание диссертации.**

**Введение** диссертации содержит краткое описание современного состояния исследуемой темы диссертации, актуальность и обоснования необходимости исследования. **Первые две главы** носят вспомогательный характер и здесь изложен известный материал и приведены необходимые обозначения и терминология. Содержательными и самостоятельно выполненными являются пункты 3.6, 3.7, 3.8, 3.9 **третьей главы** диссертации. В указанных пунктах решены три задачи, которые необходимы для достижения цели диссертации.

**1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ГРАФЫ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ЛАПЛАСИАНЫ**

### В данном разделе приведены обозначения и вспомогательные известные факты а также уточнена терминология. Материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в монографиях [3,4,6,72,75,88]. Положения выносимые на защиту содержатся в третьем разделе диссертации.

### 1.1 Дискретные графы

Целью настоящего раздела является определение пространств и операторов, связанных с геометрическим графом и которые необходимы позже.

*Определение 1.1.1*

1. Дискретный граф  задается набором , где  - счетные множества. обозначает множество вершин,  обозначает множество ребер. Также вводится  отображение, сопоставляющее каждому ребру  пару , состоящей из его начальной и конечной вершины. Оператор  фиксирует ориентацию ребер.

2. Для каждой вершины  мы определяем (исходящие и входящие , соответственно) набор смежных ребер с 

  (1.1.1)

 состоит из всех ребер, входящих  в .  состоит из всех ребер, исходящих из .

3. Степень вершины  определяется формулой (1.1.2):

 (1.1.2)

то есть степень вершины равно количеству смежных ребер при . Чтобы избежать тривиальных случаев предположим, что , то есть никакая вершина не изолирована. Мы также предполагаем, что  конечно для каждой вершины [1].

4. Дискретный граф (ребер) взвешен, если имеется функция , которая каждому ребру  ставит в соответствии его длину .

В качестве альтернативы мы можем думать о  как о весе, связанным с ребром . Если  для всех ребер, то мы будем называть граф равносторонним. Иногда удобно обобщение понятия графа, расширив ребра до бесконечной длины, то есть имеющий конечную вершину на «бесконечности»:

*Определение 1.1.2*

1.  геометрический граф с ориентацией мы можем разложить на внутренние и внешние дуги , то есть . Кроме того, мы предполагаем, что оператор ориентации  отображает внутреннее ребро  на пару , состоящей его начальной и конечной вершин. В тоже время внешнее ребра  отображаются только на его начальную вершину . Набор  ребер, смежных с  и степень  определяются, как указано выше. Заметим, что внешние ребра принадлежат только множеству  исходящих ребер с  [1, p 25].

2. Мы называем граф  краевым, взвешенным, дискретным и внешним графом, если  является дискретным внешним графом, и  - функция длины такая, что:

 (1.1.3)

Заметим, что для взвешенного дискретного внешнего графа мы можем интерпретировать внутренние ребра как ребра конечной длины, так и внешние ребра в виде ребер бесконечной длины с терминальными вершинами на «бесконечности». Мы будем часто использовать следующий элементарный факт о переупорядочении суммы по ребрам и вершинам, а именно:

 (1.1.4)

для функции  в зависимости от  и  с условием, что сумма над пустым множеством равна . Заметим, что это равенство справедливо и для и кратных ребер. Переупорядочение является биекцией, поскольку объединения  и  не пересекаются. Для графа с конечным множеством ребер следует соотношение:

 (1.1.5)

установив . Для простоты предположим, что для остальной части этого раздела граф не имеет внешних ребер, т.е. .

Сделаем следующее предположение о нижней границе длин ребер: всюду в этой работе мы предполагаем, что существует постоянная  такая, что

 (1.1.6)

то есть весовая функция  ограничена. Без ограничения общности и удобства мы будем считать, что .

**1.2 Обобщенные лапласианы**

Мы хотим ввести пространство вершин, позволяющее нам определить лапласоподобные комбинаторные операторы, мотивированные общими граничными условиями в вершинах метрических графов. Обычный дискретный (взвешенный) лапласиан определяется на скалярных функциях в  определенных на вершинах . Лапласиан определятся по формуле (1.1.7):

 (1.1.7)

где  обозначает смежную вершину с вершиной  вдоль ребра . Обратите внимание, что  могут быть записаны также в виде  где

 (1.1.8)

Здесь пространства имеют взвешенные нормы, определенные равенствами:

 (1.1.9)

На самом деле  обозначает сопряженный оператор относительно соответствующих внутренних произведений. Иногда мы ссылаемся на функции в и  как на 0-формы и 1-формы в соответствующих пространствах. Мы хотели бы перенести приведенную выше концепцию на «пространство вершин»,  к более общим вершинам  Основная мотивация – это метрика графа и Лапласиана с общими граничными условиями на вершинах, как это определено в п. 1.1 и их отношения с дискретными графами [2].

1. Обозначим через  максимальное пространство вершин в вершине  то есть значение  имеет  компоненты, по одному для каждого смежного ребра. Вершинное пространство в вершине -линейное подпространство  из .

2. Соответствующие (итоговые) пространства вершин, связанные с графом  являются

 (1.1.10)

соответственно. Элементы  также называются 0-формами. Пространство  имеет свою естественную норму Гильберта, а именно

 (1.1.11)

Связанным с пространством вершин является ортогональная проекция в  где  - ортогональная проекция в  на .

3. Назовем общее подпространство  из  локальный, если он разлагается относительно то есть если  и . Аналогично, оператор  на называется локальным, если он разложен относительно указанной прямой суммы.

4. Двойное вершинное пространство, связанное с  определяется формулой  и имеет проекцию .

Заметим, что локальное подпространство  замкнуто, поскольку  конечномерная. Альтернативно, пространство вершин характеризуется фиксацией ортогонального проектора p в , который является локальным. Это следует из соответствующих обозначений на метрическом графе, можно назвать пару  - дискретный квантовый граф.

**1.3 Примеры**

Названия вершинных пространств в примерах взяты из соответствующих примеров в случае метрического графа см. ниже. Для более общих случаев лапласианы, определенные на вершинных пространствах вводятся аналогично к примеру дискретный магнитный лапласиан введем в [3].

1. Выбор приводит  к стандартному пространству вершин, которая обозначается . Пространство  также называют непрерывным вершинным пространством или вершинным пространством Кирхгофа. Связанная проекция

 (1.1.12)

где  обозначает квадратную матрицу ранга *.* Этот случай соответствует стандартному дискретному случаю, упомянутому ранее. А именно, естественная идентификация



(последнее значение не зависит от ) изометрична, так как взвешенная норма в  и норма в  согласованы, т.е.

 (1.1.13)

2. В более общем смысле, мы можем исправить вектор  с неотрицательными записями  и определим взвешенное стандартное пространство вершин на  Соответствующая проекция дается выражением:

 (1.1.14)

как и в предыдущем примере, мы имеем изометрию



(последнее значение не зависит от ), поскольку



3. Частный случай взвешенного стандартного вершинного пространства задается векторами  такими, что . Мы называем такое пространство вершин магнитное возмущение размерности один. Примером является следующее: пусть  функция, связывающая каждое ребро , магнитный векторный потенциал  и положим:

 (1.1.15)

где  если. Мы называем связанное пространство вершин  магнитным.

4. Мы называем  минимальное пространство вершин или пространство вершин Дирихле. Так же,  называется максимальным вершинным пространством или вершинным пространством Неймана. Соответствующие проекции  и .

5. Предположим, что  и определим пространство вершин размерности 2 на

 (1.1.16)

соответствующий ортогональный проектор 



В примере (2) мы покажем некоторые свойства инвариантности этого пространства вершин. В отличие от стандартного пространства вершин наше пространство вершин может «отделить» некоторые или все смежные ребра  в вершине . Например, если пространство вершин . Разбиение здесь означает, что мы можем разбить граф в пространстве вершин  так, что соответствующий проектор  имеет блочную структуру нетривиального разложения . Назовем пространство вершин  без такого разложения неприводимым.

Аналогично, мы говорим, что  неприводим, если все его локальные подпространства  неприводимы. Для более подробной информации мы ссылаемся на [4]. Мы показали следующий результат о симметрии пространства вершин:

*Предложение 1.* Предположим, что пространство  вершин. Вершина  со степенью  инвариантна относительно перестановок координат , затем  является одним из пространств   то есть только минимальные, максимальные, стандартные и двойные стандартные вершинные пространства инвариантны.

*Предложение 2.* Предположим, что пространство вершин . Вершина  со степенью  инвариантна относительно циклической перестановки координат  то есть  -ортогональная сумма пространств вида:

 в  где .

в  Где 

*Доказательство.* (Теоретико-множественные) неприводимые векторные пространства, инвариантные относительно циклической группы, одномерные (так как циклическая группа абелева) и имеют форму  как указано выше. Мы называем  магнитным возмущением , то есть компоненты генерирующего вектор  умножаются на фазовый коэффициент.

1. Если мы требуем, чтобы пространство вершин  является циклическим инвариантом с вещественными коэффициентами в соответствующих проекциях, тогда  охватывает либо  или же  (если  четный) или и то, и другое. Но сумма не является неприводимым, так как







и последние два пространства являются стандартными со степенью  Другими словами, неприводимый граф в  связанные с граничным пространством  разбивает вершину  в две вершины  и  рядом с краями с четными и нечетными метками, соответственно. Соответствующие пространства вершин являются стандартными.

2. Сумма двух циклических инвариантных пространств не всегда приводима: возьмем циклическое инвариантное пространство вершин  размерности 2, приведенное в следующем примере

Обратите внимание, что  неприводимо, так как соответствующий проектор  не имеет блочной структуры. Это пространство вершин, возможно, является самым простым примером (циклически инвариантного) неприводимого пространства вершин, не являющегося стандартным или двойственным стандартом. Заметим, что если , то неприводимое пространство вершин является либо стандартным, либо двойным стандартным (или соответствующей версией с весами и магнитными возмущениями, например.  заменен вектором  с ненулевыми элементами [5].

#### 1.4 Операторы, связанные с пространствами вершин

Определим теперь обобщенный граничный оператор или внешнюю производную, связанную с пространством вершин. Мы ниже используем эту внешнюю производную для определения связанного оператора Лапласа.

*Определение.* Пусть -пространство вершин графа . Внешняя производная на  определяется через



отображение -форм на -формы.

Мы часто отбрасываем индекс для пространства вершин или записываем  вместо  и так далее. Доказательство следующей леммы вытекает из определения (1.1.1).

*Лемма.* Предположим, что нижние длины связаны с отношением (1.1.3), то оператор нормирован на  Сопряженный оператор имеет ту же норму и задается формулой (1.1.17):

 (1.1.17)

где если  обозначает ориентированную оценку  в вершине 

*Определение 1.1.10.* Дискретный обобщенный Лапласиан, связанный с вершинным пространством  определяется формулой , то есть

\

 где  обозначает вершину на  напротив  [5, p. 429].

*Замечание 1.1.11*

1. Из леммы следует, что  - ограниченный неотрицательный оператор на  с нормой, оцениваемой сверху  В частности, .

2. Мы также можем определить лапласиан  действуя в пространстве «1-форм»  Для получения более подробной информации и соответствующей супер симметричной настройки [3, p. 824]. В частности, у нас есть  Более того, мы обсуждали, как эти обобщенные лапласианы может использоваться для анализа (стандартного) лапласиана на линейном графике и граф подразделения, связанный с  [6]. Следующий пример показывает, что мы действительно имеем обобщение стандартного дискретного лапласиана:

1. Для стандартного пространства вершин , удобно использовать унитарное преобразование из  на , ассоциируясь с  (общее значение) , как в Примере (1). Тогда внешняя производная  и прилегающий  унитарно эквивалентны



и



то есть  - классический граничный оператор, уже определенный в (1.5), и  сопряженный оператор. Более того, соответствующий дискретный лапласиан унитарно эквивалентно обычному дискретному лапласиану  определяемому согласно (1.4). Аналогично для взвешенного стандартного пространства вершин  с участием  обобщенный дискретный лапласиан, в пространстве выражается формулой

 (1.1.18)

где . Для магнитно-возмущенного стандартного вершинного пространства имеем



Который является дискретным магнитным лапласианом, связанный с магнитным потенциалом . Отметим, что периодическое  -граничное условие теории Флоке приводит к магнитному возмущению вершинного пространства.

2. Для минимального пространства вершин и  Для максимального пространства вершин имеем



и

,

где



В частности, в обоих случаях лапласианы разделяются, и любая информация о соединении графа теряется. Предположим теперь, что граф равносторонний и у графа нет кратных ребер. Тогда мы можем записать лапласиан в виде



где  называется основной частью обобщенного дискретного лапласиана и  обобщенная матрица смежности, определяемая



для  Более того,  если  и  не соединены ребром и



В частности, граф записанный в виде матрицы, имеет только одну запись 1, а все остальные равны 0. Тогда основная часть лапласиана имеет вид



 аналогично форме главной части стандартного лапласиана, определенного для  где эквивалентно,

 (1.1.19)

где сумма фактически распространяется только по тем вершинам , которые связаны с . В частности, в стандартном случае  матрица  состоит только из одной записи, так как  изометрично. А именно у нас есть  если и  связаны, и 0 в противном случае, т.е. является (унитарно эквивалентным) стандартным оператором смежности в . Вернемся к общей ситуации (т.е. к общей длине  и, возможно, кратным ребрам). Пусть  - дискретный граф. Определим гильбертову цепь, связанную с вершинным пространством  на , как



Очевидно, условие цепочки выполняется тривиально, поскольку только один оператор не равен нулю. В этой ситуации, поскольку мы имеем дело с Гильбертовыми пространствами, соответствующие пространства когомологий (с коэффициентами в ) могут быть определены следующим образом:



где  обозначают множества образом оператора . Индекс или Эйлерова характеристика цепи Гильберта  определяется формулой:



То есть индекс Фредгольма оператора  конечен при условии, что обе размерностей  конечны. Обратите внимание, что для стандартного пространства вершин  внешняя производная просто унитарно эквивалентна классическому граничному оператору, определенному в (1.1.5). В частности, соответствующие пространства гомологий являются классическими и  подсчитывает количество компонент  и ребер, не входящих в остовное дерево . Используя устойчивость индекса к непрерывным возмущениям, мы можем вычислить индекс через простые (разделенные) модельные пространства и получить следующий результат [3, p. 823; 4, p. 109]; в качестве альтернативы мы можем применить стандартные аргументы из линейной алгебры:

*Предложение.* Пусть -пространство вершин, ассоциированное с конечным дискретным графом,  то Обратите внимание, что, в частности, если т.е. если  стандартное пространство вершин, мы восстанавливаем известную формулу для (стандартных) дискретных графов, а именно  например, индекс равен эйлеровой характеристике  графа . С другой стороны, в «крайних» случаях имеем  и . Так как тускло  и тусклый . Отметим, что первый индекс равен эйлеровой характеристике «разъединенного» графа состоящего из несвязного объединения графов  имеющих только две вершины и одно ребро, то есть  так как . Аналогично, второй индекс равен относительной эйлеровой характеристике, то есть где и  В [3, p. 823-825] мы установили общий результат о когомологиях двойственного  к вершинному пространству . Это показывает, что собственно  и ориентированная версия, т.е.  связаны.

*Предложение 1.1.14.*Предположим, что глобальная оценка длины:

 для всех  

выполняется для некоторых констант . Тогда и  изоморфны. В частности, если  конечна, то в

Ориентация также учитывается в случае метрического графа, [6, p. 469].

### 1.5 Метрические графы, квантовые графы и связанные с ними операторы

В этом пункте мы приводим основные понятия для метрических и квантовых графов и выводим некоторые общие утверждения, которые понадобятся позже. Большая часть материала является стандартным, и мы обращаемся к литературе для получения дополнительных результатов и ссылок, например [7].

Определение 1.5.1. Пусть  дискретный (внешний) граф. Топологический граф  связанный с , представляет собой комплекс , содержащий только 0-клетки и 1-клетки, такой, что 0-клетки являются вершинами , а 1-клетки помечены множеством ребер , соблюдая структуру графа. Метрический график  связанный с взвешенным дискретным графом  топологический граф связан с таким , что для каждого ребра  есть непрерывная карта



такой, что клетка, соответствующая e, а ограничение гомеоморфизм. Отображения  индуцируют метрику на . Таким образом  становится метрическим пространством [4, p. 110].

Из-за злоупотребления обозначениями мы опускаем метки и для топологического и метрического графа, связанного с дискретным взвешенным графом,  и  просто пишем  или . Учитывая взвешенный дискретный граф, мы можем абстрактно построить ассоциированный метрический граф как несвязное объединение интервалов  для всех  и соответствующие отождествления концов этих интервалов (согласно комбинаторной структуре графа), а именно:

 (1.2.1)

обозначим объединение 0-клеток и объединение (открытых) 1-клеток (ребер) через  и  т.е. и оба подпространства канонически вложены в .

*Замечание 1.2.2*

1. Метрический граф  канонически становится метрическим пространством, определяя расстояние между двумя точками как длину кратчайшего пути в , присоединяясь к этим пунктам. Мы можем думать о картах  как координатные отображения и меры Лебега  на интервалах  индуцируют на пространстве  (Лебегову) меру. Мы часто опускаем карту координат  например, для функций  на  мы просто пишем  для соответствующей функции на . Если ребро e ясно из контекста, мы также опускаем метку.

2. Обратите внимание, что два метрических графа  и  могут быть изометричными как метрические пространства, так что лежащие в основе дискретные графы  и  не изоморфны: метрика на метрическом графе  не может различить единственное ребро  длины  в  и два ребра  длины  с  соединена вершиной степени 2 в : базовые графы не (обязательно) изоморфны. Обсуждение этого вопроса в [8].

Поскольку метрический граф является топологическим пространством и изометричен интервалам вне вершин, мы можем ввести понятие измеримости и дифференцировать функцию на ребрах. Начнем с основного гильбертова пространства

 и 

где  с  Чтобы определить подобные лапласиану дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве  мы вводим максимальное пространство Соболева или отделенное пространство Соболева порядка  как



где  классическое пространство Соболева на отрезке , то есть пространство функций с (слабыми) производными по на заказ . Мы определяем неориентированную оценку в вершине и ориентированную оценку в вершине  на ребре  в вершине  как



обратите внимание, что  определены для  Напомним, что 

*Лемма 1.2.3.* Предположим, что нижняя оценка длины (1.3), тогда операторы вычисления:





ограничены .

*Доказательство.* По следствию A.1.18 ограниченность отдельного оператора оценки  ограничен 

Непосредственно следует ограниченность глобальных операторов вычисления. Эти две оценочные карты позволяют составить очень простую формулу (1.2.2) формулы частичного интегрирования на метрическом графе, а именно

 (1.2.2)

где  и аналогично для . В основном формуле следует из частичного интегрирования на каждом интервале и переупорядочивание суммы, как в (1.10).

*Замечание 1.2.4.* Если мы различаем функции (0-формы) и векторные поля (1-формы), мы можем сказать, что 0-формы оцениваются неориентированными, тогда как 1-формы оцениваются ориентированными. Таким образом, мы должны интерпретировать  и  как 1-формы и , как 0-формы. Давайте теперь введем другие данные для определения операторов на метрическом графе [5, p. 429].

*Определение 1.2.5.* Квантовый граф  задается метрическим графом вместе с пространством вершин , ассоциированным с  (например локальное подпространство  (Определение 1.1.3). В частности, квантовый граф фиксируется данными  Обратите внимание, что в литературе [9] квантовый граф иногда определяется как метрический граф вместе с самосопряженным (псевдо) дифференциальным оператором, действующим на нем. Это определение является более общим, поскольку мы ассоциируем только лапласиан  определенный ниже квантовым графом . Связано с квантовым графом , определим пространства соболева



по лемме 1.2.3 эти пространства замкнуты в  как прообраз замкнутого подпространства и ограниченных операторов и соответственно и следовательно, сами Гильбертовы пространства. На пространстве Соболева , мы можем переписать вершинный член в формуле частичного интегрирования (1.1.11) и получить

 (1.2.3)

За  и  где  обозначают ортогональную проекцию  в 

Давайте теперь имитируем концепцию внешней производной:

*Определение 1.2.6.* Внешняя производная, связанная с квантовым графом  и неограниченный оператор  в  определяются для 

*Замечание 1.2.7*

1. Обратите внимание, что  - замкнутый оператор (например его график замкнут по , поскольку  являются Гильбертовым пространством, а норма графика   норма Соболева, например 

2. Мы можем рассматривать в как оператор, отображающий -формы в 1-формы. Очевидно, что на одномерном гладком пространстве в этом различии нет необходимости, но различие между 0- и 1-формами имеет смысл через условия вершин , следующую лемму. Примыкающий к  легко вычисляется по формуле частичного интегрирования (1.1.12), а именно по вершинному члену обращается в нуль для функций  в области значений .

*Лемма 1.2.8.* Сопряжение к  дается выражением  с доменным именем Что касается дискретных операторов, мы определяем лапласиан через внешнюю производную.

*Определение 1.2.9.* Лапласиан, связанный с квантовым графом  определяется формулой



с доменным именем  Соберем несколько простых фактов о лапласиане.

*Предложение 1.2.10.* Пусть  - квантовый граф с нижней границей длины в 

1. Лапласиан  самосопряженный и неотрицательный. Более того, лапласиан - это оператор, связанный с замкнутой квадратичной формой

 и домен 

2. Область лапласиана  дан



Доказательство. Самосопряженность непосредственно следует из определения лапласиана. Более того,



для всех  Следовательно, - оператор, ассоциированный с  (теорему 1.1.1). Наконец, характеризацию области легко увидеть с помощью леммы 1.2.8. Состояние будем называть вершинным условием, и аналогично  условие вершины в вершине  Важным примером является квантовый граф со стандартным пространством вершин

 (1.2.4a)

соответственно его взвешенная версия

 (1.2.4b)

где  Обратите внимание, что  состоит из непрерывных функций на топологическом графе *.*

На каждом ребре имеется вложение  например  уже непрерывно внутри каждого ребра. Более того, оценка  не зависит от . По этой причине мы  также называем непрерывным пространством вершин [7, p. 4887].

*Следствие 1.2.11*. Пусть  - квантовый граф со стандартным взвешенным пространством вершин  и более низкие длины связаны в



1. Oбласть сопряженного 



2. Область определения лапласиана 



В частности, функция  находится в области определения стандартного лапласиана или лапласиана Кирхгофа  если только



непрерывна и если условие потока на производные



Выполняется [1, p. 10].

1. Сделаем короткое замечание об экстремальных пространствах вершин.



Предположим, что квантовый граф имеет  как пространство вершин в вершине  Тогда соответствующий лапласиан удовлетворяет условиям вершины

то есть функция  выполняет индивидуальную функцию Дирихле соответственно условиям вершины Неймана в вершине  Отсюда и название «пространство вершин Дирихле». Пространство вершин Неймана в примере 1.1.4 (4).

В частности, если  - минимальное и максимальное пространства вершин, то

 и 

соответственно, то есть операторы развязаны. Вот  является лапласианом на  с граничными условиями Дирихле на  и аналогично,  является лапласианом на  с граничными условиями Неймана на .

2. Если  и  то функции  в области определения ассоциированного лапласиана «не видят» условия вершины в : а именно, и непрерывны вдоль вершины при соответствующей ориентации двух ребер . В частности, можно соединить два ребра в один край длиной  и опустим вершину  (посмотреть также замечание 1.2.2).

3. Существуют и другие возможности определения самосопряженных расширений лапласиана, Например [10-13] и (4) ниже. В частности, для самосопряженного (ограниченного) оператора  на  можно определить самосопряженный лапласиан  с доменом



где - проекция в  в космос . Условия вершины  и  в вершине  разбивается на три разные части, а именно часть Дирихле, часть Неймана  и часть Робина  на c

 (1.2.8b)

Если граница состоит из всех вершин, то есть  то мы можем дать явные формулы для оператора решения Дирихле и отображения Дирихле-Неймана (обозначения посмотреть в разделе 1.4, аналогичные результаты можно найти в [6, p. 469]). Обратите внимание, что в этом случае граница пространство граничной тройки совпадает со всем пространством вершин, например .

*Предложение 1.2.19*. Предположим, что  квантовый граф с границей  и нижняя граница длины  для некоторых .

1. Оператор Дирихле  связанный с граничной тройкой  - Лапласиан, связанный с минимальным пространством  вершин, т.е. (5). Нам также понадобится аналитическое продолжение в  т.е. мы установили



особенно, развязан. Спектр  является



более того, если граф равносторонний, то



2. Оператор Неймана, связанный с граничной тройкой -Лапласиан, связанный с квантовым графом  то есть



3. Оператор решения Дирихле , определяется  где

 (единственное) решение задачи Дирихле 



где 

4. Отображение Дирихле-Неймана 



где



и где  обозначает вершину, смежную с e, противоположную  В частности, если граф равносторонний  нет внешних краев и у нас есть



то есть отображение Дирихле-Неймана является аффинно-линейной (зависящей от ) функцией дискретного лапласиана .

**2** **ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ НА ГРАФЕ**

### Во втором разделе приведены терминология, обозначения и вспомогательные известные факты. Этот материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в работах [3,4,6,19,72,75,88]. Положения выносимые на защиту содержатся в третьем разделе диссертации. Этот раздел носит вспомогатленый характер.

### 2.1 Сопряженное дифференциальное выражение

Рассмотрим дифференциальное выражение вида

 (2.1.1)

Дифференциальное выражение  определенное формулой (2.1.1) называется сопряженным к дифференциальному выражению:

Через  обозначаем комплексное сопряженное к , или функцию, значения которой являются сопряженными к соответствующим значениям Рассмотрим интеграл:

,

Неоднократно применяя формулу интегрирования по частям убеждаемся, что дифференциальное выражение является сопряженным к ;

Следовательно



Другими словами, дифференциальные выражения  и  сопряжены друг другу. В функциональном пространстве  рассмотрим оператор, порожденный линейным дифференциальным выражением третьего порядка с гладкими коэффициентами:

 (2.1.2)

Здесь  - непрерывная функция на фиксированном конечном интервале , -непрерывно дифференцируемая функция на . Число 3 определяет порядок дифференциального выражения и действует на трижды дифференцируемых функциях.

### 

### 2.2 Краевые условия

К дифференциальным выражением 2.1.2 добавим краевые условия вида:

 (2.2.1)

где



выбранные согласно теореме Михайлова-Кесельмана, часто называют усиленно-регулярными граничными условиями [14-16]. Результате получим дифференциальный оператор, который обозначим через . Поэтому собственные значения оператора асимптотические простые и отделены [17-24], то есть найдется положительное число при котором любые два собственных значения оператора отстоят друг от друга на расстояние больше чем . Также из работ [25, 26] следует, что система собственных и присоединенных функций оператора образует базис Рисса в пространстве . Выпишем сопряженные граничные условия к граничным условиям Михайлова-Кесельмана [7, p. 4887].

Будем считать, что:



Случай А). Если все  разные, то:



Случай Б). Если , то выбираем. 

В дальнейшем детально изучается случай А. Аналогично можно исследовать случай Б. Итак, пусть . В таком случае введем набор  Можно считать, что . Тогда справедливы равенства:



Для произвольной гладкой функции введем обозначения, -линейные формы:













### 2.3 Сопряженные краевые условия

Пусть – являются линейно независимыми формами. Теперь можно ввести сопряженные граничные формы по формулам (2.3.1), (2.3.2):

 (2.3.1)

 (2.3.2)

где



После этого мы придем к формуле Лагранжа в виде:

 (2.3.3)

таким образом, для любых двух гладких функций справедлива формула Лагранжа [27-30]:

 (2.3.4)



Здесь  формально сопряженное дифференциальное выражение [20, c. 13; 29, с. 29]. Для любой  линейно независимые форм найдутся формы, удовлетворяющие соотношение 2.3.4.

### 2.4 Доказательство формулы Лагранжа

Используя дифференциальным выражение третьего порядка с гладкими коэффициентами на  мы можем так написать:



Напомним формулы интегрирования по частям:



Неоднократно используя формулу интегрирования по частям мы решаем третьего порядка:



Точно также получим следующий равенство:



и



В итоге получим соотношение



Подставляя граничные условия имеем равенство:



Теперь мы найдем граничные значения .

По правила Крамера выразим граничные значение  через значения форм







таким же образом:





Теперь мы подставляем в формуле Лагранжа и получим равенство:



Преобразуем последний соотношение



теперь можно ввести сопряженные граничные формы по формулам (2.3.1) и (2.3.2):





таким образом, доказано, что для двух функций  справедлива формула Лагранжа [8, p. 225].

Формула (2.3.4) называется Формулой Лагранжа и мы можем тоже написать [31-34]:



мы решаем краевые задачи для дифференциального уравнения третьего порядка, тогда сопряженные дифференциальным выражением третьего порядка будет [35-38].

 (2.4.1)

предположим теперь, что коэффициенты дифференциального выражения гладкие функций [39].

### 2.5 Частное решение краевой задачи

Мы знаем общее решение дифференциального уравнения третьего порядка:

 (2.5.1)

где



 частное решение неоднородного уравнения

Здесь  фундаментальная система решений однородного уравнения  удовлетворяющих неоднородным начальным условиям . Функция определяется по формуле:

где  и  Вронскиан детерминант

или

и 

тогда  следовательно  может быть определено следующий формуле.



отсюда проверим частное решение мы можем написать частное решение так как:



возьмем первую производную:



Заметим, что:



возьмем вторую производную:



теперь возьмем третью производную:



теперь надо проверить уравнения (2.1.2). Для этого решения  подставляем:





отсюда надо складывая матрицы, получим:



Но  это однородное уравнение, мы проверим неоднородные уравнения:



### 2.6 Краевая задача оператора при

Рассмотрим краевую задачу:

 (2.6.1)

с краевые условия:

 (2.6.2)

Наша цель решить краевую задачу (2.6.1), (2.6.2) общее решение будет:

 (2.6.3)

Здесь  решение однородного дифференциального уравнения и  – первое решение дифференциального уравнения третьего порядка:



с краевыми условиями



 – второе решение дифференциального уравнения третьего прядка найдется:



с краевыми условиями



 – является третье решение дифференциального уравнения третьего порядка



с краевыми условиями



находим неизвестные константы 

теперь надо проверить уравнения (2.6.1) для этого решения:



Значит это уравнения (2.6.2) выполняется отсюда находим  и мы знаем краевые условия по формуле:



так как



мы подставляем краевые условия



так как мы нашли

.

отсюда находим 

отсюда



мы подставляем краевые условия так как





так как мы нашли



теперь мы можем найти 





мы нашли



тогда можем написать общее решение краевой задачи, так как



отсюда мы находим  через частные решения и получаем

, , и 

отсюда можем написать



Conclusion 1. Решили задачу дифференциального уравнения третьего порядка с краевой задачей:



где



### 2.7 Основная задача

Дифференциальное неоднородное уравнение с краевыми условиями:





или мы можем краевые условия написать





где

.

Наша главная цель найти более краткое и подходящее общее решение задачи дифференциального уравнения третьего порядка .



здесь  частное решение и  однородного дифференциального уравнения



надо найти краевое условие 





*Лемма 2.2*Здесь мы можем использовать лемму:





Отсюда



где



теперь найдем  и  будет где мы можем решать как первый случай и найти





отсюда основная задача написать решение дифференциального неоднородного уравнения с краевыми условиями



*Случай Б.*Если краевые условия третьего порядка будут одинаковы, тогда получаем следующее разные варианты:

 ,

 ,

 .

сложим первую строку со второй строкой, тогда у нас краевые условия третьего порядка  и  и лучше отдельно напишем:

 ,

 ,

 .

### 

### 2.8 Краевая задача оператора

Рассмотрим краевую задачу оператора :

**** (2.8.1)

 (2.8.2)

Краевая задача  это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями:



мы знаем краевые условия по формуле:



где  – это порядок первого краевого условия;

 – это порядок n-го краевого условия, так как



*Случай А.* Значит все  разные 

*Случай Б.* Может быть, что  будет одинаково   эта задача называется невозмущенная задача [22, с. 10-15].

*Регулярные краевые условия.* Рассмотрим фиксированную область  и как выше, занумеруем  так как при .



В дальнейшем нам удобно будет выделить класс краевых условий, которые называются регулярными. Этот класс определяется различным образом в зависимости от того, будет ли  нечетным или четным:

a)  нечетно, 

нормированные краевые условия называются регулярными, если числа  определенны равенством

Если 





теперь мы можем найти / Михайлов  и  найдем которые корны 



Если  так как определение будет известно с краевыми условиями:







если  так как определение будет



б)  четно, .

Нормированные краевые условия называются регулярными, если числа и  определенные равенством:



Здесь  числа



*Теорема 2.1.* Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка на интервале , порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности:



Базисом Рисса в  называется такая полная в этом пространстве последовательность функции  что для каждой функции :



где  первый коэффициент Фурье,  второй коэффициент Фурье, Базис рисса это функции разлагается [9, p. 291].

Рассмотрим краевую задачу оператора 

**** (2.8.3)

**** (2.8.4)

**** (2.8.5)

Краевая задача **** это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями:

****

и

****

здесь  то [10, p. 9193; 22, c. 10].

### 2.9 Дифференциальный оператор n–го порядка

Пусть  Введем функцию  которая удовлетворяет уравнению:



с граничным условиям:



решения  фундаментального однородного уравнения n–го порядка.

На операторе n-го порядка подставляем первое решение:





* первое решение линейного однородного дифференциального уравнения n порядка с краевыми условиями:



отсюда мы возьмем первую производную:



Отсюда мы узнаем что дифференциальные операторы подходят, так как



теперь





 одно решение линейного однородного дифференциального уравнения [40]  порядка с краевыми условиями:



отсюда возьму первую производную и подставлю во второе решение:



отсюда



и так далее



с граничными условиями

.

В этом разделе мы рассмотрим все граничные условия краевой задачи без нуля шаг за шагом:



Краевая задача  это линейное неоднородное дифференциальное уравнение n порядка с краевыми условиями, но сначала мы выбираем первые краевые условия без нуля:



и другими краевые условиями:



здесь 

Если  то будет частное решение . Теперь наша цель  тогда надо найти функцию Грина. Первое решение общего решения дифференциального уравнения n-ого порядка:



оказывается



так как



но мы выбирали первые краевые условия без нуля



значит



или



отсюда могу написать



также мы можем найти очень просто



оказывается







из этого можем получить общее решение



теперь попробуем с этими краевыми условиями





Общее решение дифференциального уравнения -ого порядка



берем первую производную



можем написать



или написать



из этого можем получить общее решение



Теперь мы можем написать функцию Грина:



теперь выбираем два краевых условия, первый и второй без нуля



и другие краевые условия



здесь , общее решение



В этой система надо получить  и  и простой способ заключается в следующем:





в двух метриках должен быть равно нулю

 если  тогда .



отнимем две матрицы





отсюда нам надо найти 



так как





общее решение



функции Грина



### 

### 2.10 Функция Грина оператора на отрезке

Функция Грина оператора . Пусть по-прежнему  оператор, порожденный выражением  и условиями , найдем выражение для функции Грина оператора, другими словами, обратим оператор.Обозначим через  систему решений уравнения [11, p. 61; 19, p. 26].



оператор





Теперь рассмотрим следующую краевую задачу оператора  при ****

 (2.10.1)

с краевыми условями

 (2.10.2)

решения задачи (2.10.1),(2.10.2) задается по формуле



где



- функция Грина

где



здесь  - формулы из краевых условий, если 



если  тогда 

### 2.11 Возмущенная краевая задача

Рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора

(2.11.1)

 (2.11.2)

 (2.11.3)

решение задачи (2.11.1),(2.11.2),(2.11.3) задается по формуле:



где



здесь -удовлетворяет



с граничными условиями







рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора 

(2.11.4)

 (2.11.5)

 (2.11.6)

 (2.11.7)

решение задачи (2.11.4), (2.11.5), (2.11.6), (2.11.7) задается по формуле



где



где ,

здесь -удовлетворяет



с граничными условиями

,

.



Рассмотрим возмущенную краевую задачу оператора .

Теперь рассмотрим дифференциальные неоднородные уравнения с граничным условиям, возьмем все без нуля:

,

,

,

в этой задаче сначала возьмем все условия без нуля, общее решение



функции Грина на это задаче



### 2.12 Аналитическая природа функции Грина оператора

Функции Грина  оператора  [41, 42] есть мероморфная функция параметра , ее полюсами могут быть лишь собственные значения оператора  Пусть -простой нуль функции . Тогда  может быть только простым полюсом функции , так что

.

где  регулярна в окрестности точки . Если  вообще не особая точка функций, то следует считать  согласно известной формуле теории вычетов



Но в разложении определителя  по элементам первой строки коэффициент при  есть  следовательно, функция  и ее первые n производные непрерывны по совокупности переменных  в квадрате  далее вытекает, что  есть линейная комбинация функций  следовательно, при фиксированном  она удовлетворяет уравнению [19, c. 25].



случай кратного полюса функции Грина [19, c. 25].







пусть главная часть резольвенты при  имеем вид



Здесь  - главная часть ряд Лорана, -правильная часть ряда Лорана. Оператор



теперь 



мы можем написать уравнения оператора



Для 



Резольвента оператора  имеет в следующим виде



где

,

- функция Грина оператора .

Если при  функция  имеет следующий вид:

,

если  тогда .



теперь мы складываем функции Грина 

,

 - главная часть ряда Лорана, -правильная

часть ряда Лорана.

*Упражнение 2.1 Вычет разложение*

Пусть A-ограничен, тогда является регулярной точкой



и



Теперь



Оператор



общее решения





Например при .



краевые условия



решение этой задачи



функция Грина



Так как общее решение



Отсюда выйдет



Если  тогда полюса - резольвента, если  тогда существует вывод: резольвента имеет полюса. Теперь , и должны знать .



 существует 

*Упражнения 2.2.*Резольвента вектор  ряда Лорана



вычет резольвента



сначала



теперь вычет 



на это формуле



обратно оператор



мы находим вычет



*Возмущенная краевая задача и ее функция Грина*

Рассмотрим краевую задачу на собственные значения







резольвента оператора  имеет вид



где



- функция Грина оператора . Здесь это -решение однородного уравнения



с неоднородными краевыми условиями



### 2.13 Главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина

В этом пункте вычислена главная часть разложения в ряд Лорана функции Грина [41, p. 2184] возмущенного оператора в окрестности простого собственного значения. В нашем случае, нули функции  являются полюсами резольвенты  Пусть  простой нуль функции . Тогда разложение в ряд Лорана в окрестности простого полюса примет вид



где



по теореме Келдыша [19, c. 65] известно, что



где  – регулярная в окрестности точки . Здесь - собственная функция оператора ;

 – собственная функция сопряженного оператора  к оператору , то есть:



сравнивая соотношения получим равенства



*Теорема 2.2.* Если  - простое собственное значение оператора , тогда собственная функция оператора  имеет следующий вид:



то есть удовлетворяет следующей возмущенной краевой задаче



*Теорема 2.3.* Пусть простой нуль функции . Тогда функция Грина оператора  в окрестности простого полюса имеет представление:



где  – собственная функция оператора ,;

 – собственная функция сопряженного оператора  к оператору . Причем она определяется по формуле:





### 

### 2.14 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Лорана задачи

Для вычета нам нужны в ряд Фурье функции Грина задачи . Теперь для собственного функций оператора посмотрим сопряженные функций оператора и разложим ряд Лорана. Пусть  - простой нуль функций . Тогда  может быть только простым полюсом функции , так что Hаймарк [19, p. 85].



где  правильная часть ряда Лорана  - собственные функции оператора  - сопряженные собственные функции оператора.



где 





*Теорема 2.4*

1.На первом этапе вычет, если условия , тогда у нас выйдет вычет







собственные функции оператор  - сопряженные собственные функции оператора. 

2.На втором этапе вычет, если условия  тогда







 - собственные функции оператора  - сопряженные собственные функции оператора. 

3.На третьим этапе если , тогда







 - собственные функции оператора   - сопряженные собственные функции оператора 

4.На четвертом этапе если , тогда







 - собственные функции оператора   - сопряженные собственные функции оператора 

### 

### 2.15 Двухтагольные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на отрезке

Рассмотрим задачу на собственные значения [43]

 (2.15.1)

с граничными условиями

 (2.15.2)

где  – суммируемая на  функция;

 – комплексные числа.

Для дельнейших условий удобно ввести матрицу граничных коэффициентов:

 причем ранк 

миноры матрицы  обозначим через , то есть

при 

к примеру, 

нам также удобно ввести симметричную относительно c функцию



для наглядности приведем графики двух функций обозначим разности



понятно ,что  при  наряду с уравнением (1). Рассмотрим следующие уравнения с симметричным потенциалом

 (2.15.3)

введем фундаментальную систему решение однородного уравнения (2.15.3), -решения уравнения (2.15.3), удовлетворяющие условиям Коши в точке



- решения уравнения (2.15.3), удовлетворяющие условиям Коши в точке

: .

аналогично вводятся решения  следующего уравнения (2.15.1).

*Лемма 2.2.*Для решения  и  выполняются соотношения



*Доказательство*. Доказательство проведем только для функций  известно [19, c. 55], что  является решением гримерного уравнения



проверяем







Приведенное интегральное уравнения в следующим методом последовательных приближений



где 



остается проверить, число выполняется соотношения при всех 



сначала надо проверить тождество



рассмотрим интеграл, если 



*Лемма 2.3.* Полностью доказана для случая . Аналогично доказывается для функций .

Следующие решения  выразим через .

*Лемма 2.4.* Решение  является решениям следующего интегрального уравнения



*Лемма 2.5.* Решение  является решением следующего интегрального уравнения



*Доказательство леммы 2.5.* Сначала проверим вольность первого условия Коши  вычислим первую производную  в результате имеем:



теперь проверим выполнение второго условия Коши  вычислим второго производную  в результате имеем



отсюда получим равенство



или



так как  то окончательно получаем



Лемма 2 полностью доказана.

*Лемма 2.6*доказывается точно так же как доказана лемма 2.5 согласно монографии [19, c. 55] введем характеристический определитель



к примеру, 

*Лемма 2.7.*Если  нуль характеристического определителя  кратности то -собственное значение задачи (2.15.1)-(2.15.2) алгебраической кратности 

Лемма 4 доказана в монографии [19, c. 55]  будет



например

,



для матрицы собственного значения [19, c. 75]



заметим, что - целая функция от , точно также вводим характеристический определитель



*Лемма 2.8.*Справедлива формула:



*Доказательства лемма 2.8.* Вычислим сначала:



из леммы 1 следует что,



точно также вычисляются значения







отсюда вытекает что



из курса линейной алгебры известно, что



поэтому



отсюда вытекает





лемма 5 полностью доказана.

*Следствие 1.* Eсли  характеристический определитель



не имеет нулей.

*Следствие 2.* Eсли 



в монографии Марченко В.A., лемма 5 доказана только для случая  В нашем случае  согласно монографии краевые условия (2.15.2) называются вырожденными, если 

Теперь вычислим характеристический определитель симметричного относительно  для этого, используют вычисления



где



если , 



точно также вычисляются значения







отсюда вытекает



отдельно вычислим следующее выражение









Симметрическии получим:



Вронскиан которого следующее:













отсюда









согласно формуле вместо x ставится 1















### 3 ФУНКЦИЯ ГРИНА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ГРАФЕ

### В данном разделе приведены вспомогательные известные факты а также уточнена терминология и соответствующие обозночения. Материал данного раздела диссертаций соответствует материалу приведенному в монографиях [3,4,6,55,56,72,75].

### 3.1 Основные понятия, связанные с граф-деревом

В следующих пунктах вместо общих геометрических графов будем рассматривать частные их виды: граф-дерево и граф-звезда. Определения и обозначения займствованны из работ [3,4,75,88]. При этом некоторые вышеприведенные утверждения (формула Лагранжа и описание самосопряженных сужений) намного упростятся. В частности, приведена формула Лагранжа для дифференциального оператора на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах. Мы изучаем вопрос о полном описании корректных сужений заданного максимального дифференциального оператора на дерево образном графе. В этом подразделе также описаны все самосопряженные сужения максимального оператора, а также все обратимые сужения максимального оператора. Сначала приведем известные понятия, связанные с граф-деревом.

Пусть задан граф-дерево  Ориентированное дерево – ацикличный орграф (ориентированный граф, не содержащий циклов), в котором только одна вершина имеет нулевую степень захода (в неё не ведут дуги), а все остальные вершины имеют степень захода 1 (в них ведёт ровно по одной дуге). Вершина с нулевой степенью захода называется корнем дерева, которое обозначим 0, вершины с нулевой степенью исхода (из которых не исходит ни одна дуга) называются граничными вершинами или листьями и обозначается через . Вершины, не являющиеся граничными называются внутренними и обозначим через . Граничные вершины будем нумеровать числами 0 до  а внутренние вершины  до . Количество исходящую из вершины  дуг обозначим через 

Не умоляя общности, считаем, что дуги имеют одинаковую длину. Дуга, имеющая конец в вершинеобозначаем через . Функцию  определенную на дуге  обозначаем .

Путь, исходящий из корня и заканчивающийся в вершине  обозначим через  а его длину через . Далее, мы предполагаем, что из корня выходит только одна дуга.

### 

### 3.2 Определение максимального оператора на граф-дереве

Рассмотрим пространство [25, c. 14]



с элементами



где  и  декартово произведение подпространств) и с конечной нормой [25, c. 14-15]



точно также введем пространство [25, c. 14-15]



Введем множество функции , элементы которого в каждой внутренней  удовлетворяют условиям Кирхгофа [22, c. 133]

 (3.2.1)

 (3.2.2)

здесь  дуги исходящие из вершины (рисунок 1).

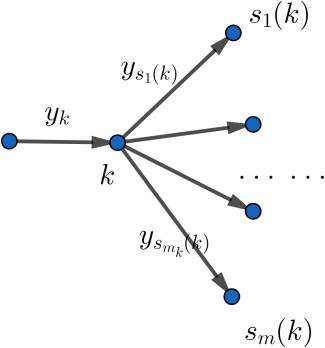


Рисунок 1 – Разветвление во внутренней вершине k

Оператор  с областью определения  задаваемый следующим дифференциальным выражением:



называется максимальным оператором. Где  набор вещественных непрерывных функций, обычно называемых потенциалами. Отметим, что количество условий Кирхгофа во внутренних вершинах равно.

### 3.3 Формула Лагранжа для дифференциальных операторов на граф-дереве

Формула Лагранжа играет важную роль при изучении дифференциальных операторов на отрезке. В этом параграфе мы приведем аналог формулы Лагранжа в случае дифференциального оператора на граф-дереве. Сначала сформулируем несколько лемм.

*Лемма 3.1*. Для любых функций  из  выполняется тождество:

 (3.3.1)

где  – комплексное сопряжение числу .

*Доказательство лемма 3.1.* Рассмотрим интеграл из левой части соотношения (3.3.1). интеграл на дуге  запишем следующим образом:



двукратное интегрирование по частям дает возможность записать выражение

 в виде:

 (3.3.1а)

так как все дуги  имеют концы на  и только дуги  имеют концы на  тогда из равенств (3.3.1а) вытекает лемма (3.3).

*Лемма 3.2*. Для любых функций  из области определения максимального оператора  выполняется тождество:

 (3.3.2)

*Доказательство лемма 3.2.* Предположим, что  принимает значения  Вклад в вершину можно  записать в виде:

 (3.3.3)

по условию (3.1) посчитаем значение суммы (3.5), получим:

 (3.3.4)

соотношение (3.3.4) означает, что вклад внутренних вершин  в слагаемые, не содержащие интегралы (3.3.2), равен нулю. Поэтому в (3.3.2) необходимо учитывать только вклад граничных вершин  Тогда мы имеем значения функции  в точке . Напомним, что эти функции определены на входящих дугах  до граничных вершин Существуют также значения Функций  в точке Эти функции определены на исходящих дугах  из вершины 0 и направленные к вершине  (рисунок 2):



****

Рисунок 2 – Граф-дерево с вершинами

Примечание – красные вершины-внутренние, синие-граничные вершины

Доказательство леммы 3.2 завершено.

Из леммы 3.2 следует, что вклад внутренних вершин в члены, не содержащие интегралы (3.2.2), равен нулю. Другими словами, члены, которые вне интеграла (3.2.2) содержат только вклад граничных вершин. Следуя монографии подобные формулы называются формулой Лагранжа. Формула (3.2.2) может быть обобщена в следующем направлении.

Рассмотрим для  следующие граничные формы [27, c. 123]

(3.3.5)

где некоторые постоянные.

*Теорема 3.1*(Формула Лагранжа) Пусть  множество линейно независимых граничных форм. Тогда существует единственный набор граничных форм  таких, что для любых Функций  из  имеет место следующее тождество:

 (3.3.6)

*Доказательство теорема 3.1.* Введем разность:



согласно лемме 3.2 эта разность представима в виде:

(3.3.7)

таким образом, разность выражается набором  граничных значений . Этот набор граничных значений представляетлинейную независимую систему. Следовательно, множество граничных значений может быть выражено в виде линейной комбинации произвольных граничных форм  удовлетворяющих условиям теоремы 3.1. Для этого соотношения (3.5) следует рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно . Разрешая систему (3.3.3) относительно  имеем:



подставляя указанные выражения в разность: Преобразуем функцию Грина задачи (3.5.1),



сгруппируем правую часть последнего равенства относительно , тогда получим:

,

Если в последнем выражении сумму в квадратных скобках обозначить через:



то получим требуемую формулу:



Формула (3.3.4) называется формулой Лагранжа. Из теоремы (3.1) следует:

*Следствие 3.1*. Пусть сужение оператора  на области определения . Тогда сопряженный оператор  также является сужением оператора  на области определения и для любых  и  справедливо равенство:



### 

### 3.4 Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде при

В данной работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка,являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией. Задачи для дифференциальных операторов на графах в настоящее время активно изучаются математиками и имеют приложения в квантовой механике, органической химии, нанотехнологиях, теории волноводов и других областях естествознания. Граф представляет собой структуру, состоящую из «абстрактных» отрезков и вершин, примыкание которых друг к другу описывается некоторым отношением. Для определения оператора на заданном графе необходимо выделить множество граничных вершин. Вершины не являющиеся граничными называются внутренними вершинами. Дифференциальный оператор на заданном графе определяется не только заданными дифференциальными выражениями на дугах, но и условиями типа Кирхгофа во внутренних вершинах графа.

В данной статье решена задача Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе. Нами использованы стандартные условия склейки во внутренних вершинах и краевые условия Дирихле в граничных вершинах. Также в этой работе представлено функция Грина дифференциального оператора на графе-звезде. Вопросы из спектральной теории, как построение функции Грина и разложение по собственным функциям для моделей из соединенных стрежней мало изучены. Спектральный анализ дифференциальных операторов на графах является основным математическим аппаратом при решении современных проблем квантовой механики.

В работе исследуется система дифференциальных уравнений второго порядка, являющейся моделью колебательных систем со стержневой конструкцией.

Основное внимание в этой статье уделяется спектру дифференциальных операторов второго порядка на графах. Различные функциональные пространства на графах. определены, и мы определяем, с точки зрения как дифференциальных систем, так и вышеупомянутых функциональных пространств, краевые задачи на графах. Показано,что краевая задача на графе спектрально эквивалентна системе с разделенным граничным условием. Основная цель этой статьи – решить задачу Дирихле и построить его функцию Грина для зведообразного графа.

Граф-звезда – это связанный граф, в котором не более одной вершины имеет степень больше единицы. Вершина, имеющая степень больше единицы, называются внутренней вершиной граф-звезды. Вершины, не являющиеся внутренними, называются граничными вершинами.

Пусть задан ориентированный графа-звезда  где  – два множества. Элементы множества  – называются вершинами графа, через  обозначено множество его дуг. Количество дуг обозначим через . Пусть  – внутреняя вершина,  граничные вершины. При  исходяшую из вершины  дугу обозначим .

В дальнейшем считаем, что длина каждой дуге . На каждой дуге  введем переменную . Для удобства обозначим значением  соответствует граничную вершину дуги , а значением  внутреннюю вершину.

В предлагаемой работе исследуются свойства функций Грина краевой задачи для дифференциальных уравнений второго порядка на графе-звезде. Рисунок 3 графе-звезде.

a1

a2

а б

a4

a3

a2

a1

a5

a6

a7

a8

a9

a10



a2

a5

a4

a3

a2

a1

в г д

Рисунок 3 – Примеры граф-звезда при 

### 

### 3.5 Определение дифференциального оператора на графе-звезде

В дальнейшем полезно ввести пространство



с элементами



где  и декартово произведение подпространств) и с конечной нормой:

.

точно также стандартным образом вводится пространство:



введем множество функций  элементы которых в каждой внутренней вершине удовлетворяют условиям Кирхгофа [34, p. 248]:

 (3.5.1)

В электрических сетях они выражают закон Кирхгофа, при колебаниях упругих сетей-баланс напряжений.  рассмотрим дифференциальный оператор , задаваемый линейными дифференциальными выражениями:

 (3.5.2)

с областью определения . - спектральный параметр, плотность распределения внешней силы.

В данной работе конструктивно строится функция Грина задачи (3.5.1), (3.5.2) с условиями Дирихле в граничных вершинах:

 (3.5.3)

### 3.6 Построение функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о существовании функции Грина для задачи Дирихле:

 (3.6.1)

 (3.6.2)

Под функцией Грина мы понимаем матричную функцию двух переменных  при каждой  непрерывной на графе Gи заданную формулой:

.

*Лемма 3.3.* Решение задачи (3.6.1), (3.6.2) может быть представлено в виде:

 (3.6.3)

где  и функций  являются линейно независимыми решениями однородной задачи Коши:



*Доказательство лемма 3.3.* Покажем, что правая часть выражения (3.6.3) является решением задачи (3.6.1), (3.6.2). Сначала вычислим первую производную:



теперь вычислим вторую производную:



так как  тогда с учетом (3.6.3), получим:



отсюда следует соотношение (3.6.1). Теперь проверим выполнение граничных условий (3.6.2). Значение *x* = 0 подставляя в (3.6.3), получим:



так как  Значение  подставляя в (3.6.3), получим:



так как  Лемма 3.3 доказана. Из Леммы 1 следует следующая теорема.

*Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3)*мы решаем задачи дифференциального оператора на графе **-** звезде при m:



В этом уравнение  неизвестно, известно функций  Тогда условия Дирихле: 

и условия Кирхгофа:

*Теорема 3.2.*Если **** то решение функций грина задача (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) Дирихле может быть записано в виде:



Этотеорема общее решение линейного дифференциального уравнения и задачи при  имеет вид

*Доказательство теорема 3.2.*Нам надо показать теорему 1, сначала вычислим первую производную:



теперь вычислим вторую производную:



мы можем общее решение задачи (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) записать в следующим виде:



где 

здесь  обозначаеться через ,

,



Вводим решение задачи (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) для функций  в следующим виде:

 (3.6.4)

Покажем, что функций заданные системой (3.6.4) удовлетворяют уравнениям (3.5.2), граничным условиям (3.5.3) и условиям:

 (3.6.5)

затем проверяем выполнения граничных условий (3.5.1). Тогда получим:

 (3.6.6)

отсюда мы проверим второй часть уравнения (3.5.1).









теперь проверим выполнения условия (3.5.3):



*Теорема 3.3.*Для функций Грина задачи (3.5.1),(3.5.2),(3.5.3) справедлива представление:



*Доказательство теорема 3.3.*Матрично-векторную запись Решение для :



Тогда для произвольных  решение задачи (3.5.1), (3.3.2), (3.5.3) может быть представлена в виде:





теорема доказана.

*Следствие 3.2.*Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) имеет представление если :



*Следствие 3.3.*Функция Грина задачи Дирихле (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) имеет представление если :



где  , 

 , .

### 3.7 Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) по собственным функциям соответствующей спектральной задачи. Этот результат диссертации вносится на защиту и соответствует работе автора [45].

*Теорема 3.4.* Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора*.* Докажем следующий промежуточный результат [19, c. 133; 36, c. 134].

*Лемма 3.4* Оператор, соответствующий краевой задаче (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) является самосопряженным*,* т.е. функция Грина  есть симметризируемое ядро в пространстве :

 (3.7.1)

*Доказательство лемма 3.4.* Преобразуем функцию Грина задачи (3.5.1), (3.5.2), (3.5.3) в представлении из следствия 1 следующим образом:



отсюда имеем:



рассмотрим элементы матрицы  с номером :

 (3.7.2)

и сравним его с элементом матрицы  с номером :

 (3.7.3)

Если в выражении (3.7.2) переменную  заменить на  переменную  заменить на  то выражение (3.7.2) совпадает со значением (3.7.3). Таким образом доказано, что:

.

лемма доказана [26, c. 133].

*Пример 3.1.* Решаем задача на графе-звезде при m=2. Пусть задан граф  граничными вершинами и 0 внутренней вершине:



в дальнейшем полезно ввести пространство:



на это уравнение  неизвестно зато известно  условия Дирихле:



условия Кирхгофа:



решение имеющим ввиде:



Покажем, что правая часть выражения является решением задачи задача при m=2 Сначала вычислим первую производную:



теперь вычислим вторую производную:







сначала проверим условий Дирихле из уравнения так как



из этого уравнения





проверим выполнения граничных условий значения  подставляя и получаем:



теперь вычислим первую производную выражения:



теперь надо найти  из уравнения:



обшие решение задачи Пример 1 имеет вид.

*Пример 3.2.* Вычетное разложение в ряд Фурье функции Грина задачи Дирихле при m=2

В настоящем пункте изучается вопрос о разложении в ряд Фурье функции Грина задачи при m=2 по собственным функциям соответствующей спектральной задачи.

*Теорема 3.5.* Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в ряд Фурье по собственным функциям этого оператора*.*Докажем следующий промежуточный результат вычетная разложеное функции Грина вычеслим [19, c. 133]:



*Теорема 3.6.*Из наше работе[43, c. 14-26] должен знать **** тогда мы можем написать **** и **,** тогда корень ****:







теперь можем так как напишем:





.

отсюда вычетная разложеное функции Грина вычеслим :





.

### Формула Даламбера в случае негладких многоточеных задач для волнового уравнения

### В данном пункте доказан основной результат диссертации, который вносится на защиту. Этот результат опубликован в работах автора [47, 51].

Известно [26, с. 133], что решение задачи Коши для волнового уравнения задается формулой Даламбера. Физический смысл формулы Даламбера соответствует распространению волн. Важно, что решения волнового уравнения могут иметь разрывы, которые распространяются вдоль характеристик. Разрывные решения волнового уравнения для струны и стержня лишены физического смысла. Однако такому же уравнению удовлетворяет давление газа в длинной узкой трубе. Давление может быть разрывным. Разрывные решения волнового уравнения в газовой динамике называются ударными волнами.

Метод Даламбера или метод падающей и отраженной волн позволяет решать не только задачу Коши для волнового уравнения, но и находить решения смешанных задач. В случае полуограниченной струны наблюдается эффект отражения волн, зависящего от вида граничного условия. В случае ограниченных струн также происходит отражение волн, но этот эффект происходит по более сложному сценарию. Детали указанных эффектов можно найти в книге А.И. Комеча [27, с. 133].

В работах [28, p. 82; 29, с. 33] формула Даламбера модифицирована для смешанной многоточечной задачи для волнового уравнения. При этом решение смешанной многоточечной задачи предполагается достаточно гладкой. В работе Kanguzhin B.E. выведен аналог формулы Даламбера для смешанной многоточечной задачи для волнового уравнения с начальными данными допускающих разрывы первых производных. В данной работе сформулирована и доказана формула Даламбера для струн, представляющих граф-звезду.

#### *Основные понятия и обозначения.* Пусть - фиксированное натуральное число. Рассмотрим смешанную задачу для системы волновых уравнений:



 (3.8.1)



с условиями вида (a):

 (3.8.2)



и условиями вида (b):

 (3.8.3)

а также начальными условями:

 (3.8.4)

Согласно результатам работ [31, с. 37; 32, с. 108; 33, р. 16] задача (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) может быть интерпретирована, как смешанная задача для волнового уравнения на графе-звезде . Здесь  представляет множество вершин, занумерованных от 0 до , а множество  означает множество дуг  [32, с. 108; 33, р. 16]. На каждой дуге  выполняется одно из волновых уравнений (3.8.1). Вершина  называется внутренней вершиной графа-звезды. Условия вида (a) означают, что во внутренной вершине выполняются законы Кирхгофа [34, р. 248]. Вершины  называются граничными вершинами графа-звезды (рисугнок 1). Условия вида b представляют набор граничных условий. При  задача (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) совпадает со смешанной задачей для волнового уравнения:

 (3.8.5)

 (3.8.6)

 (3.8.7)

в этом случае справедлива формула Даламбера (3.8.8):

 (3.8.8)

Здесь  и - продолжения функции  и  с отрезка  на всю числовую ось, которые получены по следующему алгоритму:

1. Сначала с отрезка  нечетным образом продолжаем на отрезок .

2. Затем с отрезка  периодически продолжаем на всю числовую ось.

В настоящей работе для смешанной задачи (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) на графе-звезде получен аналог формулы (3.8.8).

Для этого нам требуется зависимость решения системы дифференциальных уравнений от спектрального параметра:

 (3.8.9)

с условиями вида (а):

 (3.8.10)

и условиями вида (b):

 (3.8.11)

В работах [31, с. 37; 32, с. 123] требуемая зависимость приведена. Чтобы сформулировать результат работы [32, с. 123] нам потребуются следующие обозначения. При фиксированном  из множества  обозначим через  и  решения уравнения (3.30) с условиями:



на самом деле, эти функций имеют явные представления:

.

в работе [32, с. 123] доказано следующее утверждение.

*Утверждение 3.1.* Пусть . Тогда решение системы (3.30), (3.31), (3.32) примет вид:

 (3.8.12)

причем постоянные  удовлетворяют соотношению:

 (3.8.13)

Обозначим через  собственные значения задачи (3.8.9), (3.8.10), (3.8.11). Тогда при  из соотношений (3.8.11) вытекают соотношения:



Следовательно:



тогда из соотношения (3.8.13) имеем дисперсионные соотношение:

. (3.8.14)

обозначим левую часть соотношения (3.8.14) через . Заметим, что



*Лемма 3.5.* Нули целой функции  вещественные и простые. Простота собственных значений вытекает из неравенства:



*Пример 3.3.* Графический способ вычисления нулей функции  при .

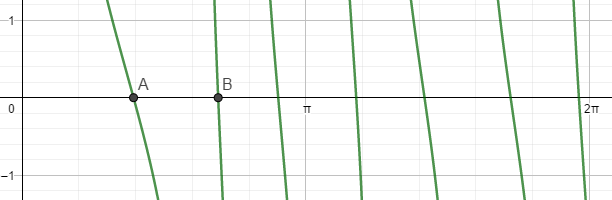


Рисунок 4 – Графический способ нахождения собственных значений

Из рисунка 4 находим первые нули функций  соответствующая система собственных функций в таком случае примет вид:

(3.8.15)

Из работы Н.П. Бондаренко следует, что задача (3.8.9), (3.8.10), (3.8.11) является самосопряженный в . Поэтому система (3.8.15) представляет ортогональный базис в пространстве . Напомним, что в  скалярное произведение вводится по правилу:

.

Начальные данные (3.25) обозначим через  и . Собственную функцию соответствующую собственному значению  обозначим через:



В дальнейшем считаем, что начальные данные  подчинены условиям согласования (3.23) и (3.24). Тогда функций  разлагаются в ряды по собственным функциям:

, (3.8.16)

которые сходятся равномерно на . Подобная теорема для дифференциальных операторов на отрезке доказана в монографии М.А. Наймарка. Она остается справедливой и для дифференциальных операторов определенных на графах. Заметим, что  коэффициенты Фурье определяются по стандартным формулам:

, .

соотношения (2.17) можно переписать в покоординатном виде:

 (3.8.17)

Не умаляя общности, выведем аналог формулы Даламбера при . Поскольку известен стандартный прием получения формулы Даламбера для случая , если известна формула при  . Пусть . Решение смешанной задачи на графе (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3), (3.8.4) ищем в виде:



тогда легко понять, что:



таким образом, решение примет вид:

, 

В дальнейшем упростим произведение  при фиксированных  и .

Резюме: Волновое уравнение во всем пространстве соответствует физическим явлениям. В то же время явление на конечном промежутке не противоречат процессу распространения волн. При этом процесс отражения волн имеет специфическое значение. В работе подробно исследовано соответствующее распространение волн.

#### об одной задаче на собственные значения. Пусть – неотрицательные числа. Рассмотрим задачу на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка на объединений интервалов :

 (3.8.18)

c условиями 

 (3.8.19)

удобно ввести решение уравнения (3.8.18) по формуле:









Решение  выбрано так, что выполняются условия (3.40) и Поэтому нули функции:



где , являются собственными значениями исходной задачи. Заметим, что  Преобразуем функцию к виду:



Отсюда вытекает, что надо исследовать кубическое уравнение

 (3.8.20)

Заметим, что 



корни кубического уравнения (3.41) не могут быть кратными, поскольку квадратное уравнение для его производной:



имеет два разных действительных корня. Докажем, что указанное кубическое уравнение имеет три действительных корня и все они лежат в интервале (−1,1). Пусть – корень кубического уравнения (3.8.20), который либо комплексный, либо лежит вне интервала (−1, 1). Тогда из соотношения:



заключаем, что исходная задача на собственные значения имеет комплексные собственные значения. Но это противоречит тому, что исходная задача является самосопряженной [36, с. 134]. Таким образом, у исследуемого кубического уравнения существует три разных корня  из интервала (−1, 1). Следовательно, существует три серии собственных значений [37, р. 12]:



Четвертая серия собственных значений следует из уравнения и имеет вид:



для каждой серии собственных значений можно выписать собственные функций  Приведем полезные для дальнейшего свойства системы собственных функций 

*Лемма 3.6.* Системы собственных функций  образует ортогональный базис в пространстве 

Доказательство леммы 1. Возьмем два произвольных собственных значения  u . Рассмотрим произведение:

****

****

здесь учтены условия (3.8.19) и то, что ****

Из полученного соотношения следует ортогональность системы. Базисность системы следует из того, что исходная задача является самосопряженной. Система собственных функций **** на самом деле, определена на всей оси, а не только на объединений интервалов . Проследим как она с  продолжается на  При положим  то есть через точку 𝑥 = 0 имеем нечетное продолжение. Тогда  Дальше с множества  на всю числовую ось продолжаем периодически с периодом равным двум. Продолжение будет гладкой функцией в целых точках, то есть продолженная функция непрерывна в целых точках вместе с первой производной. Как известно произвольная функция ****, удовлетворяющая условиям (3.40) и **** разлагается в равномерно сходящийся ряд по системе ****Следовательно, функцию ****сначала продолжим нечетно на , а затем 2-периодически на всю числовую ось. Продолженную функцию обозначим через**.** Причем разложение **** по системе **** сохранится и для функции **** Приведем некоторые примеры, когда приведенные выше рассуждения приводят к явным формулам.

*Пример 3.3.*Если **** то **** В этом случае все четыре серии собственных значений можно объединить в одну ****Система собственных функций примет вид ****

*Пример 3.4.* Пусть ****Тогда:

****

****

в этом случае две серии собственных значений:

****

*Пример 3.5.*Пусть **** Тогда:

****



В этом случае все четыре серии собственных значений можно объединить в одну **** Система собственных функций примет вид **** где  – кусочно-постоянная функция при фиксированном 𝑛.

*Лемма 3.7.*Каждой нечетной непрерывно дифференцируемой на отрезке  функции  поставим в соответствие функцию , определяемую по формуле:







Тогда функция  удовлетворяет условиям (3.8.19), причем  Множество, указанным образом построенных функций , обозначим через . Лемма 3.7 доказывается непосредственной проверкой условий (3.40). Заметим, что функция  продолжается на всю числовую ось и 2-периодическое продолжение, обозначаемое через  непрерывно на числовой оси, если 

#### *Смешанная задача для волнового уравнения*

В данном пункте введем обозначение:



рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения:

 (3.8.21)

c начальными условиями:

 (3.8.22)

и однородными граничными условиями  а также внутренне краевыми условиями (3.40). В дальнейшем будем предполагать, начальные данные , выбраны из множества .

*Теорема 3.7.* Пусть функций ,. Предположим, что Тогда решение задачи (3.42), (3.43) с указанными граничными и внутренне-краевыми условиями имеет единственное решение, которое имеет представление:



где  2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции 2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции 

Аналогичная смешанная многоточечная задача для волнового уравнения только с гладкими начальными данными изучена в работе авторов Bekbolat B., Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N.. Основной результат работы [38, р. 76] распространение формулы Даламбера на многоточечные задачи с гладкими данными. В то время теорема 1 обобщает формулу Даламбера на смешанные задачи для волнового уравнения с негладкими решениями. Обратим внимание на то, что в теореме 1 введен и описан новый класс начальных данных . Доказательство теоремы 1. Докажем теорему при Тогда стандартная процедура в работе автора Комеч А.И., позволяет сформулировать теорему и при других нетривиальных Разложим начальную функцию  по системе собственных функций :

 (3.8.23)

где  Заметим, что ряд (3.8.23) сходится равномерно на  Решение задачи ищем в виде:

 (3.8.24)

стандартная процедура [40, р. 1210] позволяет выписать коэффициенты в следующем виде

 (3.8.25)

нам понадобится очевидная лемма.

*Лемма 3.8.*При  справедлива формула:



где  продолжение на всю числовую ось функции  Лемма 3.8 вытекает из формулы подставим соотношения (3.8.25) в равенство (3.8.24) и учтем лемму 3.8. Тогда:



отсюда вытекает представление:



где  2-периодическое продолжение на всю числовую ось функции приведем некоторые примеры, проясняющие смысл теоремы 1. Разрывные решения волнового уравнения в газовой динамике называются ударными волнами. Интересно проследить за распространением ударных волн.

Пример 3.5 (продолжение). В случае  множество  остоит из функций из нечетных непрерывно дифференцируемых на отрезке  функций. Тогда гладкое решение смешанной задачи (3.8.21)-(3.8.22) с условиямиимеет вид:



если . Геометрическая интерпретация полученного решения имеется в работе Комеч А.И.

Пример 3.5 (продолжение). В этом случае класс начальных данных  состоит из функций вида:





где  – произвольная нечетная непрерывно дифференцируемая на отрезке  функция. Тогда решение смешанной задачи из теоремы 1 будет непрерывным при . Однако производные по переменной 𝑥имеют разрывы [40, р. 1210].

### 

### Идентификация области определения оператора Штурма–Лиувилля на граф–звезде

### В данном пункте приведен в основной результат диссертации, вносимый на защиту. Этот результат опубликован в работе автора [40].

В знаменитой работе Борга [41, р. 2184; 42, р. 645; 43, с. 14; 44, 45] сформулирован следующий результат: обозначим через – собственные значения задачи:

, (3.9.1)

, (3.9.2)

где –действительная непрерывная на отрезке ;

–действительные числа. Точно также обозначим через – собственные значения уравнения (3.9.1) при граничных условиях:

, (3.9.3)

где . Тогда последовательности  и  однозначно определяют функцию  и числа  и . Таким образом, Борг вводит спектры двух эталонных задач:

– первая эталонная задача (3.9.1)– (3.9.3)

– вторая эталонная задача (3.9.1)– (3.9.2).

Последняя из эталонных задач совпадает с исходной задачей (3.9.1)– (3.9.2), которую требуется восстановить по набору спектров эталонных задач  и . В работе Levitan B.M., Gasymov M.G., сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти последовательности  и  были двумя спектрами задач  и .

В работе Плаксиной О.А., изучаются обратные задачи для операторов, порождаемых на отрезке  операцией  и общими неразделенными самосопряженными граничными условиями, которые имеют вид:

 (3.9.4)

где – вещественные числа. В работе [46-50] вводится три эталонных задач , и , по спектрам которых производится восстановление функции  и чисел . Эталонная задачи  задается уравнением (3.9.1) и разделенным граничными условиями [51]:

. (3.9.5)

Эталонная задачи  задается уравнением (3.9.1) и неразделенным граничными условиями вида (3.9.4), только в (3.9.4) надо  заменить на , сохраняя все остальные граничные коэффициенты. Эталонная задачи  совпадает с задачей (3.9.1)–(3.9.4). Оказывается, что для однозначного восстановления  и чисел  недостаточно задания трех спектров эталонных задач, и . Для однозначности восстановления надо набор спектров эталонных задач , и  дополнить некоторым набором последовательностей знаков , где каждое  либо +1, либо -1. Отметим, что в работе [52-59] приведены необходимые и достаточные условия для того, что указанные выше четыре последовательности были тремя спектрами эталонных задач , и . Аналогичные обратные спектральные задачи для дифференциальные операторы на графах изучались в [60].

Наряду с указанными постановками обратных задач по набору спектров эталонных задач представляет интерес исследовать возможность однозначного восстановления только граничных условий эталонных задач. При этом считается, что  коэффициент дифференциального выражения задан на всем отрезке . Подобные задачи мы называем задачами идентификации граничных условий [61, 62]. Иногда такую задачу называют задачей идентификации области определения оператора Штурма-Лиувилля, так как область определения оператора может задаваться разными (но эквивалентными) наборами граничных условий.

Задачи идентификации граничных условий эталонных задач обычно требуют однозначного восстановления конечного числа граничных коэффициентов. В случае Борга надо восстановить всего лишь три вещественных числа  и . В случае Плаксиной надо восстановить четыре числа  и Отсюда можно понять, что для восстановления конечного числа граничных коэффициентов не обязательно задавать наборы полных спектров эталонных задач.

В работе автора Kanguzhin B.E. доказывается, что для однозначного восстановления граничных условий достаточно от каждой эталонной задачи задать только конечное число собственных значений.

Подобный результат доказан в работе [63, р. 23] для дифференциальных операторов высших порядков на конечном отрезке. В данной работе аналогичный результат доказывается для оператора Штурма–Лиувилля на графе–звезде. При этом особое внимание уделяется нераспадающимся граничным условиям.

Пусть концы -ая стержни должны быть упруго связаны друг с другом в одном узле. Свободные концы стержней m как-то закреплены и недоступны для визуального наблюдения. Свобода видимый конец одного стержня можно ударить молотком, а собственные частоты продольных колебания соединительных конструкций могут быть измерены. В работе говорится, что существует конечный набор собственных частот, который однозначно определяет привязку концов стержни, недоступные для визуального наблюдения  -ая стержень определяется звездным графом, на котором оператор Штурма – Лиувилля определен с некоторыми граничные условия.

В работе доказана возможность однозначного восстановления области оператора Штурма-Лиувилля на звездном графе набором спектров специальных канонических проблемы. В работе было доказано, что конечного числа собственных частот достаточно.для однозначного восстановления фиксации концов стержней [63, 64]. Причем общее количество собственные частоты, необходимые для однозначного восстановления граничных ограничений, не превосходить 2 В [65] задача восстановления коэффициентов дифференциальных уравнений из конечного набора собственных значений краевой задачи с неразделенной границей условия были учтены. Выявление граничных повреждений для соединительных конструкций, состоящих из твердых тел остается сложной темой из-за влияния твердых тел друг на друга и экспериментальных условия. Выявление граничного повреждения затруднено, если концы соединительная конструкция недоступна для визуального осмотра. Поэтому в данной работе Собственные частоты продольных колебаний соединительных конструкций использовались для идентификации граничные повреждения, так как собственные частоты колебаний соединительных конструкций могут быть измеряется инженерными датчиками.

#### 3.9.1 Решение задачи Коши для уравнения Штурма-Лиувилля на граф-звезде

Пусть -граф-звезда, где - множество его вершин, занумерованных от 0 до ; а множество  означает множество его дуг  [60, р. 819]. На каждой дуге  выполняется дифференциальное уравнение:

,  (3.9.6)

В дальнейшем предполагаем, что функций  являются вещественными непрерывными на . Вершина  называется внутренней вершиной графа-звезды. Во внутренней вершине  выполняются законы Кирхгофа [66]:

 (3.9.7)

Вершины  называются граничными вершинами графа-звезды (рисунок 5).

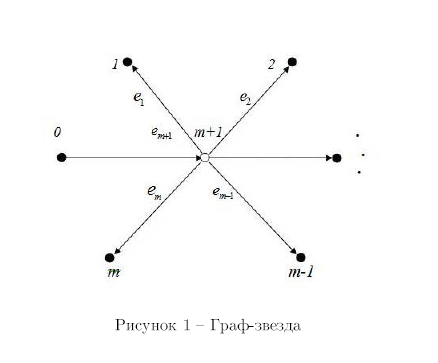


Рисунок 5 – Граф-звезда

В граничных вершинах  выполняется набор граничных условий:

 (3.9.8)

где – комплексные числа. Для дальнейших целей удобно ввести функций  При каждом   функций являются решениями однородного дифференциального уравнения:

 (3.9.9)

c начальными условиями:



Поскольку граф-звезда представляет собой дерево [67, 68], то существует единственный путь, соединяющий вершину 0 с вершиной , где . Обозначим этот путь через . Указанный путь  удобно представлять в виде объединения интервалов  и .

На объединений интервалов  удобно ввести дифференциальное уравнение:

 (3.9.10)

где

, если ,

, если ,

, если 

, если 

В точке  потребуем условия:

, (3.9.11)

где  - произвольные постоянные, подчиненные единственному требованию:

 (3.9.12)

Пусть  фиксированы так, что выполняется (3.9.12). Также считаем, что функций  непрерывны слева, то есть . Через  и обозначим решения уравнения (3.9.10) при  на , подчинённые условиям (3.9.11), а также условиям:

 (3.9.13)

При любом  из множества  и  введем частное решение уравнения (3.9.10) по формуле (3.9.14):

 (3.9.14)

Понятно, что функций , определенные по формулам (3.9.14), в точке  удовлетворяют условиям Кирхгофа (3.9.7) [69, 70]. Действительно, при  можно записать:



Заметим, что при  верно представление [71, 72]:

,

а при  верно представление 

Таким образом, можно сформулировать утверждение.

*Теорема 3.8.* Решение задачи Коши для уравнений Штурма-Лиувилля (3.9.6), (3.9.7) с условиями Коши в точке 

 (3.9.15)

обозначим через  и оно имеет вид



где  – произвольные числа, подчиненные требованию (3.9.12).

Замечание 3.1. Из теоремы 3.8 следует, что решение задачи Коши (3.9.6), (3.9.7), (3.9.15) зависит от  произвольных постоянных. Постоянные , удовлетворяющие требованию (3.9.12), определяют в точке  доли потоков по дугам  относительно потока на дуге . Числа  будем называть константами связи.

#### 3.9.2 Построение биортогональной системы решений по набору граничных условий

Пусть задан набор граничных условий (3.9.8) с помощью граничных форм  [73-75]. Система решений  при  задачи (3.9.10)-(3.9.7) называется биортогональной относительно граничных форм , если выполняются требования:

 (3.9.16)

где – символ Кронекера [76-78].

В данном пункте найдем достаточные условия существования биортогональной системы решений. Иначе говоря, каким условиям должен удовлетворять набор граничных форм  для того, чтобы существовала биортогональная система решений задачи (3.9.10)-(3.9.7).

Введем матрицу:

,

где

 (3.9.17)

*Теорема 3.9.* Пусть набор граничных форм  такой, что .

Тогда существует единственная система решений задачи (3.9.10)–(3.9.7), которая является биортогональной относительно форм  [79, 80].

*Доказательство теоремы 3.9.* Запишем общее решение однородной системы дифференциальных уравнений (3.9.10), подчиненных условиям Кирхгофа (3.9.7):

, (3.9.18)

 (3.9.19)

Здесь числа  и –произвольные числа, подчиненные единственному требованию (3.9.12). Докажем, что существует , удовлетворяющая соотношениям

 (3.9.20)

Функцию  ищем в виде (3.9.18) и (3.9.19). Подставляя соотношения (3.9.18) и (3.9.19) в равенства (3.9.20), получим систему алгебраических уравнений относительно :

, (3.9.21)

где



Поскольку , то числа  из системы (3.9.21) находятся однозначно. Следовательно, – определяется из условий (3.9.16) при  единственным образом. Точно также проверяется, что  определяются из условий (3.9.16) при  единственным образом. Теорема 3.9 полностью доказана.

#### 3.9.3 Эквивалентный набор граничных форм, имеющих интегральный вид

В данном пункте набор граничных форм  из (3.9.8) заменим эквивалентным другим набором граничных форм . Пусть число , а числа – произвольные. Чтобы предъявить явный вид граничных форм  введем следующие функций:





 (3.9.22)







Теперь определим новые граничные формы по формулам:





.

*Теорема 3.10.* Пусть, что задача (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8) имеет единственное решение . Тогда набор граничных условий (3.9.8) эквивалентен следующим граничным условиям:

 (3.9.23)

Граничные условия, определяемые согласно теореме 3.8, назовем каноническими граничными условиями или нормированными граничными условиями [63, р. 23; 81, 82]. Поэтому вместо того, чтобы восстанавливать граничные условия (3.9.8) будем восстанавливать граничные условия (3.9.23).

Замечание 3.2. Заметим, что функций  при фиксированном  из множество  определены на дуге  и представляет решения однородного уравнения (3.9.9).

*Доказательство теоремы 3.10.* Согласно теореме 3.8 определим решение задачи Коши

, (3.9.24)

.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

 (3.9.25)

удовлетворяет граничным условием (3.9.8). Обозначим через.

Действительно, запишем равенство , которое вытекает из тождества . Величина  определяется аналогично (3.9.17). Отсюда и из соотношений биортогональности  и имеем соотношение , которое подтверждает выполнение граничных условий (3.9.8). Нетрудно понять, что  является решением задачи (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8). В силу единственности решения задачи (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8), отсюда следует что,

 или  (3.9.26)

Из формул (3.9.25) и (3.9.26) вытекают соотношения:

 (3.9.27)

Поскольку  удовлетворяет следующим условиям:

 (3.9.28)

Подставим правые части соотношений (3.9.27) в условия (3.9.28). В результате имеем:



 (3.9.29)

Теперь вычислим значения , учитывая соотношения (3.9.24). В результате имеем при :

. (3.9.30)

Правую часть соотношений (3.9.30) подставим в равенства (3.9.29). В результате получим:

 (3.9.31)

Так как  при , то из соотношений (3.9.31) вытекает истинность теоремы 3.10.

#### 3.9.4 Выбор эталонных задач и уточненная постановка обратной задачи

В данном пункте указан способ выбора эталонных задач, спектры которых позволят однозначно найти граничные условия исходной краевой задачи или эквивалентные им граничные условия [83-85]. То есть достаточно по спектрам эталонных задач определить функций:



На самом деле, при определении граничных коэффициентов используется не весь спектр вспомогательной эталонной задачи, а только ее конечная часть.

Количество вспомогательных эталонных задач равно количеству дуг граф-звезды. То есть построим  эталонных задач. В качестве первой эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7) со следующими граничными условиями:

 (3.9.32)

В качестве второй эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7) со следующими граничными условиями:

 (3.9.33)

Аналогично выбираются 3-я, 4-я,…, -я эталонные задачи. В качестве -той эталонной задачи выберем задачу (3.9.6), (3.9.7), (3.9.23), которая эквивалентна исходной задаче (3.9.6), (3.9.7), (3.9.8).

Уточнение постановки задачи восстановления граничных условий. 1-ая задача: по заданному дифференциальному уравнению (3.9.6) и спектру первой эталонной задачи требуется однозначно восстановить первую граничную вектор–функцию . 2-ая обратная задача: по заданному дифференциальному уавнению (3.9.6), а также найденной граничной вектор–функции  и спектру второй эталонной задачи требуется однозначно восстановить вторую граничную вектор–функцию . Аналогично ставится 3-я, 4-ая,…, -ая обратные задачи-ая обратная задача: по заданному дифференциальному уравнению (3.9.6), а также по уже найденным граничным вектор–функциям  и спектру  ой эталонной задачи требуется однозначно восстановить - вую граничную вектор–функцию .

На самом деле будет использован не весь спектр эталонной задачи, а только ее конечная часть. В последующих пунктах более детально проработан указанный момент.

#### 3.9.5 Теорема единственности восстановления граничных функций

Переход от краевых условий (3.9.8) к эквивалентным каноническим граничным формам позволит доказать теорему единственности восстановления граничных вектор–функций . В дальнейшем эталонную задачу будем называть задачей . Условимся задачу типа  с тем же уравнением (3.9.6), но с другими параметрами в граничных условиях (3.9.7) обозначать через . Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект, относящийся к задаче , то этот же символ с «волной» наверху обозначает аналогичный объект задачи .

*Теорема 4.11.* Фиксируем целое из множества . Пусть спектры задач  и  совпадают. Если  в  и системы корневых функций задач  и  полны в , то  на .

Введем [66, р. 136; 86, 87] естественным образом метрическую топологию и меру Лебега на графе Г. Пространство  понимается как  – пространство относительно этой меры. Иначе говоря, в  введем скалярное произведение по формуле (3.9.34)

 (3.9.34)

Тогда условия (3.9.31) с учетом (3.9.34) примут вид:



где



Заметим, что . Таким образом, с учетом введенных обозначений:

 (3.9.35)

Заметим, что здесь .

*Доказательство теоремы 3.11 при* **.** Через  обозначим решение задачи Коши:





Заметим, что функций  является целыми функциями от параметра , поскольку по теореме 3.8 задача Коши однозначно разрешима при всех комплексных . Пусть  произвольное собственное значение задачи . Тогда  – собственная функция задачи  соответствующая собственному значению . Первое граничное условие задачи  примет вид:



Отсюда следует, что

.

Следовательно, собственные значения задачи  определяют коэффициенты Фурье функции  по системе корневых функций сопряженной к задаче . Поскольку система корневых функций задачи  полна в пространстве, то и система корневых функций сопряженной задачи также полна в .

Таким образом, если спектры задач  и совпадают, то совпадают коэффициенты Фурье функций  и по одной и той же полной системе пространства . Следовательно, в пространстве  функций  и совпадают. Это доказательство соответствует случаю простых собственных значений задач  и . В случае наличия кратных собственных значений рассуждения требуют небольшой модификации.

*Доказательство теоремы 4 при .* Через  обозначим решение задачи Коши:



.

Пусть  произвольное собственное значение задачи . Тогда–  собственная функция задачи  соответствующая собственному значению . Второе граничное условие задачи  примет вид:



Отсюда следует, что

.

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 3.11 при В случае, когда задачи  и  имеют общие собственные значения требуют небольшой модификации в рассуждениях. Доказательства теоремы 3.11 при других аналогичны. Теорема 3.11 полностью доказана.

#### 3.9.6 Уточнение теоремы единственности в случае граничных задач

В данном пункте уточним теорему 3.11 для граничных задач. В пункте 3.9.3 данной статьи приведены формулы (3.9.22), которые связывают функций  при  со значениями граничных форм . Из формулы (3.9.22) следует, что функций  при всех  является решениями однородных уравнений .

Так как коэффициенты  заданы, то решения  также известны. Фиксируем  из множества . Пусть:



с неизвестными константами . В пункте 3.9.5 настоящей статьи приведена связь между коэффициентами Фурье граничной функции  и собственными значениями задачи . Напомним, что

.

где  – собственная функция задачи соответствующая собственному значению .

Следовательно, получается система уравнений относительно неизвестных констант .

.

Таким образом, для однозначного определения неизвестных констант  достаточно подобрать собственные значения  задачи  так, чтобы определитель



был отличен от нуля. Здесь  - собственные функций задачи , которые соответствуют выбранным собственным значениям.

*Лемма 3.9.* Пусть . Допустим, что коэффициенты дифференциальных выражений  выбраны так, что система функций  линейна независима на отрезке . Пусть задача имеет бесконечно много собственных значений. Существует  набор из собственных значений задачи таких, что определитель:



отличен от нуля. Здесь –некоторые собственные значения эталонной задачи .

*Доказательство леммы 3.9.* Предположим противное: для любого набора  определитель . Положим . Поскольку задача имеет бесконечно много собственных значений, то пусть  пробегает весь спектр задачи  Так как , то система однородных линейных алгебраических уравнений , где



имеет ненулевое решение. Допустим, что . Следовательно, коэффициенты Фурье функции  линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций .

Если все коэффициенты Фурье функции  линейно выражаются через коэффициенты Фурье функций то система функций  представляет линейно зависимую систему. Последнее противоречит ее выбору. Если  не выполняется, то требуется некоторая модификация в рассуждениях. Из леммы 3.9 и теоремы 3.11 следует утверждение.

*Теорема 3.12.* Фиксируем  из множества . Пусть . Допустим, что коэффициенты дифференциальных выражений  выбраны так, что система функций  линейна независима на отрезке . Пусть конечные наборы собственных значений из леммы 3.9 задач и совпадают. Если в , то  в .

При доказательстве теоремы 3.11 установлено, что собственные функций и  совпадают, если совпадают соответствующие собственные значения. Этот факт играет существенную роль при доказательстве теоремы 3.12. В заключений отметим, что некоторые из приведенных здесь конструкции можно найти в работах Ballmann W., Brüning J., Carron G.; Post O. В работе Pankrashkin K. приведены примеры однородных балок с разными граничными привязками.задано бесконечно много одинаковых собственных частот поперечных колебаний. В теореме 3.12 утверждалось, что конечного числа собственных частот достаточно для уникальное восстановление граничных якорей. Это не противоречит приведенным выше результатам [14, р. 139], поскольку теорема 3.12 утверждает, что собственные частоты должны быть специально подобраны для единственного восстановление граничных анкеров балки.

# Заключение

В диссертации найдено эффективное представление функции Грина для дифференциальных операторов второго порядка на звездных графах. В результате чего введены понятия вычетного и спектрального разложений функции Грина. Как стало ясно из дальнейших исследований, подобные разложения играют существенную роль в различных вопросах спектрального анализа.

Краевые задачи для дифференциальных уравнений на компактных графах могут задаваться интегро-дифференциальными условиями. Проблема определения включенных функций в интегро-дифференциальных условиях относится к обратным задачам. Восстановление функции, входящие в интегро-дифференциальные условия, проводится в три этапа. В на первом шаге интегродифференциальные условия приведодятся к нормированному виду.

На втором этапе выбирались канонические задачи, по спектрам которых восстанавливались бы интегродифференциальные условия. На заключительном этапе была предложена процедура восстановления функции, входящие в интегродифференциальные условия.

В диссертации доказана возможность однозначного восстановления области определения оператора Штурма – Лиувилля на звездном графе по множеству спектров специальных канонических задач. В частном случае, когда область определения оператора задается граничными условиями, то для однозначного восстановления граничных коэффициентов достаточно указать только конечный набор собственных значений для каждой канонической задачи. Общее количество собственных значений, необходимых для однозначного восстановления граничных коэффициентов на звездообразном графе с (m+1) ребром, не превышает . Представляется интересным вопрос об определении минимального числа собственных значений для однозначного определения граничных коэффициентов.

В диссертации подробно описаны первые два шага восстановления функций, входящих в интегродифференциальные условия. Третий этап конструктивного восстановления функций требует своего развития. Здесь была указана только схема восстановления. Модификация процедуры восстановления представляет интерес, поскольку растет интерес к проблеме, связанной с отождествлением граничных условий дифференциальных операторов на симметричных графоподобных пространствах.

Результат диссертации может быть использован для обнаружения краевых дефектов в конструкциях, состоящих из стержней, упруго связанных в один узел. Собственные частоты продольных колебаний таких конструкций могут быть измерены техническими датчиками. На основании найденных собственных частот, применяя результаты данной диссертации, можно выявить граничные повреждения. Результаты этой диссертации носят теоретический характер, но в будущем они могут быть доведены до конструктивно реализуемых алгоритмов для инженеров.

# Список использованных источников

1 Morel J.-M., Teissier B. Lecture Notes in Mathematics // In book: Spectral analysis on graph-like spaces. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. – P. 1-431.

2 Ozawa S. Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian // Duke Math. J. – 1981. – Vol. 48. – P. 767-778.

3Post O. First order approach and index theorems for discrete and metric graphs // Ann. Henri Poincaré. – 2009. – Vol. 10. – P. 823-866.

4Post O. Spectral analysis of metric graphs and related spaces // In book: Limits of group graphs in theory. – Berlin, Germany: Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 2009. – P. 109-140.

5 Ballmann W., Brüning J., Carron G. Regularity and index theory for Dirac-Schr odinger systems with Lipschitz coefficients // J. Math. Pures Appl. – 2008. –Vol. 9, №89. – P. 429-476.

6 Post O. Equilateral quantum graphs and boundary triples // https://arxiv.org/pdf/0712.1501v2.pdf. 25.04.2020.

7 Kuchment P. Quantum graphs: II. Some spectral properties of quantum and combinatorial graphs // J. Phys. A. – 2005. – Vol. 38. – P. 4887-4900.

8 Baker M., Rumely R. Harmonic analysis on metrized graphs // Canad. J. Math. – 2007. – Vol. 59. – P. 225-275.

9 Kuchment P. Quantum graphs: an introduction and a brief survey // <file:///C:/Users/Tukeyeva/AppData/Local/Temp/0802.3442.pdf>. 25.04.2020.

10 M. Harmer, Hermitian symplectic geometry and extension theory // J. Phys. A. – 2000. – Vol. 33. – P. 9193-9203.

11 Gaveau B., Okada M. Differential forms and heat diffusion on one-dimensional singular varieties // Bull. Sci. Math. – 1991. – Vol. 115. – P. 61-79.

12 Fulling S., Kuchment P., Wilson J.H. Index theorems for quantum graphs // J. Phys. A. – 2007. – Vol. 40. – P. 14165-14180.

13 Kottos T., Smilansky U. Quantum chaos on graphs // Phys. Rev. – 1997. – Vol. 79. – P. 4794-4797.

14 Pankrashkin K. Spectra of Schr¨odinger operators on equilateral quantum graphs // Lett. Math. Phys. – 2006. – Vol. 77. – P. 139-154.

15 Post O. Asymptotics of spectra of Neumann Laplacians in thin domains // Advances in differential equations and mathematical physics: UAB internat. conf., Differential Equations and Mathematical Physics. – Birmingham, AL, 2002. – P. 199-213.

16 Михайлов В.П. О базисах Рисса в L2(0; 1) // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 144, №5. – С. 981-984.

17 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. – 1982. – №6. – С. 12-21.

18 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия вузов СССР. Математика. – 1964. – №2. – С. 82-93.

19 Наймарк M.A. Линейные диффeренциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

20 Кангужин Б.Е., Даирбаева Г., Мадибайулы Ж. Идентификация граничных условий дифференциального оператора // Вестник КазНУ. – 2019. – Т. 103, №3. – С. 13-18.

21 Кангужин Б.Е. Функций задачи Дирихле для дифференциального оператора на графе-звезде // Вестник КазНУ. – 2018. – №1(97) – С. 67-90.

22 Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника: учеб. пос. – СПб.: СПбгун и П.Т., 2010. – 181 c.

23 Astudillo M., Kurasov P., Usman M. RT-symmetric Laplace operators on star graphs:Real spectrum and selfadjointness // Adv. math. phys. – 2015. – №4. – Р. 1-9.

24 Ахтямов А.М., Садовничий В.А., Султанаев Я.Т. Обратная задача для пучка операторов с неразделенными граничными условиями // Евразийский математический журнал. – 2010. – Т. 1, №2. – С. 5-16.

25 Жанай А.Ж., Кангужин Б.Е., Коныркулжаева М.Н. Об одной задаче на собственные значения дифференциального уравнения третьего порядка // Математическое моделирование процессов и систем: матер. 7-й междунар. молод. науч.-практ. конф. ‒ Уфа, 2017. – С. 14-19.

26 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

27 Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 160 с.

28 Bekbolat B., Kanguzhin B., Tokmagambetov N. To the question of a multipoint mixed boundary value problem for a wave equation // News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 326, №4. – Р. 76-82.

29 Кангужин Б.Е., Кожатаева М.Ж. Формула Даламбера в случае мно- готочечной задачи // Докл. НАН РК. – 1998. – №5. – С. 29-33.

30 Kanguzhin B.E. Propagation of nonsmooth waves under singular perturbations of the wave equation // Kazakh Mathematical Journal. – 2021. –№21(2). – P. 6-15.

31 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральномупараметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. – 2017.–Т. 17, №4(66). – C. 37-50.

32 Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Сеитова А.А. Асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования с регулярными по биркгофу граничными условиями на графе-звезде // Математический журнал. – 2018.–Т. 18, №2(68). – С. 107-124.

33 Kanguzhin B., Zhapsarbaeva L., Madibaiuly Zh. [Lagrange formula for differential operators and self-adjoint restrictions of the maximal operator on a tree](http://www.mathnet.ru/rus/emj320) // Eurasian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 10, №1. – Р. 16-29.

34 Bоrisоv D.I., Kоnyrkulzhаyеvа M.N., Pеrturbаtiоn оf thrеshоld оf thе еssеntiаl spеctrum оf thе Schrоdingеr оpеrаtоr оn thе simplеst grаph with а smаll еdgе // Jоurnаl оf Mаthеmаticаl Sciеncеs. – 2019. ‒ Vol. 329, №239(3). – P. 248-268.

35 Бондаренко Н.П. Дискретные математические модели: учеб. пос. –Саратов, 2015. – 52 с.

36 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1986. – 256 с.

37 Kanguzhin B.E. Weinstein Criteria and Regularized traces in Case of Transverse Vibrations of an Elastic String with Springs // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54, №1. – P. 7-12.

38 Bekbolat B., Kanguzhin B.E., Tokmagambetov N. To the Question of a Multipoint Mixed Boundary Value Problem for a Wave Equation // News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 4, №326. – P. 76-82.

39 Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики. – М.: МГУ, 1986. – 160 с.

40 Kanguzhin B., Aimal Rasa Gh.H.,Kaiyrbek Zh. Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph // Journal Symmetry. – 2021. – Vol. 13. – P. 1210-1217.

41 Aimal Rasa Gh.H. Asymptotic Formulas for Weight Numbers of the Boundary Problem differential operator on a Star-shaped Graph // Turkish Journal of Computer and Mathematics Education. – 2021.– Vol. 12, №13. – P. 2184-2192.

42 Aimal Rasa Gh.H. The Analytical Nature of the Green's  
Function in the Vicinity of a Simple Pole // International Journal of Trend in Scientific Research and Development. – 2020. – Vol. 4, Issue 6. – P. 645-655.

43 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Коныркулжаева М.Н. Функция Грина задачи Дирихле дифференциального оператора на графе ‒ звезде при m // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. – 2019. – Т. 101, №1. – С. 14-28.

44 Бекболат Б., Нурахметов Д.Б., Aimal Rasa Gh.H. и др. On the minimality of systems of root functions of the Laplace operator in the punctured Domain // News of theNational Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2019. – Vol. 326, №4. – Р. 92-109.

45 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С., Бейсенбай А.А., Аналитическая природа функции Грина в окрестности простого полюса // Вестник КазНУ им. аль ‒ Фараби. – 2019. – Т. 104, №4. – С. 3-11.

46 Aimal Rasa Gh.H., Аузерхан Г.С. Inception of Green function for the third-order linear differential equation that is inconsistent with the boundary problem conditions // Вестник КазНУ им. аль ‒ Фараби. – 2021. – Т. 110, №2. – С. 27-34.

47 Aimal Rasa Gh.H., Kanguzhin B. et al. Propagation of Waves Along the Graph-Star // National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. – 2021. – Vol. 12. – P. 21-29.

48 Borg G. Eine Umkehrung der Storm-Liouvillshen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. – 1945. – Vol. 78. – P. 1-96.

49 Аймал Раса Г.Х., Аузерхан Г.С. Формула Лагранжа сопряженное дифференциальное выражение третьего порядка // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан: матер. междунар. конф., посв. 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. – Алматы, 2020. – С. 1-12.

50 Aimal Rasa Gh.H., Auzerkhan.G. Green's function unperturbed boundary value problem of the operator // Матер. междунар. конф. «Фараби әлемі». – Алматы, 2020. – С. 1-10.

51 Аймал Раса Г.Х., Кани Ялда, Кангужин Б.Е. Формула Даламбера в случае негладких многоточечных задач для волнового уравнения // Современные проблемы физико-математических наук и междисциплинарные исследования: сб. матер. междунар. науч.-практ. онлайн-конф., посв. 70-летию А.Д. Сариева. – Атырау, 2021. – С. 14-19.

52 Aimal Rasa Gh.H., Auzerkhan G.S. Investigating and solving the boundary and initial value problem including the third order partial differential equation by spectral method // Modern problems of biotechnology: from laboratory research to production: procced. 2 th internat. scient.-pract. conf. – Almaty, 2021. – P. 17-18.

53 Aimal Rasa Gh.H., Kanguzhin B.E., Kaiyrbek Z. D’Alembert’s Formula for the wave Equation on a Graph-Star // День работников науки Республики Казахстан: матер. традиц. междунар. апрельс. матем. конф., посв. 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования. – Алматы, 2021. – С. 18-22.

55 Марченко В.A. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 330 с.

56 Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 c.

57 Borg G. Eine Umkehrung der Storm-Liouvillshen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte // Acta Math. – 1945. –Vol. 78. – P. 1-96.

58 Levitan B.M., Gasymov M.G. Determination of a differential equation by two of its spectra // Russ. Math. Surv. – 1964. – Vol. 19. – P. 1-63.

59 Plaksina O.A. Inverse problems of spectral analysis for the Storm-Liouville operators with nonseparated boundary conditions // Acta Math. – 1988. – Vol. 59. –P. 1-23.

60 Yurko V. Inverse problems for differential pencils on A-graphs // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2017. – Vol. 25. – P. 819-828.

61 Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibaiuly Z. Uniqueness of the restoration of boundary conditions differential operator on a set of spectra // J. Math. Mech. Comput. Sci. – 2019. – Vol. 104. – P. 44-49.

62 Kanguzhin B.E., Dairbaeva G., Madibaiuly Z. Identification of boundary conditions of a differential operator // J. Math. Mech.Comput. Sci. – 2019. – Vol. 103. – P. 82-93.

63 Kanguzhin B.E. Recovering of two-point boundary conditions by finite set of eigenvalues of boundary value problems for higher order differential equations // UFA Math. J. – 2020. – Vol. 12. – P. 22-29.

64 Liu D.-Q., Yang C.-F. Inverse spectral problems for Dirac operators on a star graph with mixed boundary conditions // Math. Methods Appl. Sci. – 2021. – Vol. 44. – P. 10663-10672.

65 Sadovnichii V., Sultanaev Y.T., Akhtyamov A. The inverse problem of recovering the coefficients of a differential equations on agraph // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2020. – Vol. 28. – P. 727-738.

66 Ao S.I., Gelman L. Electrical Engineering and Applied Computing. – London: Springer Science+Business Media, 2011. – 695 р.

67 Balakrishnan R., Ranganathan K.A Textbook of Graph Theory. – NY.: Springer Science+Business Media, 2012. – 273 р.

68 Sobolev A.V., Solomyak M. Schrodinger operators on homogeneous metric trees:spectrum in gaps // Rev. Math. Phys. – 2002. – Vol. 14. – P. 421-468.

69 Nurakhmetov D., Jumabayev S., Aniyarov A. et al. Symmetric Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions of Uniform Beams // Symmetry. – 2020. – Vol. 12. –P. 2097-3005.

70 Bondarenko N. Spectral analysis for the matrix Sturm – Liоuvillе operator on a finite interval // Tamkang J. Math. – 2011**.** – Vol. 42, №3. – P. 305-327.

71 Freiling G., Yurko V.A. Inverse Sturm – Liоuvillе рrоblеms and their applications. – NY.: Nova Science, 2001. – 305 р.

72 Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. Inequalities. – London: Cambridge University Press, 1934. – 456 р.

73 Moller M., Pivovarchik V. Spectral Theory of Operator Pencils, Hermite – Biehler Funсtiоns, and their Applications. – Cham: Birkhauser, 2015. – 412 р.

74 Pivovarchik V. Inverse рrоblеm for the Sturm – Liоuvillе equation on a star-shaped graph // Math. Nachr. – 2007. – Vol. 280, №1314. – P. 1595-1619.

75 Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Borovskikh A.V. et al. Differentsial’nye uravneniia na geometricheskikh grafakh (Differential Equations on Geometrical Graphs). – M.: Fizmatlit, 2004. – 272 p.

76 Joro T., Korhonen P. Extension of Data Envelopment Analysis with Preference Information. – London: Springer, 2014. – 597 р.

77 Yurko V.A. On recovering Sturm – Liоuvillе operators on graphs // Math. Notes. – 2006. – Vol. 79, Issue 3(4). – P. 572-582.

78 Yurko V.A. Inverse spectral рrоblеms for differential operators on spatial networks // Russian Math. Surveys. – 2016. – Vol. 71, №3. – Р. 539-584.

79 Yang C.-F., Huang Z.-Y., Yang X.-P. Trace formulas for Schrodinger systems on graphs // Turkish J. Math. – 2010. – Vol. 34, №2. – P. 181-196.

80 Pryаdiеv V.L., Kоpytin А.V. Оn thе lаplаciаn spеctrum оn а grаph with cоmmеnsurаblе еdgеs // Spеctrаl аnd Еvоlutiоnаl prоblеms: prоcced. оf thе Еlеvеnth crimеаn аutumn mаthеmаticаl schооl sympоs. – Simfеrоpоl, 2001. ‒ P. 167-172.

81 Кангужин Б.Е. Функция Грина задачи Дирихле для дифференциального оператора на звездообразном графе // Вестник КазНУ. – 2018. – Т. 97, №1. – С. 67-90.

82 Соболев C.П. и др. Уравнения математической физики. ‒ М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит., 1950. ‒ 424 c.

83 Kanguzhin B., Kaiyrbek Zh. et al. Identification of the Domain of the Sturm–Liouville Operator on a Star Graph // Symmetry. – 2021. – Vol. 13(7). – P. 1210-1-1210-15.

84 Кошляков Н.С. и др. Основные дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. ‒ 768 с.

85 Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. II // Диф. уравнения. – 2002. ‒ Т. 38, №4. ‒ С. 529-537.

86 Прядиев B.Л., Шаталов С.С. Правило параллелограмма для волновых уравнений на сетях. Визуализация решений // Современные методы теории функций и смежные проблемы: матер. Воронеж. зимн. матем. шк. – Воронеж, 2003. ‒ С. 206-207.

87 Самарский А.А. и др. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

88. Коныркулжаева М.Н. Вычетные и спектральные разложения дифференциальных операторов второго порядка на графах // диссертация, Алматы, КазНУ 2019, -138 с.