Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

ӘОЖ 517.927:517.956.6 Қолжазба құқығында

**АДИЛ НАУРЫЗБАЙ**

**Бөлшек ретті дифференциалдау операторлы аралас парабола-гиперболалық теңдеу үшін шекаралық есептер**

6D060100 – Математика

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңсешілер:

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор Бердышев Абдумаувлен,

Абай атындағы ҚазҰПУ

Шетелдік ғылыми кеңесші:

PhD, профессор Михаил Ружанский,

Гент университеті, (Бельгия)

Қазақстан Республикасы

Алматы, 2024

МАЗМҰНЫ

[НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР 3](#_Toc165547112)

[КІРІСПЕ 4](#_Toc165547113)

[I БӨЛШЕК РЕТТІ АРАЛАС ДИФФУЗИЯЛЫҚ-ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ЛОКАЛДІ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МЕН ВОЛЬТЕРРЛІГІ 29](#_Toc165547114)

[1.1 Диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін бірдей сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттарымен берілген есеп 29](#_Toc165547115)

[1.2 Әр түрлі сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттары бар диффузиялық-гиперболалық теңдеуге арналған есеп 45](#_Toc165547116)

[1.3 Диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін локалді емес шарттарымен берілген есеп 60](#_Toc165547117)

[II БӨЛШЕК РЕТТІ АРАЛАС ПАРАБОЛАЛЫҚ-ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЛОКАЛДІ ЕСЕПТЕРДІҢ СПЕКТРАЛДІ ҚАСИЕТТЕРІ 66](#_Toc165547118)

[2.1 Диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді есептердің шешімділігі мен вольтеролігі 66](#_Toc165547119)

[2.2 Диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді және локалді емес есептердің меншікті мәндерінің шешімділігі және бар болуы 75](#_Toc165547120)

[ҚОРЫТЫНДЫ 80](#_Toc165547121)

[ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ 82](#_Toc165547122)

**НОРМАТИВТІК СІЛТЕМЕЛЕР**

Бұл диссертациялық жұмыста келесі нормативтік сілтемелер қолданылды:

№ 407-IV ҚРЗ Қазақстан Республикасының «Ғылым туралы» Заңы. 18.02.2011 ж. (01.05.2024ж. уақытқа өзгерістерімен және толықтыруларымен) https://online.zakon.kz/Document/?doc\_id=30118747

МЕМСТ 7.32-2001. Ғылыми-зерттеу жұмысы туралы есеп. Құрылымы мен рәсімдеу ережелері (2006 жылғы өзгерістерімен)

МЕМСТ 7.1-2003 Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Жалпы талаптары мен құрастыру ережелері.

# **КІРІСПЕ**

**Зерттеудің өзектілігі.** Бөлшекретті туындылар мен интегралдар теориясы, қазіргі таңда әлемдік мәселелерді нақты модельдеу үшін қолданылатын заманауи математиканың кең саласына айналуда. Бөлшек туындыларды енгізу арқылы дербес туындылы классикалық дифференциалдық теңдеулерді жалпылайтын бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер физика, инженерия, биология, экономика, экология және жаратылыстанудың басқа салаларында күрделі ішкі құрылымы бар ортада болатын процестерді модельдеуге мүмкіндік береді. [1-37]

Бөлшек ретті есептеулер 1695 жылы Лопиталдың Лейбницке қойған  туындыcының мәнін бүтін емес - үшін қалай анықтауға болады деген сұрағының нәтижесінде бүтін ретті есептеуді жалпылау ретінде пайда болды. Бөлшек ретті есептеулер пайда болғаннан бері көптеген зерттеушілер бұл салаға үлкен үлес қосты, олардың ішінде Л.Эйлер, Дж.Л.Лагранж, П.-С. Лаплас, Дж. Фурье, Н. Х. Абель және Дж. Лиувилл сияқты танымал есімдер [38-39] бар.

Бөлшек ретті интегралдар мен туындылар үшін Риман-Лиувилл, Капуто, Рисс, Грюнвальд-Летников, Маршо, Хифлер және Вейл сияқты ғалымдар бірнеше анықтамалар ұсынған [40].

Капуто мағынасындағы бөлшек ретті туындымен салыстырғанда бірқатар бөлшек ретті туындылар анықтамаларының айырмашылығы, тұрақты шаманың туындысы нөлге тең деген қасиетті қанағаттандырмайтынында. Бұл артықшылық Капуто туындысын көптеген жағдайларда қолданған тиімді екенін білдіреді. Бүгінгі күні кеңінен қолданылатын басқа анықтамалар Риман-Лиувилль, Грюнвальд-Летников, Маршо, Хифлер, Джрбашян анықтамалары, себебі өткен шақ осы күнді айқындайтыны белгілі.

Қазіргі таңда бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің теориялық және қолданбалы аспектілеріне арналған көптеген мақалалар мен кітаптар бар, жоғарыда келтірілген әдебиеттерге қоса мына жұмыстарды [41-44] атап өткен орынды.

Осы саладағы зерттеулер “Fractional Calculus and Applied Analysis”, “Journal of Computational Physics”, “Communications on Nonlinear Science and Numerical Simulation”, “Дифференциальные уравнения” және т. б. сияқты халықаралық журналдарда кеңінен таныстырылған. Бұл дереккөздер көбіне осы саладағы соңғы жетістіктерді қамтиды және Scopus немесе Web of Science сияқты халықаралық базалар арқылы қол жетімді.

Диффузия мен толқындық процестердің классикалық модельдеріне, сондай-ақ жаратылыстанудың басқа модельдеріне бөлшек ретті есептеуді енгізу ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады сонымен қатар ол табиғатта және технологиялық жүйелерде болатын күрделі процестерді дәлірек модельдеуді қамтамасыз етеді. Аталған теңдеулер орталардың жадыда сақтауы мен біртекті еместігін, сондай-ақ олардың мүмкіндіктерінің едәуір кеңеюіне әкелетін қалыптан тыс таралу және диффузия процестерін ескеруге мүмкіндік береді, бұл құбылыстардың кең класын жоғары дәлдікпен сипаттайды. Бұл бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерін зерттеуді өзекті ғана емес, сонымен қатар ғылыми зерттеулердің перспективалық бағытына айналдырады.

Физикада бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулер кеуекті материалдар немесе фракталдық құрылымдар сияқты біртекті емес және күрделі құрылымды ортадағы қалыптан тыс диффузияны сипаттау үшін қолданылады. Мысал ретінде классикалық диффузия заңдары қолданылмайтын күрделі ішкі құрылымы бар материалдардағы жылудың таралуын модельдеуді келтіруге болады. Бөлшек теңдеулер қоршаған ортаның құрылымдық ерекшеліктеріне байланысты жадыда сақтау әсерлері мен диффузия жылдамдығының өзгеруін (вариацияларын) дәл есепке алуға мүмкіндік береді [45-95].

Инженерлік қосымшаларда бөлшек ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер басқару, электроника және материалтану жүйелеріндегі процестерді талдау үшін қолданылады. Олар дисперсия және сіңіру орталарында электромагниттік толқындарды, кеуекті ортадағы сұйықтықтардың динамикасын және медициналық диагностикада тіндерде ультрадыбыстық толқындардың таралуын модельдеуге мүмкіндік береді [96]. Бөлшек ретті модельдер тиімді құрылғылар мен технологияларды дамытуға мүмкіндік беретін жүйелердің нақты тұрпатының жақсартылған сипаттамасын айқындайды [97]. Жел энергетикасында жасанды нейрондық желілерде бөлшек ретті белсенділендіру функциясы қолданылады. Бұл нейронның шығу деректерін есептеу үшін бүтін емес көрсеткіштерді қолданып, белгілі бір нейрондық желілердің жұмысын жақсарта алады.Белсенділендіру функциялары нақты модельдеу мен деректер есептеріне сәйкес келетін бірегей қасиеттерге ие.

Олар қарапайым белсенді функциялардың көмегімен тиімді шешілмейтін берілгендердегі ұзақ мерзімді тәуелділіктер мен сызықтық емес қатынастарды нақтылау үшін пайдалы, мысалға [98] сияқты.

Биология мен медицинада бөлшек дифференциалдық теңдеулер әртүрлі процестерді модельдеу үшін қолданылады, атап айтқанда жүйке импульстарының таралуы, жасуша мембраналарындағы заттардың диффузиясы және молекулалардың ұлпалар арқылы тасымалдануы [99]. Бұл модельдер күрделі биологиялық процестердің механизмдерін түсінуге және ауруларды емдеу мен диагностикалаудың жаңа әдістерін жасауға ықпалды.

Экология мен эпидемиологияда кеңінен байқалатын жады түрлерінің бірі-гистерезис. Гистерезис кезінде жүйенің қазіргі жағдайы тек ағымдағы жағдайларға ғана емес, алдыңғы жағдайларға да байланысты, яғни өткен оқиғалар ағымдағы динамикаға әсер етеді [100-103]. Қандай да бір тірі организмдердің қорғаныс механизмі іске қосылатындықтан, гистерезис әсері [102, б. 207] жұмыста биологиялық модельге енгізілген. Мысалы, адамның жұқпалы ауруының таралу жағдайында, аурудың түріне байланысты, алдыңғы тәжірибе әлеуметтік қашықтық немесе қосымша гигиеналық әдеттер оның таралуын болдырмауға бағытталған қорғаныс әрекеті екенін көрсетуі мүмкін. Вакцина да ұзақ мерзімді есте сақтау әсеріне ие болуы мүмкін, егер ол ұзақ әсер етсе, денені иммундық жады арқылы қорғауға мәжбүр етеді. Бүтін емес бөлшек ретті есептеудің тиімділігін көрсету үшін эпидемиологияда кеңінен қолданылатын Sir (сезімтал-жұқтырған-қалпына келтірілген) бөлім моделі қарастырылады [104]. Қандай да бір елдерде COVID-19 таралу динамикасын зерттеу үшін компартменталды бөлім моделі қолданылады, бір нұсқасы жадымен, екіншісі жадсыз.

Экономикада бөлшек ретті интегралдық-дифференциалдық теңдеулерін қолдану күрделі процестерді, қаржы нарықтарындағы баға динамикасы, уақытты және басқа факторларды ескере отырып, экономикадағы деректерді, ресурстарды бөлу сияқты әртүрлі құбылыстарды модельдеуге, сондай-ақ нарықтағы агенттердің тұрпатын сызықтық емес өзара әрекеттесу немесе экономикалық көрсеткіштер болжамын сипаттауға байланысты. Мысалы, мұндай теңдеулерді тәуекелдерді талдау, қаржылық ресурстарды басқару стратегияларын әзірлеу және жүйедегі әртүрлі уақыттық кідірістер мен инерцияларды ескере отырып, экономиканың өсу динамикасы үшін пайдаланады [105]. Кейінгі кезде бөлшек интегралдық-дифференциалдық теңдеулер локалді емес кеңістіктік пен заң күшін жады бар экономикалық процестерді сипаттауда белсенді қолданылып жатыр. Негізгі экономикалық тұжырымдамалар мен есте сақтаумен байланысты экономикалық процестер туралы мәліметтерді жалпылау ұсынылуда. Үлкен жады бар бөлшек экономикалық динамиканы сипаттау үшін үздіксіз уақыты бар жаңа микро және макроэкономикалық модельдер беріледі [106-108].

Бұл мысалдар бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді, соның ішінде қазіргі ғылым мен техникада бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерін қолданудың әртүрлілігі мен маңыздылығын атап көрсетеді, бұл күрделі есептерді шешудің жаңа тәсілдерін жасау мүмкіндігіне ие.

Бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеулердің теориясы мен қолданылуын зерттеу теориялық тұрғыдан олардың шешімдерін талдау әдістерін зерттеуді, шешімнің бар және жалғыз болуын анықтауды, сәйкес дифференциалдық операторлардың спектралді сипаттамаларын зерттеуді қамтиды [109]. Мұндай теңдеулердің спектралді талдауы уақыт пен кеңістіктегі тұрақтылықты, толқындардың таралуын және диффузиялық процестерді түсіну үшін маңызды [110].

Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеуі үшін локалді және локалді емес есептердің шешілу мәселелері бойынша зерттеудің өзектілігі осы есептерді қолданудағы кең спектріне байланысты.

Мұндай теңдеулердің спектралді қасиеттері мен шешімділік шарттарын түсіну күрделі жүйелерді модельдеу мен талдаудың тиімді әдістерін жасауға жаңа мүмкіндіктер ашады.

Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерге арналған есептерді зерттеудің теориялық негіздері бірқатар негізгі аспектілерді қамтиды, соның ішінде осы теңдеулерді анықтаудың өзі, локалді және локалді емес есептер ұғымы және спектралді талдау негіздері. Бұл элементтер бөлшек ретті теңдеулерді шешудің қасиеттері мен әдістерін түсіну үшін негіз болып табылады.

Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерге арналған есептерді зерттеудің теориялық негіздері бірқатар негізгі аспектілерді қамтиды, соның ішінде осы теңдеулерді анықтаудың өзі, локалді және локалді емес есептер ұғымы және спектралді талдау негіздері. Бұл элементтер бөлшек ретті теңдеулерді шешудің қасиеттері мен әдістерін түсіну үшін негіз болып табылады.

Бөлшек ретті теңдеулерді зерттеу кезінде локалді және локалді емес есептер ажыратылады. Өздеріңіз білетіндей, локалді есептер кеңістіктің белгілі бір нүктелерінде немесе уақыт нүктелерінде анықталған шарттармен сипатталады, оған мысал, бастапқы және шекаралық шарттар. Керісінше, локалді емес есептерге кең ауқымдағы немесе тіпті бүкіл кеңістік-уақыттағы шешім мәндеріне тәуелді шарттар жатады [111-115]. Бұл жүйедегі өзара әрекеттесудің локалді емес сипатын көрсетеді, мысалы, жүйенің болашақ күйі өзінің тарихына тәуелді.

Спектралді талдау бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерді зерттеуде негізгі рөл атқарады, оған себеп бұл теңдеулердің шешімдерінің құрылымын, олардың тұрақтылығы мен ұзақ мерзімде тұрпатын перспективалы түрде зерттеуге мүмкіндік береді. Спектралді талдау бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулердің сызықтық нұсқаларын қарастыру кезінде пайда болатын операторлар спектрін зерттеуден тұрады. Оператор спектрі теңдеулердің шешімдерін құру үшін қолдануға болатын меншікті мәндерді және тиісті меншікті функцияларды қамтиды.

Бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеуі үшін локалді және локалді емес есептердің шешілу мәселелерін зерттеу кезінде бөлшек ретті теңдеуі үшін максимум принципіне ұқсас (шешімнің жалғыздығы), интегралдық және функционалдық операторлардың спектралді теориясы, интегралдық және функционалдық теңдеулер теориясы сияқты функционалдық талдау әдістері кеңінен қолданылады, локалді емес есептердің шешімінің бар екендігі мен жалғыздығын дәлелдеуде С. Л. Соболев кеңістігімен және басқа функционалды кеңістіктермен біріктірілген қысу карталары туралы Банах теоремасы қолданылады.

Бұл әдістер мен оларды қолдану мысалдары бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерді талдаудың тереңдігі мен күрделілігін көрсетеді. Мұндай мәселелердің шешімділігін зерттеу теориялық әзірлемелерді шешімдердің тұрпатын толық түсіну үшін сандық модельдеумен біріктіре отырып, кешенді тәсілді қажет етеді.

Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулердің спектралді қасиеттерін зерттеу теңдеулердің математикалық қасиеттері мен тұрақтылық, тербелмелі қасиеттер, шешімдердің ұзақ мерзімді тұрпатын және олар модельдейтін қалыптан тыс диффузияның болуы сияқты физикалық құбылыстар арасындағы терең байланыстарды ашады. Бұл қасиеттерді түсіну бөлшек дифференциалдық теңдеулердің қосымшаларында туындайтын есептерді талдаудың және шешудің тиімді әдістерін жасау үшін өте маңызды.

Бөлшек ретті теңдеулерді зерделеу кезінде негізгі қиындықтар аналитикалық шешімдерді алудың күрделілігі болып табылады, бұл бөлшек ретті операторлардың сызықтық емес және локалді емес, бөлшек ретті туындылардың локалді емес сипатына байланысты болуынан және сандық шешімдердің жоғары есептеу күрделілігіне әкеледі, әсіресе, көп өлшемді есептер мен айнымалы коэффициенттері бар есептер үшін. Сондай-ақ, туындылардың бөлшек реті мен модельденген процестердің физикалық қасиеттері арасындағы байланысты тереңірек зерттеу қажет. Бөлшек туындылар мен анықтамаларды қолдануда бірыңғай стандарттаудың болмауы әртүрлі зерттеулердің нәтижелерін салыстыру мен талдауды, сондай-ақ нәтижелерді практикалық қолданбаларға біріктіруді қиындатады.[116]

Әр түрлі бөлшек ретті теңдеулер үшін локалді және локалді емес есептердің шешімділік мәселелері [41, б.52]-[118-123] қарастырылған. Шекаралық есептердің шешімділік теориясында энергетикалық теңсіздіктер маңызды рөл атқарады. Қарастырылып отырған мәселе сызықтық оператор теңдеуі түрінде жазылады делік

 , (\*)

мұнда  операторы Банах кеңістігінде анықталған және  Гильберт кеңістігінде әрекет етеді. Энергетикалық теңсіздік кез-келген  функциясы және қандай да бір  тұрақты үшін  операторының  кеңістігінде тығыз анықталу облысында мына түрдегі теңсіздікті білдіреді

, (\*\*)

,  - сәйкесінше  және кеңістіктеріндегі нормаларының мәндері.

(\*\*) теңсіздіктен  кеңістігінде (\*) теңдеу үшін немесе (\*) тудыратын бастапқы сызықтық есептің шешімінің жалғыздығы (егер ол бар болса) бірден пайда болады.

Кез келген  үшін (\*) теңдеу шешімінің бар екендігін дәлелдеу үшін мен  мәндер жиындарының сәйкестігін көрсету керек. Әдетте, егер  операторының  анықталу облысы жеткілікті тегіс функциялар жиынтығын білдірсе де  теңдігі орындалмайды. Осыған байланысты операторын кеңейту жасалады. Әлсіз топологияда [124-128], әлді топологияда және басқаларында әртүрлі кеңейтулер бар. Тақырыбы бойынша біздің зерттеуімізге ұқсас, бұл идеялардың қарастырылып отырған нақты есептерге қолданылуының жүзеге асуы А.А.Дезин [129], К.Фридрихс [130], Ш.А.Алимов [131-132], Е.И.Моисеев [133], Т.Ш.Қалменов [134-135], М.О.Өтелбаев [136-137], А.И.Қожанов [138-139], В.И.Корзюк [140-142], В.В.Коврыжкина [143], В.П.Диденко [144], Н.Г.Сорокина [145], М.А.Садыбеков [146-147], Н.Ю.Капустин [148-154], М.Мұратбеков [ 155-156] және басқа математиктер еңбектері арналған. Аталған жұмыстар негізінен тәуелсіз екі айнымалы жағдайға және ең қарапайым цилиндрлік емес аймақтарға қатысты. Бұл қызығушылық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының дамуымен ғана емес, сонымен қатар уақыт өте өзгеретін салалардағы нақты физикалық және басқа процестерді модельдеу кезінде туындайтын мәселелерді зерттеумен байланысты. Дж.Л. Лионс пен Э. Маженестің кітабында [157] (341-бетті қараңыз, 13.7 есеп) цилиндрлік емес облыста эволюциялық типтегі теңдеулер үшін есептерді зерттеудің өзектілігі атап өтілгенін айта кету орынды.

Шекаралық есептер жағдайында бөлшек ретті теңдеулерге арналған, атап айтқанда, бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін есептерді әлсіз мағынада зерттеу кезінде жалпыланған және регулярлы шешімдер арасындағы қатынастарды анықтауда айтарлықтай қиындықтар туындайды, нәтижесінде, шешімнің жалғыздығының дәлелденуі болмай, есептерді біржақты зерттеу орын алады. Осыған орай, «Қандай жағдайда әлсіз шешім регулярлы шешім болады?», – деген сұрақ маңызды бола бастайды. Дәлірек қойылымда, (1) теңдеу үшін  шекаралық есептің жалпыланған шешімі регулярлы шешімдердің  тізбегімен жуықталуы мүмкін кезде, яғни қандай да бір метрикада  және  мағынада, әдетте,  нормасы бойынша болады. Соңғы қасиетке ие жалпыланған шешімдер әлді шнешімдер деп аталады. Әлді шешімдер ұғымы  кеңістігіндегі шекаралық есептерге сәйкес келетін дифференциалды операторлардың тұйықтауымен тығыз байланысты.

Екінші және үшінші ретті параболалық-гиперболалық типтегі аралас теңдеулер үшін бірқатар локалді және локалді емес есептердің шешімділік мәселелері (регулярлы және әлді шешім) және спектралді қасиеттері (вольтерлікі, меншікті мәндердің болуы, түбірлік функциялардың толықтығы мен базистігі) аралас композициялық типтегі теңдеулер үшін [158-164] зерттелген екенін ескереміз.

Спектралді қасиеттер, соның ішінде вольтеррлік және меншікті мәндердің болуы, біз білетіндей бөлшек дифференциалдық теңдеулер үшін салыстырмалы түрде аз зерттелген, ал бөлшек ретті диффузиялық толқындық теңдеу үшін зерттелмеген деуге де болады.

Осылайша, бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерге арналған локалді және локалді емес есептерді зерттеу келешекте теориялық жаңалықтар мен практикалық қосымшалар үшін кең перспективалар ашатын күрделі жүйелерді модельдеу мен талдаудың қуатты құралы болып табылады, бұл диссертация тақырыбының өзектілігін анықтайды.

**Жұмыс мақсаты** Диссертацияның негізгі мақсаты бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеуі үшін жаңа локалді және локалді емес шекаралық есептердің шешілу мәселелерін қою және зерттеу. Сипаттамалық және сипаттамалық емес шекаралары бар облыстарда тұжырымдалған есептердің регулярлы және әлді шешімдерінің бар болу шарттары мен жалғыздығын анықтау, сонымен қатар тиісті дифференциалдық операторлардың спектралді сипаттамаларын зерттеу. Бөлшек диффузиялық-толқындық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский типіндегі шарттары мен локалді шарттары бар есептер үшін меншікті мәндердің немесе вольтеррліктің болуы туралы бір мәнді шешілуін және теоремалардың дәлелдеуін қамтамасыз ететін осы есептердің шарттарын табу.

**Зерттеудің міндеттері** Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеуі үшін Бицадзе-Самарский типті локалді емес шарттары бар есеп үшін:

* бірмәнді шешімділік мәселелерін, сондай-ақ үш есептің вольтеррлігін анықтау және зерттеу, олардың айрықша ерекшеліктері::
* бірінші есеп жағдайында–аралас облыстың гиперболалық бөлігінде Бицадзе-Самарский шарты сипаттамалық шекарадағы ізделінді шешімнің жанама туындысының мәндерін қатаң түрде облыстың гиперболалық бөлігінде (сипаттамалық үшбұрышта) қандай да бір қисықтағы ізделінді функцияның сипаттамалық бағыты бойынша туындылармен нүктелей байланыстырады;
* екінші жағдайда–локалді емес шарт сипаттамалық шекарадағы ізделінді шешімнің жанама туындысының мәндерін қатаң түрде облыстың гиперболалық бөлігінде жатқан қандай да бір қисықтағы ізделінді функцияның басқа сипаттамалық бағытындағы туындылармен нүктелей байланыстырады;
* және үшінші жағдайда – классикалық емес шарт сипаттамалық шекарада және қатаң түрде облыстың гиперболалық бөлігінде қандай да бір қисықта ізделінді шешімнің жанама туындыларын нүктелей байланыстырады;
* шекаралары сипаттамалық және сипаттамалық емес облыстарда бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін локалді және локалді емес есептердің бірмәнді шешімділігін анықтау және спектралді қасиеттерін зерттеу. Меншікті мәндердің бар болуы немесе зерттелетін есептердің вольтеррлігі туралы есептер мен теоремалардың бірмәнді шешімділігінің дәлелі.

**Зерттеу нысаны.** Бөлшек ретті дифференциалдау операторлары бар аралас параболалық-гиперболалық теңдеулер болып табылады.

**Зерттеу пәні.** Бірмәнді шешімділік мәселелері мен спектралді қасиеттерді, оның ішінде гиперболалық бөлігі сипаттамалық үшбұрышпен сәйкес келеттін және айнымалыларды ажырату әдісін қолдануға жол бермейтін жазық облыстарда параболалық-гиперболалық (диффузиялық-толқындық) бөлшек ретті теңдеу үшін локалді және локалді емес есептердің меншікті мәндерінің бар болуы мен вольтеррлігін зерттеу.

**Зерттеу әдістері.** Зерттелетін локалді және локалді емес есептер (шешімділік мағынасында) интегралдық теңдеулерге немесе интегралды-функционалды теңдеулерге келтіріледі. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер теориясының әдістері, бөлшек дифференциалдық теңдеулер теориясы, гильберт кеңістігіндегі сызықтық операторлардың кеңею теориясы, функционалдық теңдеулер теориясы, энергия интегралдары және априорлық бағалау әдістері қолданылады.

Бөлшек ретті аралас диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді және локалді емес есептердің спектралді қасиеттерін зерттеуде Фурье әдісін (айнымалыларды ажырату) қолдануға жол бермейтін облыстарда сызықтық операторлардың спектралді теориясының әдістерін қолданылады, атап айтқанда интегралды операторлардың вольтерлікі критерийлері, операторлық теңдеулердің оң шешімдерінің теориясы. Бұл әдістер локалді және локалді емес есептерді талдау үшін Соболев кеңістіктерімен және басқа функционалды кеңістіктермен сабақтаса қолданылады.

**Жұмыстың ғылыми жаңашылдығы.** Диссертациялық жұмыс сипаттамалық және сипаттамалық емес шекарасы бар облыстардағы Капуто мағынасында бөлшек дифференциалдау операторларымен аралас параболалық-гиперболалық бөлшек ретті теңдеуі үшін локалді және локалді емес есептердің бір мәнді шешімділігі мен спектралді қасиеттерін (вольтерлікі) зерттеуге арналған.

* Бөлшек диффузиялық-толқындық теңдеу үшін есеп тұжырымдалды және зерттелді, мұнда аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарты сипаттамада және сипаттамалық үшбұрыштың ішінде жатқан кез-келген қисықта ізделінді шешімнің бірдей сипаттамалық бағыты бойынша туындылардың мәндерін нүктелей байланыстырады. Зерттеліп жатқан есептің регулярлы және әлді шешімділігі, сонымен қатар вольтеррлігі дәлелденді.
* Бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский шартымен берілген есептің баламасының қисындылығы дәлелденген, мұнда локалді емес шарт аралас облыстың гиперболалық бөлігіндегі шекарадағы сипаттамасы мен облыс ішінде жататын кез келген қисық арасында ізделінді функцияның әртүрлі сипаттама бағыттарымен алынған туындыларын байланыстырады. Бұл есептің алдыңғы есептен айырмашылығы, оның қисындылығы мен вольтеррлігі үшін координата басындағы локалді емес шарттағы «қысу» коэффициенті мәні мен облыстың ішінде жататын қисық пен абсцисса осі арасындағы полярлық бұрыш арасындағы арақатынастың маңыздылығы көрсетілген.
* Диффузиялық-толқындық теңдеудің классикалық емес есебі тұжырымдалған, оның айрықша ерекшелігі – аралас облыстың гиперболалық бөлігінде Бицадзе-Самарский шарты сипаттамалық шекарадағы және қатаң түрде облыстың ішінде жатқан кез-келген қисықтағы ізделінді шешімнің жанама туындыларын нүктелей байланыстырады. Бұл есептің бір мәнді шешімділігі мен вольтеррлігі облыстың геометриялық сипаттамаларына және координаталар басындағы локалді емес шартымен «қысу» коэффициентіне айтарлықтай тәуелді екендігі анықталды.
* Сипаттамадан ауытқуы бар облыстағы бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін екі локалді шекаралық есептердің бір мәнді регулярлы және әлді шешімділігі анықталды. Қарастырылып отырған есептердің меншікті мәндерінің бар болуы немесе вольтеррлігі туралы теоремалар дәлелденді. Айта кету керек, ең қызықтысы-бұл есептерде сипаттамалық шекара болмаған кезде, есептердің меншікті мәндерінің болуы немесе вольтеррлігі шекараның гиперболалық бөлігінің сипаттамалық емес қисығында берілген ізделінді функцияның туындысының бағытына байланысты.

**Зерттеудің теориялық және практикалық маңыздылығы.** Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулер теориясының дамуы күрделі жүйелердегі динамикалық процестерді терең түсінуге ықпал етеді, математикалық аппараттар мен локалді емес және сызықтық емес құбылыстарды талдау әдістерін байытады. Бөлшек дифференциалдық теңдеулердің қосымшалары физика, инженерия, биология және медицина саласындағы озық зерттеулер мен әзірлемелерді қамтиды, қалыпты емес диффузияға, күрделі динамикалық жүйелерге және ерекше қасиеттері бар материалдарға қатысты есептерді шешудің жаңа құралдарын ұсынады және бөлшек модельдерді әлеуметтік ғылымдар, экономика және психология сияқты жаңа салаларға қолдануды кеңейтеді, атап айтқанда жады және мұрагерлік қасиеттері бар процестерді модельдеу үшін пайдалы болуы мүмкін. Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерді зерттеу нәтижелерін жоғары оқу орындарының білім беру бағдарламаларына біріктіру ғылым мен инженерияның озық салаларында заманауи математикалық модельдермен және әдістермен жұмыс істей алатын жоғары білікті мамандарды даярлауға ықпал етеді.

**Қорғауға ұсынылатын қағидаттар.**

* Бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский типіндегі локалді және локалді емес шарттары бар есептердің бір класы үшін спектралді қасиеттер және бірмәнді шешімділік мәселелері зерттелді.
* Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеуі үшін Бицадзе-Самарский типіндегі локалді емес шарттары бар үш есептің бірмәнді шешімділігі мен вольтеррлік мәселелері тұжырымдалып, зерттелді. Есептің қисындылығы мен вольтеррлігі үшін локалді емес шарт коэффициенті мен облыс ішінде жатқан қисық пен абсцисса осі арасындағы полярлық бұрыш арасындағы арақатынастың маңызды екендігі көрсетілді.
* Сипаттамадан ауытқыған облыстарда бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеулер үшін локалді және локалді емес есептердің шешімділігі мен спектралді қасиеттері зерттелді.
* Облыстың сипаттамалық және сипаттамалық емес шекараларында қойылған есептердің регулярлы және әлді шешімділігі дәлелденді.
* Есептердің бірмәнді шешімділігі анықталды, меншікті мәндердің бар болуы немесе қарастырылған есептердің вольтеррлігі туралы теоремалар дәлелденді.

**Диссертациялық жұмыстың шынайылығы, ғылыми қағидалардың, қорытындылар мен нәтижелердің негізденуі** негізгі қағидаттар бұрын белгілі ғалымдар алған нәтижелер негізінде зерттеу жұмысында келтірілген егжей-тегжейлі дәлелдемелер арқылы алынғандығымен расталады; сондай-ақ жұмыс нәтижелерінің дұрыстығын олардың Web of Science Core Collection және Scopus халықаралық ғылыми-метрикалық базаларына кіретін жоғары рейтингті рецензияланған басылымдарда жариялануымен растауға болады.

**Диссертациялық жұмыстың басқа ғылыми-зерттеу жұмыстарымен байланысы.**

Диссертациялық жұмыс «Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті» КЕАҚ жанындағы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің 2021-2023 жылдарға арналған ғылыми және (немесе) ғылыми-техникалық жобалар бойынша жас ғалымдардың іргелі және қолданбалы ғылыми зерттеулерін гранттық қаржыландыру бағдарламасы аясында «Математикалық физиканың классикалық емес теңдеулері үшін отандық шекаралық есептердің қисындылығын зерттеу» тақырыбында орындалды (IRN № AP09058677).

**Жұмыс апробациясы.** Негізгі қағидаттар келесі ғылыми шараларда ұсынылды және баяндалды:

* Воронеж көктемгі математикалық мектебінің «Современные методы теории краевых задач» атты халықаралық конференциясы, Понтрягин оқулары – XXX (Воронеж қаласы, Ресей, 3-9 мамыр 2019 жыл);
* Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)» (Ташкент қаласы, Өзбекстан, 16-17 қыркүйек 2022 жыл);
* «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» атты халықаралық ғылыми конференциясы (Ташкент қаласы, Өзбекстан, 6-8 қазан, 2022 жыл);
* VII Түркі әлемінің бүкіләлемдік математиктер Конгресі (TWMS Congress-2023) (Түркістан қаласы, 20-23 қыркүйек, 2023 жыл);
* «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» атты халықаралық ғылыми конференция (Ташкент қаласы, Өзбекстан, 23-25 қараша, 2023 жыл).

Сонымен қатар, зерттеу нәтижелері ғылыми семинарларда баяндалды және талқыланды:

* Сантьяго де Компостела университетінің Галисия математикалық зерттеулер және технологиялар орталығының ғылыми семинары (жетекшісі – профессор Альберто Кабада, Сантьяго де Компостела қаласы, Испания, 21 маусым 2022 жыл);
* Гент унивеситетінің математика департаментінің ғылыми семинары (жетекшісі – профессор М.В. Ружанский, Гент қаласы, Бельгия, 20 наурыз 2023 жыл);
* Абай атындағы ҚазҰПУ, математика, физика және информатика институтының, математика және математикалық модельдеу кафедрасының ғылыми семинарлары (жетекшісі – ф.-м.ғ.д., профессор А.С. Бердышев, Алматы, Қазақстан).

**Ізденушінің жарияланымдары мен жеке үлесі.** Диссертациялық зерттеудің нәтижелері Web of Science және Scopus халықаралық ғылыми-метрикалық базаларына қатысты келесі жоғары рейтингті халықаралық ғылыми журналдарда жарияланды:

* Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Zh.D. Solvability and Volterra property of nonlocal problems for mixed fractional-order diffusion-wave equation // Boundary Value Problems. – 2023. – No. 47 (2023). – P. 1-29. (Percentile-84, IF -1,793, Quartile – Q1) DOI: 10.1186/s13661-023-01764-9;
* Adil N., Berdyshev A.S. Spectral properties of local and nonlocal problems for the diffusion-wave equation of fractional order // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2023. – №2 (110). – P. 4-20. (Percentile-35, IF -0,6, Quartile – Q3) DOI: 10.31489/2023M2/4-20;

және халықаралық конференциялар материалдарындағы бес тезис.

Есептің қойылмы ғылыми кеңесшілерге тиесілі. Негізгі теоремалар дәлелдемелері мен тұжырымдары диссертантқа тиесілі**.**

**Диссертацияның құрылымы және көлемі.** Диссертациялық жұмыс 95 бетте баяндалған, кіріспеден, әрқайсысы бөлімшелерден тұратын екі бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер (195 атау) тізімінен тұрады.

**Диссертацияның негізгі мазмұны.** Ұсынылған диссертацияның **кіріспесінде** зерттеу жұмысының бүгінгі күнгі өзектілігі мен жаңалығы келтірілген.

**Бірінші бөлім** үш бөлімшеден тұрады және тәуелсіз екі айнымалысы бар бөлшек ретті параболалық-гиперболалық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский шартымен берілген есептердің бір класын зерттеуге арналған.

Бірінші бөлімнің негізгі нәтижесі – бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеуі үшін локалді емес шарттары бар үш есептің вольтеррлігін дәлелдеуі.

[165] жұмысында бірқалыпты эллиптикалық теңдеу үшін жаңа есеп тұжырымдалды. Бұл есептің басқалардан айырмашылығы – ізделінді функция теңдеуді қанағаттандыруы қажет облыстың ішкі нүктелерінде ізделінді шешімнің шекаралық мәндері қайталанады. Осы жұмыстан кейін математикалық әдебиетте әртүрлі тұжырымдардағы теңдеулердің көптеген түрлеріне арналған Бицадзе-Самарский есептері типіндегі есептерге арналған бірқатар жұмыстар пайда болды.

Бицадзе-Самарский типті есептеріне арналған көптеген жұмыстарға қарамастан, математикалық әдебиеттерде сипаттамада және қатаң түрде сипаттамалық үшбұрыштың ішінде жатқан кез келген монотонды қисықта ізделінді шешімнің мәндерін байланыстыратын жағдаймен аралас типті теңдеуге арналған есептер жоқ.

Осыған байланысты нақты сұрақтар туындайды: бөлшек ретті аралас диффузиялық-гиперболалық теңдеуі үшін ұқсас есептерді тұжырымдауға бола ма? Мұндай есептердің арасында вольтеррлі есептер бар ма?

Бүтін ретті параболалық-гиперболалық теңдеу үшін шекаралық есептердің спектралді қасиеттері (оның ішінде вольтеррлігі) [151, 115 б.], [166-169] жұмыстарда зерттелген

Келесі теңдеуді  облысында қарастырайық

(1)

мұнда



, (2)

мұнда  – Эйлер гамма-функциясы, (2) –  бөлшек ретті Капуто мағынасындағы интегралды-дифференциалдық оператор [41, 14 б.],  облысында.  – төбелері  нүктелерінде болған, -тіктөртбұрыш, (1) теңдеудің  кесіндісімен және (1) теңдеудің  сипаттамаларымен шенелген облыс,  – берілген функция.

 тегіс қисық болсын, мұнда   егер  және , егер  болса, сипаттамалық үшбұрыш ішінде орналассын.

 қисығына қатысты, айталық,  болсын, ал – екі рет үздіксіз дифференциалданатын функция және -монотонды өспелі функциялар болсын.

арқылы  скаляр көбейтіндісі және  нормасы бар С.Л. Соболев кеңістігін,  – арқылы облысында квадраттық қосындыланатын функцияларды белгілейміз.

1.1 бөлімше диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін бірдей сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттары бар есепке арналған.

 облысында (1) теңдеу үшін локалді емес есеп қарастырылуда, аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарт сипаттамасындағы ізделінді шешімнің жанама туындысы мәні мен сипаттамалық үшбұрыштың ішіндегі кез-келген қисығындағы ізделінді функциясының

сипаттама бағыты бойынша туындысын нүктелей байланыстырады, сонымен қатар ұштары координаталар басы мен (нүктесінде) сипаттамасында орналасқан.

1. теңдеуі үшін  облысында келесі есеп тұжырымдалған:

**М1В Есебі.** Келесі шарттарды қанағаттандыратын (1) теңдеуі шешімін табу керек:

 (3)

 (4)

 (5)

мұнда   сипаттамасының (қисығы)   нүктесінен шығатын сипаттамасымен қиылысу нүктелерінің аффикстері,  ̶ берілген функция болып табылады.

 болған жағдайда,  есебі типтің өзгеруінің сипаттамалық емес сызығы бар аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін локалді емес есепке сәйкес келеді. Бұл жағдайда, регулярлы және әлді шешімділік мәселелері, және де  есебінің вольтерлігі [158, 59 б.] жұмыста зерттелген.

 функциясын  облысында  есебінің регулярлы шешімі деп атаймыз, мұнда



 облыстарында (3)-(4) шарттарын және (1) теңдеуін қанағаттандырады.

**Теорема 1.**  және  болсын. Онда кез-келген  функциялары үшін,  есебінің (1), (3)-(5) жалғыз регулярлы шешімі бар және мына түрде беріледі

 (6)

мұнда , және келесі теңсіздікті қанағаттандырады

 (7)

Осы бағалаудан келесі бағалаудың дұрыстығы шығады

. (8)

Егер әрбірі (3)-(5) шарттарын қанағаттандыратын  функциялар тізбегі үшін кезінде, төмендегі шектер

,

орынды болса, онда  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

**Теорема 2.** Теорема 1 шарттары орындалсын. Онда кез-келген функциясы үшін  есебінің  жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (6) түрінде бейнеленеді және бағалауды қанағаттандырады (8).

 арқылы біз (3)-(5) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (2) өрнегімен берілген бөлшек дифференциалдық оператордың  кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейміз.

Жоғарыда келтірілген  есебінің әлді шешімінің анықтамасына сәйкес,  болғанда ғана, –  есебінің әлді шешімі болып табылады, мұнда  – операторының анықталу облысы.

Теорема 2 ден  – операторы тұйық және оның анықталу облысы -да тығыз екендігі шығады; кері  операторы бар, барлық кеңістігінде анықталған және жете үздіксіз.

Осыған байланысты « операторының, сәйкесінше,  есебінің де меншікті мәні бар ма?» деген орынды сұрақ туындайды.

Негізгі нәтиже  операторының меншікті мәнінің жоқ екені туралы теорема болып табылады.

**Теорема 3.**  болсын. Онда келесі интегралды оператор

, (9)

мұнда , -да вольтерлі болып табылады.

**Салдар 1.**  есебі вольтерлі есеп болып табылады.

**Салдар 2.** Кез-келген комплекс  саны үшін келесі теңдеу



барлықбірмәнді шешімді.

1.2 бөлімше әртүрлі сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттары бар диффузиялық-гиперболалық теңдеуге арналған есептердің бір мәнді шешімділігі мен вольтеррлігі есептерін зерттеуге арналған. Мұнда (1) теңдеу үшін локалді емес есептер зерттеледі, ал гиперболалық бөлімде  сипаттамасында ізделінді шешімнің жанама туындысының мәндерін  облысында жатқан қандай да бір  қисығындағы шешімнің  сипаттамасының бағыты бойынша туындысының мәнімен  нүктесіндегі ұштары және  сипаттамасында ( нүктесінде) байланыстыратын шарттар берілген.

Бұл бөлімнің негізгі мақсаты –  есебінің қисындылығы мен вольтеррлігі үшін  есебімен салыстырғанда,  сипаттамасының бағыты бойынша туындының координата басындағы  «қысу» коэффициенті және қисығы мен абсцисса осі түзетін  полярлық бұрышы арасындағы байланыс өте маңызды екенін көрсету

**М2В Есебі.** Келесі шарттарды қанағаттандыратын (1) теңдеу шешімін табу керек.

 (10)

 (11)

мұнда  – сипаттамалық координаталардағы  қисығының теңдеуі  – берілген функция.

жағдайында, егер  нүктесі  сипаттамасында болса,  есебі қисынды емес (жете анықталмаған, [16] қараңыз); егер нүктесі  нүктесімен сәйкес келсе, онда  есебінің бірмәнді шешімділігі [170] жұмыста зерттелген. Аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін сипаттамадан ауытқуы бар облыстағы шекаралық есептердің вольтеррлігі және меншікті мәнінің болуы [163, 3 б.; 164, 7 б.] жұмыстарда анықталған.

Жоғарыда айтып кеткендей, егер  (1) теңдеуді  облыста және (10), (11) шарттарды қанағаттандыратын болса,  есебінің регулярлы шешімі деп  функциясын қабылдаймыз.

Бұдан ары қарай  функциясына қатысты барлық жерде  деп болжайтын боламыз.

**Теорема 4.** Келесі шарт орындалсын

  (12)

онда кез-келген функциясы үшін  есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар және ол (8) теңсіздікті қанағаттандырады және мына түрде беріледі:

 (13)

мұнда 

 есебі бірмәнді шешімділік мағынасында эквивалентті түрде интегралды-функционалды теңдеуге келтірілген.



 (14)

 арқылы біз (10)-(11) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (2) өрнегімен берілген бөлшек дифференциалдық оператордың  кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейміз.

Егер  және  болса,  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

**Теорема 5.** (12) шарт орындалсын. Онда кез-келген функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (8) теңсіздікті қанағаттандырады және (13) түрде берілуі мүмкін.

Жоғарыда айтылғандай,  арқылы  есебіне сәйкес дифференциалдық оператор белгіленген. Келесі теорема дұрыс.

**Теорема 6.** (12) шарт орындалсын. Онда  есебі вольтеррлі болады, басқаша айтқанда кез-келген  комплекс саны үшін



теңдеудің барлық  үшін шешімі бар және жалғыз,

1.3 бөлімшеде диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін локалді емес шарттары бар есептердің бірмәнді шешімділігі мен вольтеррлік мәселелері зерттеледі.

Мұнда (1) теңдеу үшін бір локалді емес есеп тұжырымдалады, оның айрықша ерекшелігі (жоғарыда қарастырылған есептерден) аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарт  сипаттамасында және  сипаттамалық үшбұрышының ішінде жатқан кез-келген  қисығында ізделінді шешімнің жанама туындыларын нүктелей байланыстырады.

**М3В Есебі**. (10) және (15) шарттарын қанағаттандыратын (1) теңдеу шешімін табу қажет.

 (15)

Егер , онда (15) шарт келесі шартқа эквивалент екенін айта кетейік



ол сипаттамадағы ізделінді шешімнің мәндерін облыстың ішінде орналасқан қандайда бір қисықтағы шешімнің мәнімен нүктелей байланыстырады.

Сипаттамада (жағдайда) ізделінді функцияның мәні берілген (1) теңдеу үшін шекаралық есептер көптеген авторлардың еңбектерінде қарастырылған [170 қараңыз].

Ал,  және жағдайында,  есебінен (1), (10), (15) типтің сипаттамалық емес өзгеру сызығы бар параболалық-гиперболалық теңдеу үшін жалпыланған Трикоми есебінің баламасы шығады (М есебі А.В.Бицадзе терминологиясы бойынша). Параболалық-гиперболалық теңдеу үшін М есебінің вольтерлігі мен әлді шешімділігі алғаш рет М.С.Салахитдинов пен А.С.Бердышев жұмыстарында дәлелденген [166, 303 б.; 167, 4 б.].

Егер  (10), (15) шарттарын және облыстарда (1) теңдеуін қанағаттандырса,  функциясын есебінің регулярлы шешімі деп атаймыз.

Егер (10), (15) шарттарын және  қанағаттандыратын, кеңістігінде  және  сәйкесінше  мен  -ке жинақталатындай  тізбегі бар болса,  функциясын есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

Келесі  есебінің регулярлы және әлді шешімділігі туралы теоремалар орындалады.

**Теорема 7.**  болсын және

 (16)

Онда кез-келген   есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар. Бұл шешім (8) теңсіздікті қанағаттандырады және келесі түрде беріледі

 (17)

мұнда 

**Теорема 8.** Теоремы 7 шарттары орындалсын. Онда кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (17) түрінде беріледі және (8) теңсіздікті қанағаттандырады.

Алдыңғыдай,  арқылы біз (10) және (15) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (2) өрнегімен берілген бөлшек дифференциалдық оператордың  кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейміз.  операторының  анықталу облысы  есебінің әлді шешімдерінен тұратыны анық. 8-теоремадан, (16) шарты бойынша  операторы қайтарымды, ал кері операторы бүкіл -де анықталған және (17) өрнек жете үзіліссіз. Сондықтан, егероператорының (есебі) спектрі бар болса, онда ол тек ақырлы еселі меншікті мәндерінен ғана тұра алады.

(16) шартты орындау кезінде есебінің (оператордың) меншікті мәндерінің жоқтығын растайтын келесі теорема дәлелденді.

**Теорема 9.** 7-теорема шарттары орындалсын. Онда



есебі операторының кері операторы вольтеррлі болады.

Осы теоремадан есебінің меншікті мәндерінің жоқ екендігі шығады.

Айта кетейік, (6), (13) және (17) өрнектерінде ,, функциялары берілген Вольтерр типіндегі интегралдық теңдеулерінің ядро резольвентасы және функциялар арқылы айқын түрде көрініске ие болады.

1-бөлімнің қорытындысында 2-ші және 3-ші бөлімшеде қаралған есептердің қисындылығы (вольтеррлік) үшін (12) және (16) шарттар маңызды екенін атап өтеміз. Төмендегі келтірілген мысалға назар аударсақ, (12) шарты бұзылған кезде,  есебінің шешімі жалғыз емес, яғни нөл  есебінің меншікті мәні болып табылады.

**Мысал.**   болсын. Онда (12) шарт келесі көрініске ие болады



мұнда , ал (14) теңдеу мына түрде жазылады:



 (18)

Келесі теңдеуді қарастырайық:

 (19)

болсын. Онда  және (19) теңдеудің  классынан келесі түрдегі тривиал емес шешімі бар екенін байқау қиын емес

 (20)

мұнда 

Шындығында,





Сондықтан, (20) түріндегі функция (19) теңдеу шешімі болып табылады.  шартынан , және  екені туындайды.

Онда, -операторы -де компакт оператор болғандықтан (18) теңдеудің де тривиалды емес шешімі бар.

**Екінші бөлім** бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеуі үшін екі шекаралық есептің спектралді қасиеттерін зерттеуге арналған. Бұл бөлімде бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді есептердің шешімділік мәселелері зерттеледі. Шекаралары сипаттамалық және сипаттамалық емес облыстарда қойылған есептердің регулярлы және әлді шешімділіктері дәлелденген. Есептердің бірмәнді шешімділігі орнатылады және қарастырылып отырған есептердің меншікті мәндерінің бар болуы немесе вольтеррлігі туралы теоремалар дәлелденеді.

Бөлшек реттік теңдеу бүтін реттік теңдеуді жалпылайтындықтан, сондай-ақ, осындай теңдеулер үшін жүйеленген аналитикалық және сандық әдістер салыстырмалы түрде аз қарастырылғандықтан, бұл бағытты дифференциалдық теңдеулердің жалпы теориясы басымдыққа ие.

Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің математикалық теориясы қарапайым теңдеулер үшін азды-көпті толық зерттелген [5, 163 б.], ал дербес туындылы теңдеулер үшін қарапайым дифференциалдық теңдеуден ерекшеленеді. Ғылыми әдебиеттерде негізінен бастапқы деректері бар есептің баламалары және бөлшек ретті дербес туындылары бар қарапайым теңдеулер үшін бастапқы-шекаралық есептер қарастырылды. Мұндай есептерді шешу әдістері [5, 186 б.], [41, 104 б.], [109, 115 б.], [171-177] жұмыстарда қарастырылған.

Әртүрлі бөлшек ретті теңдеулер үшін локалді және локалді емес есептердің шешімділік мәселелері мына жұмыстарда қарастырған [117, 3885 б.; 118, 136 б.; 119, 3270 б.; 120, 2 б.; 121, 2995 б.;122, 1238 б.].

Бөлшек ретті аралас теңдеу үшін спектралді қасиеттер, соның ішінде вольтеррлік және меншікті мәндердің бар болуы, біз білетініміздей, зерттелмеген дерлік.

Айта кетейік, екінші және үшінші реттік аралас параболалық-гиперболалық теңдеулер үшін локалді және локалді емес есептердің спектралі қасиеттері мен шешімділігі [158, 85 б.; 159, 214 б.; 160, 7 б.; 161, 419 б.; 162, 388 б.; 163, 2 б.; 164, 3 б.], [178] жұмыстарда зерттелген.

Келесі теңдеуді қарастырайық

 (21)

мұнда

 (22)



мұнда  – Эйлердің гамма-функциясы, (22) –  бөлшек ретті Капуто мағынасындағы интегралды-дифференциалды оператор [5, 92 б.],  – берілген функция.

2.1 бөлімшеде диффузиялық-толқындық теңдеулер үшін локалді есептердің вольтерлігі мен шешімділігі зерттеледі.

 болсын, мұнда  – төбелері    нүктелерінде орналасқан  тіктөртбұрышы,  –  кесіндісімен,  тегіс қисығымен, мұнда   және (1.1) теңдеудің , егер  болса және , егер  болса ( жағдайында) сипаттамасымен шектелген,  сипаттамалық үшбұрышының ішінде орналасқан облыс.

 қисығына қатысты, – екі рет үздіксіз дифференциалданатын функция және  – монотонды өспелі функциялар делік, сонымен қатар .

 **Есебі**. Төмендегі шарттарды қанағаттандыратын (21) теңдеу шешімін табу қажет:

 (23)

 (24)

. (25)

**Анықтама**.  функциясын  есебінің  облысында регулярлы шешімі деп атаймыз, егер  функциясы (23)-(25) шарттарды және (21) теңдеуді  облысында қанағаттандырса, мұнда



2.1 бөлімшенің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады.

**Теорема 10.**  есебінің (21), (23)-(25) кез-келген  функциясы үшін жалғыз регулярлы шешімі бар және ол

 (26)

түріне ие және келесі теңсіздікті қанағаттандырады:

 (27)

Мұнда

, (28)





мұнда       және  .



 – Райт типіндегі функция [41, 20 б.], ,

, ,

.

**Анықтама.** Егер (23)-(25) шарттарын қанағаттандыратын  функциялар тізбегі бар болса, және  кезінде төмендегілер орынды болса

,

онда  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

Келесі теорема дұрыс.

**Теорема 11.** Кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (26) түріне ие бола алады және (27) бағалауды қанағаттандырады.

 арқылы біз (23)-(25) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (22) өрнегімен берілген бөлшек дифференциалдық оператордың  кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейміз.

Жоғарыда келтірілген әлді шешімнің анықтамасы бойынша,  функциясы  есебінің әлді шешімі болады, сонда тек сонда ғана, егер , мұнда –операторының анықталу облысы.

11-теоремадан  операторы – тұйық және оның анықталу облысы  кеңістігінде тығыз екендігі шығады; кері операторы бар, ол бүкіл  анықталған және жете үздіксіз.

Осыған байланысты орынды сұрақ туындайды:  операторының, сәйкесінше,  есебінің меншікті мәндері бар ма? Негізгі нәтиже болып  операторының меншікті мәнінің жоқтығы туралы теорема табылады.

**Теорема 12.** Интегралды оператор

 , (29)

мұнда   кеңістігінде вольтеррлі.

**Салдар 3.**  есебі вольтеррлі болып табылады.

**Салдар 4.** Кез-келген комплекс  саны үшін



теңдеуі және барлық  бірмәнді шешімді,.

2.2 бөлімше сипаттамадан ауытқыған облыстарда диффузиялық-толқындық теңдеулер үшін локалді және локалді емес есептердің меншікті мәндерінің бар болуы және шешімділігіне арналған.

 облысында қарастырылған 2.1 бөлімшеде келесі есепті зерттейік:

 **Есебі**. Келесі шарттарды қанағаттандыратын (21) теңдеу шешімін табу қажет

 (30)

 (31)

**Анықтама**.  есебінің  облысында регулярлы шешімі деп облысында (21) теңдеуді және (30)-(31) шарттарын қанағаттандыратын  функциясын атаймыз, мұнда



**Анықтама.**  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз, егер (30), (31) шарттарын қанағаттандыратын, үшін

, 

орындалатындай , функциялар тізбегі табылса,

 есебінің регулярлы шешімділігі 2.1-бөлімшеде көрсетілген жолмен дәлелденеді.

**Теорема 13.**  есебінің кез-келген  үшін жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім мына түрде көрсетіледі

, (32)

мұнда , және (27) бағасын қанағаттандырады.

 арқылы -дан алынған функциялар жиынында (30)-(31) шарттарын қанағаттандыратын, (22) өрнегімен берілген,  кеңістігіндегі оператордың тұйықталуын белгілейміз.

**Теорема 14.**  болсын. Онда теңдеуі  тривиал емес шешімге ие болатындай  бар.

Бұл теореманы дәлелдеуде (32) қолданылады, В.Б. Лидский [179] ядролық оператордың матрицалық және спектралді іздерінің сәйкестігі туралы теоремалары және Гильберт-Шмидттің екі операторының көбейтіндісі ретінде ұсынылған ядролық оператордың ізін есептеу Гаал формуласы қолданылады [180].

**Салдар 5.**  есебінің меншікті мәні (кем дегенде бір) бар.

Қорытындылай келе, ең қызық факт –  және есептерінде, нүктесі  нүктесімен сәйкес келген жағдайда, есептің вольтеррлі болуы немесе меншікті мәнінің бар болуы ізделінді функцияның шекараның гиперболалық бөлігінің сипаттамалық емес қисықта берілген туындысының бағытынан тәуелді екендігін ескере кетейік.

**Қорытындыда** диссертация жазу барысындағы алынған негізгі нәтижелер мен қысқаша тұжырымдар көрсетілген.

Автор отандық ғылыми кеңесшісі – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор А.С. Бердышевке есептер қойғаны және диссертациялық жұмысқа тұрақты назар аударғаны үшін, шетелдік ғылыми кеңесшісі – жаратылыстану ғылымдарының докторы (PhD), профессор Михаил Владимирович Ружанскийге зерттеулерді орындау кезінде қолдау көрсеткені және құнды кеңестері үшін алғысын білдіреді.

# **I БӨЛШЕК РЕТТІ АРАЛАС ДИФФУЗИЯЛЫҚ-ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ЛОКАЛДІ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МЕН ВОЛЬТЕРРЛІГІ**

Бұл бөлім ең маңызды есептердің бірі – (бөлшек ретті) диффузиялық-толқындық теңдеу үшін үш локалді емес есептердің шешімділігі мен спектралді қасиеттерін (вольтерлікі) зерттеуге арналған. Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі параболалық-гиперболалық бөлшек ретті теңдеу үшін локалді емес шарттары бар үш есептің вольтеррлігінің дәлелденуі болып табылады.

## 1.1 Диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін бірдей сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттарымен берілген есеп

Келесі теңдеуді  облысында қарастырайық.

,

мұнда



 

мұнда  –Эйлердің гамма функциясы, (1.2) –  бөлшек ретті Капуто мағынасындағы интегралды-дифференциалды оператор [5, 92 б.]. Бұл жерде  – төбелері     нүктелерде болған  тіктөртбұрыш,  –  кесіндісімен және (1.1) теңдеудің  сипаттамаларымен шенелген облыс,  – берілген функция.

 тегіс қисық болсын, мұнда  егер  және  болса, егер  болса  сипаттамалық үшбұрышының ішінде орналасса.

 қисығына қатысты айталық,  – екі рет үздіксіз дифференциалданатын функция және -монотонды өспелі функциялар және  болсын.

 облысында (1.1) теңдеу үшін локалді емес есеп қарастырылуда, аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарт сипаттамасындағы ізделінді шешімнің жанама туындысының мәні мен сипаттамалық үшбұрыштың ішіндегі кез-келген қисығындағы ізделінді функциясының сипаттама бағыты бойынша туындысын нүктелей байланыстырады, сонымен қатар ұштары координаталар басы мен сипаттамасында (нүктесінде) орналасқан.

**М1B Есебі.** Келесі шарттарды қанағаттандыратын (1.1) теңдеуі шешімін табу қажет:







мұнда   сипаттамасының (қисығы)   нүктесінен шығатын сипаттамасымен қиылысу нүктесінің аффиксі,  ̶ берілген функция болып табылады.

 болған жағдайда,  есебі типтің өзгеруінің сипаттамалық емес сызығы бар аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін локалді емес есепке сәйкес келеді. Бұл жағдайда, регулярлы және әлді шешімділік мәселелері, сондай-ақ  есебінің вольтерлігі [158, 59 б.], [162, 391 б.], жұмыстарда зерттелген.

облысында келесі көмекші есепті қарастырайық

**С1 Есебі.**  үшін (1.3), (1.4) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеудің шешімін табу керек

,

мұнда  – берілген функция.

**Лемма 1.1**.  болсын. Онда кез-келген  үшін есебінің шешімін априорлық бағалауға болады.



мұнда

.

Осы жерде және ары қарай  символымен функциясынан тәуелсіз оң тұрақты белгіленеді, бірдей болуы міндетті емес.

**Лемма 1.1. дәлелдеуі.**  үшін (1.1) теңдеуін функциясына көбейтіп, 0 ден 1 ге дейін  бойынша интегралдаймыз және (1.3), (1.4) шарттарын ескере отырып, қандай да бір түрлендірулерден кейін мына теңдікті аламыз:



мұнда





[6] жұмыс бойынша белгілі

.

Соңғы теңсіздікке байланысты, (1.8)-ден (1.6) және (1.9)-(1.10) белгілердің ескерілуімен аламыз:



(1.11) теңсіздігін  бойынша 0 ден  ке дейін интегралдап,

,

және  ескере келе келесі теңсіздікті аламыз



Соңғыда оң жақ бөлігіне белгілі теңсіздіктерді қолданып алатынымыз:



(1.12) сол жақ бөлігінде, алғашқы екі мүшесін алыс тастап және Гронуолл-Беллман теңсіздігін қолданамыз, сонда келесі теңсіздікке қол жеткіземіз:

.

(1.12)-ден соңғысын ескере келесіні аламыз



Сол сияқты, жоғарыдағыдай, (1.13) сол жақ бөлігіндегі екінші мүшесін алып тастап және [177]-тегі 2-лемманы қолдана отырып мына теңсіздікті аламыз



Осы жерден,

,

ескере отырып, келесіге ие боламыз:



(1.12)-(1.14)-тен (1.7) априорлық бағалаудың дұрыстығы шығады. Лемма 1.1 дәлелденді.

Енді  облысында (1.1) теңдеуді қарастырамыз. Толқын теңдеуі үшін облысында (1.1), (1.9), (1.10) Коши есебінің бірмәнді шешімділігіне байланысты  есебінің кез-келген регулярлы шешімі келесі түрде көрсетіледі



мұнда .

Сипаттамалық  айнымалыларында  қисығының теңдеуі, функциясына қойылған шарттарға байланысты келесі түрге ие болады:

 причем 

(1.15)-те (1.5) шартын қанағаттандыратын қандай да бір қарапайым түрлендірулерден кейін

,

мұнда

.

(1.17) арақатынас  гиперболалық облыстан кесіндісіне әкелінген пен  арасындағы негізгі функционалдық қатынас болып табылады.

Алынған  өрнегін (1.18) ескере отырып (1.15)-ке қоямыз және қандай да бір түрлендірулерден кейін  облысында  шешімінің көрінісін аламыз.



(1.16),(1.18) ескере келе қандай да бір есептеулерден кейін келесі бағалаудың дұрыс екенін орнату қиын емес

,

Енді (1.7) ішінен  қабылдап (1.20) ескерсек келесі лемманың дұрыстығына көз жеткізу қиын емес.

**Лемма 1.2.**  және  болсын. Онда  есебінің шешімі кез-келген ,  функциясы үшін априорлық бағалау орындалады:



1.2-леммадан келесі бағалаудың дұрыстығы шығады

,

мұнда  ̶  облысында квадраттық қосындыланатын функциялар кеңістігі .

Келесі көмекші *С*2 есебін қарастырайық.  облысында (1.3), (1.4) және (1.9) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеу шешімін табу керек.

 облысында (1.3), (1.4) және (1.9) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеу шешімін [41, 122 б.] түрінде көрсетуге болады

,

мұнда



мұнда  – Райт типіндегі функция [41, 23 б.].

(1.23)  бойынша дифференциалдап келесіні аламыз



Белгілі формулаларды қолданып [41, 24 б.],



,

және қандай да бір есептеулерден кейін, (1.24)-тен



екенін анықтауға болады. Әрі қарай (1.26)-дан,  екенін ескере, және [41, 25 б.] формулаларын қолданып

, ,

төмендегіні аламыз.

,

енді (1.25)-тен  (1.27) ескере отырып, келесіні анықтаймыз.

,

.

(1.28)  облысынан  кесіндісіне әкелінген мен  арасындағы функционалдық қатынас болып табылатынын айта кетейік. (1.17) және (1.28) функционалдық қатынастардан,  қатысты  функциясын алып тастасақ, келесі теңдеуге қол жеткіземіз:

,

мұнда

.

**Лемма 1.3.** [41, 29 б.]  болсын.  және  функциялары үшін келесі бағалаулар орынды





1.3 лемманың дәлелдеуі мына теңсіздікті қолдана отырып жасалады



1.3 леммаға және (1.31)-дегі   ,   байланысты келесіні анықтау қиын емес:

.

Осылайша, (1.29) байланысты,  есебі (бірмәнді шешімділік мағынасында) эквивалентті түрде (1.30) әлсіз ерекшелігі бар екінші текті Вольтерр типіндегі интегралдық теңдеуге келтіріледі. Сол себепті (1.34)-ге байланысты,  классында (1.30) теңдеуінің жалғыз шешімі бар және келесі түрге ие:

,

мұнда – (1.30) интегралдық теңдеуінің резольвентасы.

,

.

(1.35)-тен ескере отырып

где

аламыз.

(1.18) және (1.31) ескере, (1.36)-ны (1.23)-ке қойып, қандай да бір түрлендірулерден кейін



аламыз, мұнда



мұнда  и .

Сол сияқты, (1.36)-ны (1.19)-ға қойып, (1.18) және (1.31) ескерілуімен, қандай да бір есептеулерден кейін алатынымыз

,

мұнда



.

(1.37) және (1.38)-ден келесіні аламыз





и 

функцияларының айқын түрлерін ескере отырып, (1.40)-та тек бірінші -ден басқа барлық қосылғыштары шектеулі екенін анықтауға болады, 1.3 леммаға сәйкес  қосылғышы шектелмеуі де мүмкін. Сол себепті

.

екенін көрсету жеткілікті. 1.3 леммаға сәйкес (1.32) бағалауынан тікелей есептеу арқылы аламыз:

.

Демек, .

**Лемма 1.4.** Егер  және  болса, онда  және



**Лемма 1.4 дәлелдеуі** Коши-Буняковскийдің белгілі теңсіздігін қолдану арқылы (1.18), (1.20), (1.31), (1.33) ескере отырып, тікелей есептеумен келтіріледі.

Сондықтан (1.35)-тен аламыз



(1.42) күшімен (1.19)-дан тікелей есептеу арқылы бағалауды анықтауға болады:



мұнда  – С.Л.Соболев кеңістігі. (1.21) және (1.43) формулаларынан аламыз



 есебінің  облысында регулярлы шешімі деп  облысында (1.3)-(1.5) шарттарын және (1.1) теңдеуін қанағаттандыратын  функциясын атаймыз, мұнда



Осылайша, жоғарыда келтірілген тұжырымдарды қорытындылай келе, біз келесі теореманы дәлелдедік.

**Теорема 1.1.**  және  болсын. Онда  есебінің (1.1), (1.3)-(1.5) кез-келген функциясы үшін жалғыз регулярлы шешімі бар, ол (1.39) түріне ие және (1.44) теңсіздікті қанағаттандырады.

(1.44) немесе (1.22) және (1.43)-тен келесі бағалаудың дұрыстығы шығады:



Егер (1.3)-(1.5) шарттарын қанағаттандыратын

,  үшін

орындалатындай  функциялар тізбегі бар болса,  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

**Теорема 1.2.** 1.1-теорема шарттары орындалсын. Онда кез-келген  функциясы үшін  есебінің  жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (1.39) түріндегі көрініске ие және (1.45) бағалауын қанағаттандырады.

**Дәлелдеуі.** Енді,  болғанда  есебінің шешімі әлді болатынын көрсетеміз.  кеңістігіндегі тығыздыққа байланысты

.

кез-келген  функциясы үшін  кезде  орындалатындай  тізбегі бар.

арқылы  есебінің (1.1), (1.3)-(1.5)  оң жағы бар шешімін белгілейміз.

Егер, онда  және екені (1.34)-тен шығады, мұнда

,

,

.

Онда (1.30) теңдеуін  кеңістігінде екінші ретті интегралдық теңдеу ретінде қарастыруға болады. Ол жалғыз шешімге ие .  күшімен, біз  аламыз. Сондықтан, (1.15) және (1.23) формулалары арқылы анықталған  функциясы (осы жерде және функцияларын сәйкесінше  және функцияларына алмастыру қажет)  классына тиісті.

Алайда, екінші жағынан, 1.4 леммаға байланысты , егер Сол себепті (1.30) теңдеуін  кеңістігінде екінші ретті Вольтерр интегралдық теңдеуі ретінде қарастыруға болады. (1.30) теңдеуі  кеңістігінде бірмәнді шешімді және , . Алдыңғыдай, (1.17) күшімен  аламыз.

Бұл жағдайда  функциясы (1.15) және (1.23) формулаларымен анықталған, кем дегенде  класына тиісті.

(1.41) күшімен (1.45) дұрыстығына көз жеткізу қиын емес.

Енді  кеңістігі толық болғандықтан жоғарыда құрылған 

тізбегі фундаменталды болады. (1.1) теңдеудің сызықтығы мен (1.45) бағалаудан



аламыз, яғни  тізбегі  кеңістігінде фундаменталды болады.  кеңістігінің толықтығын ескере отырып, біз  тізбегінің жалғыз  шегі бар екенін аламыз, ол  оң жағы бар  есебінің ізделінді әлді шешімі болып табылады.

Жоғарыда аталған фактілерді талдай келе,  есебінің әлді шешімі (1.39) түрге ие болатынын анықтау қиын емес. Теорема 1.2 дәлелденді.

Енді есебінің Вольтеррлігін көрсетеміз.

 арқылы (1.3)-(1.5) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (1.2) өрнегімен берілген  кеңістігіндегі бөлшек дифференциалдау операторының тұйықталуын белгілейміз.

Жоғарыда келтірілген  есебінің әлді шешімі анықтамасы бойынша,  –  есебінің әлді шешімі болады, сонда тек сонда ғана , егер  болса, мұнда  –  операторының анықталу облысы.

1.2 теоремадан  операторы – тұйық және оның  анықталу облысы  кеңістігінде тығыз;  кері операторы бар және барлық -де анықталған, жете үзіліссіз.

Осыған байланысты « операторының, сәйкесінше,  есебінің де меншікті мәні бар ма?» деген орынды сұрақ туындайды. Негізгі нәтиже  операторының меншікті мәнінің жоқтығы туралы теорема болып табылады.

**Теорема 1.3.**  болсын. Онда интегралды оператор

,

мұнда  функциясы  кеңістігінде вольтеррлі болып табылады.

**Дәлелдеу.** 1.3 теоремасын дәлелдеу үшін біз (1.46) формуласымен анықталған,  операторын жете үзіліссіз және квазинильпотентті екенін көрсетуіміз қажет. Бұл оператордың жете үзіліссіздігі -ден туындайтындықтан,  квазинильпотентті, демек



мұнда 

(1.46) тікелей есептеулерінен (1.37)-(1.40) ескере отырып

,

алу қиын емес, мұнда



.

**Лемма 1.5.**  итерацияланған ядролар үшін келесі бағалау орынды

,

,

мұнда ,  – (1.32) бағалауындағы коэффициент,

, егер .

, если .

1.5-леммасының дәлелдеуін  бойынша математикалық индукция әдісімен жүзеге асырамыз.

 болғанда теңсіздік



(1.32) бағасын ескере отырып (1.40) көрінісінен туындайды.

(1.49) теңсіздігі  үшін дұрыс болсын. Енді осы формуланың  үшін де дұрыс екенін дәлелдейміз.

(1.49) теңсіздігін қолдана отырып  және  үшін келесі өрнекті аламыз:









,

бұл 1.5 леммасын дәлелдейді.

(1.48) көрінісінен белгілі Шварц теңсіздігін және лемма 1.5 ретімен қолданып келесіге қол жеткіземіз.







Осы жерден



теңсіздігін аламыз.

Соңғыдан (1.47) теңдігін анықтау қиын емес. 1.3 теоремасы дәлелденді.

**Салдар 1.1.** есебі Вольтеррлі болып табылады.

**Салдар 1.2.** Кез-келген  комплекс саны үшін  теңдеуі барлық  үшін бірмәнді шешімді.

## 1.2 Әр түрлі сипаттамалық бағыттар бойынша туындылары бар локалді емес шарттары бар диффузиялық-гиперболалық теңдеуге арналған есеп

Бұл бөлім (1.1) теңдеу үшін әртүрлі сипаттамалық бағыттары бойынша туындылары бар локалді емес есепті зерттеуге арналған.

Негізгі мақсат – қарастырылып жатқанесебінің қисындылығы мен вольтеррлігі үшін,  есебімен салыстырғанда  сипаттамасының бағыты бойынша туындының координата басындағы  «қысу» коэффициенті және қисығы мен абсцисса осі түзетін  полярлық бұрышы арасындағы байланыс өте маңызды екенін көрсету.

**М2В Есебі.** (1.3), (1.4) және (1.50) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеуінің шешімін табу керек:



мұнда

 - 

сипаттамалық координаталардағы  қисығының теңдеуі  – берілген функция.

2 бөлімдегідей,  есебінің регулярлы шешімі деп (1.3), (1.4) және (1.50) шарттарын және  облысында (1.1) теңдеуді қанағаттандыратын  функциясын атаймыз.

**Теорема 1.4.**  және келесі шарт орындалсын



Онда кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар және (1.45) бағалауды қанағаттандырып, келесі түрде көрсетіледі



мұнда 

**Дәлелдеу.** Бұрынғыдай, , , ,  белгілеулерін қолдана отырып үшін  есебінің шешімін  облысында (1.15) Даламбер формуласымен көрсетеміз.

(1.15) формуласындағы (1.50) шартын қанағаттандыра отырып, келесіні аламыз



мұнда



(1.53) қатынасы  кесіндісіне  гиперболалық бөлігінен алып келген  және  арасындағы негізгі қатынас болып табылады.

Негізгі функционалдық қатынас және  арасындағы кесіндісіне параболалық бөлігінен әкелінген, (1.28) түрге ие.

Енді, (1.28) және (1.53) қатынасынан  функциясын алып тастай отырып  үшін интегралды-дифференциалды теңдеу аламыз.



мұнда





Осылайша,  есебі бірмәнді шешімділік мағынасында (1.55) интегралды-дифференциалды теңдеуіне эквивалентті түрде өзгерді.

Айта кетейік, ұқсас интегралды-дифференциалды теңдеулер [162, 388 б.], [158, 19 б.] жұмыстарда зерттелген.

Теңдеуді қарастырайық



Алдымен, кейін қажет болатын, келесі лемманы келтіріп алайық,

**Лемма 1.6** [162, 393 б.] Келесі теңсіздік орындалсын



Онда кез-келген  функциясы үшін (1.58) теңдеуінің  жалғыз шешімі бар және мына теңсіздікті қанағаттандырады



**Дәлелдеуі.** Лемма дәлелдеуі [162, 393 б.] жұмыста келтірілген. Оқуға ыңғайлы болуы үшін осы жерде қысқаша шолып өтеміз. Келесі формула бойынша жұмыс істейтін оператор қарастырайық





екені анық, мұнда  

(1.61) ескере отырып (1.58) теңдеуін мына түрде көрсетуге болады



мұнда  - тепе-теңдік операторы.



операторы формалды түрде  операторына кері оператор болып табылатынын анықтауға болады. Сол себепті  кеңістігінде  операторының шектелген екенін көрсетеміз.





орындалады. Әрі қарай,  алмастыруын жүргізіп, келесіні аламыз:





Сондықтан



мұнда



 және  үшін  болғандықтан,  үшін  тізбегі монотонды түрде нөлге ұмтылады. Осыдан



Демек, (1.59) байланысты сандық тізбегі жинақталады және



бұл  кеңістігінде операторы шектелгендігі мен (1.60) бағалауының дұрыс екенін көрсетеді. Осының өзі Лемма 1.6 дәлелдейді.

**Лемма 1.7.** Келесі шарт орындалсын

.

Онда, егер  және  болса, онда  классынан (1.58) теңдеудің жалғыз шешімі бар және .

**Дәлелдеуі.** (1.58) теңдеуді  класында қарастырайық. Егер  және , онда  екендігі анық.Сондықтан, (1.58) дифференциалдай келе,  үшін мына теңдеуді аламыз:



мұнда

, 

(1.58) теңдеуін біз  қарағанда тар класста қарастырып жатқан соң, (1.58) теңдеуінің шешімі, сондықтан, (1.63) теңдеуінің де шешімі жалғыз. Сонымен қоса,  классында  жете үзіліссіз екені де анық. Сол себепті (1.63) теңдеуінің  класында шешімділігі осы  класста үзіліссіз



операторының бар болуымен эквивалент.

 операторы бар,  классында шектелген және  екенін көруге болады, мұнда 

Әрі қарай, 1.6 леммасындағыдай, төмендегі теңсіздікті аламыз:



Демек,



 үшін  ескере отырып



аламыз. Демек,(1.62) байланысты,  сандық қатары жинақталады және



бұл  класында  операторының үзіліссіздігін көрсетеді.

Лемма 1.7 дәлелденді.

**Лемма 1.8.** Егер  және  , онда  және 

**Дәлелдеуі.**  функциясының айқын түрін 1.3 леммасына байланысты, (1.57) формуласымен анықталған  функциясы  класына тиісті және  екендігін анықтай аламыз. (1.54) формуласынан  функциясына жүктелген шарттарын ескере отырып,  және  анықталады. Осы жерден (1.56) байланысты 1.8 леммасының дәлелдеуі шығады.

Коши-Буняковскийдің белгілі теңсіздіктерін қолдана келе, (1.54), (1.56), (1.57) ескере отырып, (1.33) байланысты тікелей есептеулер арқылы келесі лемманың дұрыстығын анықтауға болады.

**Лемма 1.9.** Егер  және болса, онда  және 

**Лемма 1.10.** (1.59) шарты орындалсын. Онда кез-келген  функция үшін (1.55) теңдеудің жалғыз шешімі бар. Бұл шешім  класына тиісті және мына теңсіздікті қанағаттандырады:



**Дәлелдеуі.**  класында келесі формуламен әсер ететін  интегралдық оператор енгіземіз:

.

 – үзіліссіз функция болғандықтан,  –  классында жете үзіліссіз оператор екені анық.

(1.55) теңдеуінен (1.61) және (1.65) ескере отырып, операторлық жазба арқылы



өрнегін аламыз. 1.6 леммасына байланысты  шектелген операторы бар (1.66) теңдеуіне  операторын қолдана отырып, аламыз:



(1.67) теңдеуін тізбектеп жуықтау әдісімен шешеміз.  делік,



 үшін 1.6 леммасынан



туындайды, мұнда 

Тікелей есептеулермен келесі бағалаулардың дұрыстығын дәлелдеуге болады:





мұнда  

  белгілеулерін енгізейік Олай болса, (1.68) қолданып төмендегі қатынастарды аламыз:





Келесі бағалау орынды:



Дәлелдеуі (1.69)-(1.71) бағалауларынан және (1.72), (1.73) теңдеулерден шығады. Соңғыдан -де



қатарымен мажорантталатын



қатарының жинақтылығын аламыз.

Құрылған  функциясы (1.67) теңдеуін қанағаттандырады. Шынымен де, (1.72) және (1.73) реккурентті қатынастарын  бойынша 1 ден  дейін қосындылай келе



қосындысына қол жеткіземіз Бұл теңдікте (1.74) қатар жинақтылығынан,  және  операторларының шектелгендігін қолдана отырып,  үшін шекке өтіп (1.67) теңдеуін аламыз.

Енді (1.67) теңдеуінің шешімінің жалғыз екенін көрсетейік. Ол үшін сәйкес (1.67) біртекті теңдеуінің тек нөлдік шешімі бар екенін көрсету жеткілікті.  – (1.67) біртекті теңдеуінің шешімі болсын.

.

Нөлдік жуықтау ретінде   өзін ала отырып, (1.75)-ке тізбектеп жуықтау әдісін қолданамыз



 функциясы (1.75) теңдеу шешімі болғандықтан, (1.58) теңдеудің  бірмәнді шешімділігіне байланысты әрбір келесі жуықтауөзімен сәйкес келіп отырады.

Дәл солай тұжырымдай келе, яғни,  теңсіздігін алған сияқты қол жеткіземіз



 ескере отырып және осыдан  үшін шегіне көшіп, дәлелдеу қажет болған  екенін аламыз.

Айта кетелік, (1.74) қатардың  жинақтылығынан (1.64) бағалауының дұрыстығы туындайды, немесе одан нақтырақ



1.10 леммасы дәлелденді.

**Лемма 1.11.**  және  болсын. Онда, егер  – (1.55) теңдеуі шешімі болса, онда  және 

**Дәлелдеуі.** Егер  – (1.55) теңдеудің шешімі болса, онда  (1.58) теңдеуінің шешімі болатыны анық, мұнда

.

– әлсіз ерекшелігі бар оператор -ден -ге бейнелейтін оператор секілді жете үзіліссіз, ал  операторы -  шектелген оператор екенін ескере отырып, тікелей есептеумен  және  аламыз ((1.65) және (1.29) көріңіз). Әрі қарай, 1.7 леммасын қолдансақ 1.11 тұжырымдамасына ие боламыз.

**Лемма 1.12.** Лемма 1.7 шарттары орындалсын. Онда кез-келген  функциясы үшін (1.55) теңдеуінің жалғыз шешімі бар және , 

Бұл лемманың дәлелдеуі 1.10 және 1.11 леммаларынан туындайды.

1.12 леммасына байланысты (1.55) теңдеу жалғыз шешімге ие . (1.28)-ден және 1.8 леммасының (1.57) байланысты  аламыз.

Осылайша, егер  және , онда ,  Олай болса (1.15) және (1.23) формулаларына сәйкес  есебінің шешімі  класына тиісті болады.

Енді, 1.1 теоремасындағыдай әрекет ете отырып, 1.4 теоремасының барлық тұжырымдамаларын аламыз. ((1.45) бағалауы және (1.52) көрінісін қараңыз).

1.4-теоремасының дәлелдеуін аяқтау үшін, егер (1.59) шарты орындалса (1.6 лемма шарты бойынша), онда  болғандықтан (1.62) шарты да орындалатынын (1.7 лемма шарты бойынша) ескерейік.

(1.59) шарты (1.51) шартымен эквивалентті.

Шынымен де,  қисығының теңдеуінен сипаттамалық координаталарда



туындайды.

1.4 теоремасы дәлелденді.

 арқылы (1.3), (1.4) және (1.50) шарттарын қанағаттандыратын, -дағы функциялар жиынында (1.2) өрнегімен берілген,  оператор тұйықталуын белгілейміз.

Егер  және болса, онда  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

**Теорема 1.5.** (1.51) шарты орындалсын. Онда кез-келген функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (1.45) теңсіздігін қанағаттандырады және (1.52) түрінде беріледі.

**Дәлелдеу.** Бірден айта кетейік, 1.8-1.11 леммаларының нәтижелеріне байланысты және (1.15) пен (1.23) көріністеріне байланысты барлық  үшін (1.45) теңсіздігі орындалады.

(1.45) бағалауынан  есебінің әлді шешімінің жалғыздығы да туындайды.

 класында жиынның тығыз болуына байланысты

,

кез-келген  функциясы үшін ,  орындалатындай  тізбегі бар болады.

арқылы  оң жағы бар және ,  бастапқы шарттарымен берілген (1.1) теңдеу үшін *M*2*B* есебінің регулярлы шешімін белгілейміз. 1.12 леммасына байланысты    аламыз, сондықтан, (1.15) және (1.23) формулалары бойынша барлық  үшін  қол жеткіземіз.

 кеңістігінің толықтығына байланысты  тізбегі фундаменталды болады. (1.1) теңдеу сызықтылығынан және (1.45) бағалалауынан аламыз:



яғни  тізбегі  кеңістігінде фундаменталды болады.

кеңістігінің толтықтығын ескере отырып тізбегінің  жалғыз шегі бар екенін аламыз, ол  оң жағы бар (1.1) теңдеу үшін M2B есебінің ізделінді әлді шешімнің өзі болады.

Теорема 1.5 дәлелдеуін аяқтау үшін кез-келген функциясы үшін  есебінің шешімі (1.52) түріне ие болатынын көрсетеміз.

Төмендегі теңдіктен

,

және (1.65) ескере отырып, (1.67) теңдеуін мына түрде ұсынамыз



мұнда

,

,

мұнда  

екені анық. (1.76) теңдеу шешімін келесі түрде береміз



мұнда  – (1.76) интегралдық теңдеуінің (1.78) ядро резольвентасы.  екенін ескере отырып



мұнда 

Енді (1.15)-те немесе (1.19)-да (1.17), (1.18), (1.23), (1.54), (1.77) және (1.79) формулаларын ескере отырып, қажетті есептеулер жүргізген соң (1.52) аламыз. (1.52) формуласында







мұнда

















Бұл жерде ,  немесе ,  ,  сипаттамалық координаталардағы  қисығының теңдеуі , ,

























2 бөлімдегідей әрекет жасай отырып, келесіні анықтаймыз:



Теорема 1.5 дәлелденді.

 арқылы жоғарыда айтып кеткендей,  есебіне сәйкес операторды белгілейміз. Бұл бөлімнің негізгі нәтижесі келесі теорема болып табылады.

**Теорема 1.6.** (1.51) шарты орындалсын. Онда  есебі вольтеррлі болады, яғни кез-келген  комплекс саны үшін теңдеу шешімі



бар және жалғыз барлық .

**Дәлелдеу.** Теорема 1.5 күшіне байланысты  есебінің кері операторы ( операторы) бар, барлық  анықталған, келесі түрде беріледі



және жете үзіліссіз. Сол себепті теорема 1.6 дәлелдеуі үшін тек - кері операторының  квазинильпотентті екенін көрсету ғана қалды. Ол үшін А.Б. Нерсесян интегралды операторларының вольтеррлігі критериін пайдаланамыз. Бізге келесі анықтамалар қажет.

**Анықтама 1.1.** Егер  және ,  болғанда   – -ядросы деп аталсын**.**

**Анықтама 1.2.**  ашық жиыны  типті жиын деп аталсын, егер кез-келген -ядро меншікті мәндері жоқ болса.

Келесі белгілеулерді енгізейік:

 егер ,  егер .

**Теорема** [180, 1185 б.]  жиыны  типіндегі жиын болуы үшін, келесі шарттың кез-келген  үшін қажетті және жеткілікті



 болуы керек.

 байқау қиын емес (1.80), егер .

Біздің жағдайда, егер  болса,  ядросы  жиыны үшін,  қатынасы арқылы анықталатын -ядро болады.

.  нүктелер тізбегін қарастырайық.

Кез-келген  үшін . шарттары орындалсын. Онда  теңсіздіктер тізбегін аламыз. Бұл жерден  және, сәйкесінше, .

Демек, біздің  жиынымыз  типіндегі жиын болып табылады. Сондықтан  операторының меншікті мәні жоқ және, толық үзіліссіздікке байланысты вольтеррлі оператор болады. Осыдан 1.6 теоремасының тұжырымы туындайды.

Шынымен де,  операторының қайтымдылық күшіне байланысты, (1.81) теңдеудің бірмәнді шешімділігі екінші ретті Вольтерр типіндегі болып табылатын  теңдеудің бірмәнді шешімділігіне эквивалентті. Осының өзі 1.6 теоремасын дәлелдейді.

## 1.3 Диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін локалді емес шарттарымен берілген есеп

Соңғы бөлімшеде (1.1) теңдеу үшін бір локалді емес есеп тұжырымдалады, оның айрықша ерекшелігі (бұрын қарастырылған есептерден) аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарт  сипаттамасында және  сипаттамалық үшбұрышының ішінде жатқан қандай да бір қисығында ізделінді шешімнің жанама туындыларын нүктелей байланыстырады.

**M3B Есебі**. (1.3),(1.4) және (1.82) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеу шешімін табу керек



Айта кетелік, егер  болса, онда (1.82) шарты келесі шартқа эквивалентті



және қатаң түрде облыс ішінде жататын, қандай да бір қисық сипаттамасында ізделінді шешімнің мәндерін нүктелей байланыстырады.

 және ,  шартында, (1.1), (1.3), (1.4) және (1.82)  есебінен типтің сипаттамалық емес өзгеріс сызығымен параболалық-гиперболалық теңдеу үшін жалпыланған Трикоми есебінің баламасы шығады (М есебі А.В.Бицадзе терминологиясы бойынша). Параболалық-гиперболалық теңдеу үшін М есебінің вольтеррлігі мен әлді шешімділігі алғаш рет М.С.Салахитдинов пен А.С.Бердышев жұмыстарында дәлелденген [158, 57 б.].

Егер функциясы (1.3), (1.4), (1.82) шарттарын және облыстарда (1.1) теңдеуін қанағаттандырса,  функциясын  есебінің регулярлы шешімі деп атаймыз.

Егер (1.3), (1.4), (1.82) шарттарын және  қанағаттандыратындай,  және  -де, сәйкесінше,  және  функцияларына жинақталатындай  тізбегі бар болса,  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз.

 есебінің келесі регулярлы және әлді шешімділігі туралы теоремалар дұрыс.

**Теорема 1.8.**  және



болсын.

Онда кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар. Бұл шешім (1.45) теңсіздігін қанағаттандырады және келесі түрде көрсетіледі:



мұнда 

**Теорема 1.9.**  1.8 теоремасының шарттары орындалсын. Онда кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (1.45) теңсіздігін қанағаттандырады және (1.84) көрінісінде беріледі.

Бұрынғыдай,  арқылы (1.3), (1.4) және (1.82) шарттарын қанағаттандыратын, функциялар жиынында (1.2) өрнегімен берілген  кеңістігіндегі тұйықталуын белгілейміз.  операторының  анықталу облысы  есебінің әлді шешімдерінен тұрады. 1.9 теоремасынан (1.83) шартын ескере отырып,  операторы қайтымды,  кері операторы барлық  анықталған және (1.45) бағалау күшіне байланысты және (1.84) көрінісінен кейін жете үзіліссіз болып табылады. Сол себепті,  операторының ( есебінің) спектрі бар болса, онда ақырлы еселікті меншікті мәндерінен ғана тұрады.

Бұл бөлімнің мақсаты,  операторының ( есебінің) (1.83) шартын қанағаттандырғанда меншікті мәндерінің жоқтығы туралы келесі теореманың дәлелдеуі болып табылады.

**Теорема 1.10.** 1.8 теоремасының шарттары орындалсын. Онда  есебі операторының



кері операторы вольтеррлі болады.

Осы теоремадан  есебінің меншікті мәндерінің жоқтығы шығады.

(1.15) Даламбер формуласында (1.82) шартын қанағаттандыра отырып, алдыңғы бөлімдегідей белгілеулерді қолдансақ, келесі теңдеуді аламыз



мұнда



(1.85) қатынасы  кесіндісіне  аралас облыстың гиперболалық бөлігінен әкелінген,  және  арасындағы негізгі қатынас болып табылады.

(1.1) теңдеу үшін  шекаралық есебінің бірмәнді шешімділігіне байланысты ((1.3)-(1.4) және  шарттарымен), алдыңғы бөлімдегідей әрекет етсек,  кесіндісіне  аралас облыстың параболалық бөлігінен әкелінген  және  арасындағы (1.28) түріндегі негізгі функционалдық қатынасқа қол жеткіземіз.

(1.28) және (1.85)-тен  функциясын алып тастасақ,  үшін интегралды-дифференциалды теңдеуін аламыз



мұнда 

Енді (1.86) қол жеткізген соң 1.8-1.10 теоремаларының дәлелдеулері 1.3 бөлімшеге ұқсас түрде орындалады, сол себепті біз мұнда оларды келтірмейміз, бұл жағдайда (1.84)-де  ядросы келесі түрге ие болатынын көрсетеміз:





мұнда



,

, , , , , ,











Мұнда, алдыңғыдай,   немесе         сипаттамалық координаталардағы  қисығының теңдеуі,  (1.24) формуласымен анықталған,  квадратының ішіндегі диффузия теңдеуі үшін бірінші бастапқа-шекаралық есебінің (С2 есебі) Грин функциясының баламасы,  интегралдық теңдеу ядросының резольвентасы





 функциясы (1.29) формуласымен анықталады,

,











мұнда



 мен  функцияларының  мен  функцияларынан айырмашылығы,  және  өрнектерінде орнына  жазу керек.



















Қорытындылай келе, 1.2 және 1.3 бөлімшелерінде қарастырылған  және  есептерінің қисындылығы (вольтеррлігі) үшін (1.51) және (1.83) шарттары маңызды. (1.51) шарты бұзылғанда,  есебі шешімі жалғыз емес, яғни нөл  есебінің меншікті мәні болып табылады және [158, 107 б.] жұмысында осы жағдайға мысал келтірген.

# **II БӨЛШЕК РЕТТІ АРАЛАС ПАРАБОЛАЛЫҚ-ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЛОКАЛДІ ЕСЕПТЕРДІҢ СПЕКТРАЛДІ ҚАСИЕТТЕРІ**

Диссертациялық жұмыстың екінші бөлімінде бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді есептердің шешімділігі мен спектралді қасиеттері зерттеледі. Қойылған есептердің сипаттамалық шекаралары бар облыстарда регулярлы және әлді шешімділігі қалай дәлелденсе, сипаттамалық емес шекаралары бар облыстарда да тура солай дәлелденеді. Қарастырылып жатқан есептердің бірмәнді шешімділігі және меншікті мәнінің бар болуы немесе вольтеррлігі теоремалары анықталады.

**2.1 Диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді есептердің шешімділігі мен вольтеролігі**

 болсын, мұнда  төбелері    нүктелерде орналасқан  тіктөртбұрышы,  –  кесіндісімен, мұнда тегіс қисығымен (1.1) теңдеудің  сипаттамалық үшбұрыштың ішінде орналасқан  сипаттамасымен, егер  және , егер  ( жағдайында) шенелген облыс.

 қисығына қатысты,  – екі рет үздіксіз дифференциалданатын функция және  монотонды өспелі функциялар, сонымен қатар деп ұйғарайық.

 **Есебі**. Мына шарттарды қанағаттандыратын (1.1) теңдеу шешімін табу керек:







**Анықтама**.  облысында  есебінің регулярлы шешімі деп  функциясын айтамыз, мұнда



(2.1)-(2.3) шарттарын және (1.1) теңдеуін  облысында қанағаттандырады.

 облысында келесі көмекші есепті қарастырайық.

**Есебі.** (2.1), (2.2) және келесі шарттарын қанағаттандыратын  (1.1) теңдеу шешімін табу керек



мұнда  – берілген функция.

1.1 леммасының (1.7) априорлы бағалауы орындалсын деп ұйғарып,  облысында (1.1) теңдеуін қарастырамыз. Толқын теңдеуі үшін (1.1), (1.9), (1.10) Коши есебінің бірмәнді шешімділігіне байланысты  есебінің кез-келген регулярлы шешімі  облысында келесі түрге ие



мұнда .

 функциясына қойылған шарттардан,  сипаттамалық айнымалыларда  қисығының теңдеуі мына түрге ие:

 сонымен қатар 

(2.5) формуласында (2.3) шартын қанағаттандыра қандай да бір қарапайым түрлендірулерден кейін қатынасты аламыз:



(2.6) қатынас  және  арасында кесіндісіне  гиперболалық облыстан алып келген негізгі функционалдық қатынас болып табылады.

Алынған  өрнегін (2.5) қойып, қандай да бір түрлендірулерден кейін  облысында  шешімінің келесі түрін аламыз

.

Енді (1.7) формуласында  қабылдап келесі лемманың дұрыс екеніне көз жеткізуге болады.

**Лемма 2.1.** Кез-келген ,  функциясы үшін есебі шешімінің априорлық бағасын алуға болады



Лемма 2.1 ден келесі бағалау дұрыстығы шығады



мұнда  –  облысында квадраттық қосындыланатын функциялар кеңістігі.

Көмекші  есебін қарастырайық.  облысында (1.1) теңдеуінің (2.1), (2.2) және (1.9) шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

 облысында (1.1) теңдеуінің (2.1), (2.2) және (1.9) шарттарын қанағаттандыратын шешімін келесі түрде беруге болады [41, 26 б.].



мұнда



 – Райт типтес функция [41, 23 б.]. (2.10)  бойынша дифференциалдасақ



және белгілі формулаларды [41, 27 б.] қолдана отырып, кеейбір есептеулерден кейін, (2.11)-де  үшін шекке өтіп келесіні аламыз:



мұнда

.

(2.12)-(2.13) қатынастары  кесіндісіне  облысынан әкелінген және  арасындағы функционалдық қатынас болып табылатынын ескере кетейік. (2.6) және (2.12) функционалдық қатынастарынан  алып тастасақ,  қатысты келесі теңдеу аламыз



мұнда



**Лемма 2.2.** Егер, онда  және

.

Лемманың дәлелдеуі (2.15), (1.33) ескере отырып, Коши-Буняковскийдің белгілі теңсіздіктерін қолдану арқылы тікелей есептеулермен келтіріледі.

(1.35) формуласынан



аламыз. (2.7) формуласынан (2.17) байланысты тікелей есептеулер арқылы

,

мұндағы  – С.Л.Соболев кеңістігі. (2.8) және (2.18) формулаларынан келесі теңсіздікті аламыз:



Осылайша, жоғарыда келтірілген тұжырымдарды жинақтай келе, келесі теореманы дәлелдедік.

**Теорема 2.1.** Кез-келген  үшін (1.1), (2.1)-(2.3)  есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар және мына түрде беріледі



мұнда

,





мұнда  және , және (2.19) теңсіздігін қанағаттандырады.

(2.9) және (2.18) немесе (2.19) формулаларынан келесі бағалаудың дұрыстығы шығады



**Анықтама.** функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз, егер  функцияларының (2.1)-(2.3) шарттарын қанағаттандыратын,

, 

орындалатындай функциялар тізбегі бар болса.

**Теорема 2.2.** Кез-келген  функциясы үшін  есебінің  жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім (2.20) түрінде берілуі мүмкін және (2.22) бағалауын қанағаттандырады.

Бұл теореманың дәлелдеуі (2.20) шешімі мен (2.22) бағалауы бар болған жағдайда, [162, 391 б.; 163, 9 б.; 164, 11 б.] жұмыстарындағыдай дәлелденеді.

арқылы (2.1)-(2.3) шарттарын қанағаттандыратын, (1.2) өрнегімен функциялар жиынында берілген,  кеңістігіндегі бөлшек дифференциалдау операторының тұйықталуын белгілейміз.

 есебінің әлді шешімінің жоғарыда келтірілген анықтамасына сәйкес, – есебінің әлді шешімі болады, сонда тек сонда ғана, егер  болса, мұнда  –  операторының анықталу облысы.

2.2-теоремадан,  операторы – тұйық және оның анықталу облысы барлық -де тығыз;  кері операторы бар, барлық  анықталған және жете үзіліссіз.

Осыған орай орынды сұрақ пайда болады: «операторының меншікті мәні бар ма, сәйкесінше,  есебінің де?» Негізгі нәтиже ретінде  операторының меншікті мәндерінің жоқ болуы туралы теорема болып табылады.

**Теорема 2.3.** Интегралдық оператор



мұнда  функциясы  кеңістігінде вольтеррлі болып табылады.

**Дәлелдеу.** 2.3-теоремасын дәлдеуі үшін, (2.21) формуласымен анықталған  операторының жете үзіліссіз және квазинильпотентті екенін көрсету қажет. Бұл оператордың жете үзіліссіздігі шығады,  квазинильпотентті, яғни



мұнда 

(2.23) тікелей есептеулерінен кейін (2.21) ескере отырып келесіні алуға болады:

,

мұнда



**Лемма 2.3.**  итерацияланған ядролары үшін келесі баға орынды:



мұнда ,  – (1.32) бағалауының коэффициенті ,

, егер .

, егер .

2.3-леммасының дәлелдеуін  бойынша математикалық индукция әдісімен көрсетеміз.

 үшін теңсіздік



(2.21) көрінісінен (1.32) ескере отырып туындайды.

(2.26) формуласы  үшін дұрыс болсын. Осы формуланың дұрыс екенін дәлелдейік.

(2.26) теңсіздігін және  үшін қолдана келесіні аламыз









.

осының өзі 2.3-леммасын дәлелдейді.

Белгілі Шварц теңсіздігін тізбектей қолданып және (2.25) көрінісінен 2.3-леммасын қолдансақ мына өрнекті аламыз:







Осы жерден аламыз



Соңғыдан (2.24) теңдігін анықтау қиын емес. 2.3-теорема дәлелденді.

**Салдар 2.1.**  есебі вольтеррлі есеп болып табылады.

**Салдар 2.2.** Кез-келген  комплекс саны үшін



теңдеуі бірмәнді шешімді барлық  үшін.

Ал, енді  –  кесіндісімен, (1.1) теңдеуінің  сипаттамаларымен шектелген, және  тегіс қисығы , мұнда , егер  және , егер  болса  сипаттамалық үшбұрыш ішінде орналасқан.

 есебінің  облысындағы жалпылауы (1.1) теңдеу үшін келесі локалді емес есеп болып табылады, мұнда аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарт  сипаттамасындағы ізделінді шешімнің жанама туындысының мәндерін сипаттамасының бағыт бойынша туындыларымен  сипаттамалық үшбұрышының ішіндегі, ұштары координаталар басында және (нүктесінде) сипаттамасында жатқан кез-келген қисығында нүктелей байланыстырады.

**** **Есебі.** (2.1),(2.2) және (2.27) шарттарын қанағаттандыратын (1.1) теңдеу шешімін табу керек



мұнда  –  сипаттамасының ( қисығы) ,  нүктесінен шығатын сипаттамамен қиылысу нүктесінің аффиксі,  – берілген функция.

есебі, , жағдайында сипаттамалық емес типтің өзгеріс сызығы бар аралас параболалық-гиперболалық теңдеуі үшін локалді емес есебімен сәйкес келеді. Бұл жағдайда, регулярлы және әлді шешімділігі, және де есебінің вольтеррлігі [161, 419 б.; 162, 387 б.; 163, 7 б.; 164, 5 б.] жұмыстарында зерттелген. Айтайық,  есебі,  болғанда диффузиялық-толқындық теңдеу үшін Трикоми есебімен сәйкес келеді, ал  болса, онда  есебімен сәйкес келеді.

Дәл солай,  есебіндегідей,  есебінің регулярлы және әлді шешімі деген түсінік енгіземіз. 2.1-2.3-теоремаларын дәлелдеу әдістемелері келесі теореманы дәлелдеуде қолданылады.

**Теорема 2.4.**  және  болсын. Онда

а) кез-келген  функциясы үшін (1.1), (2.1), (2.2), (2.27)  есебінің жалғыз регулярлы шешімі бар және (2.20) түрінде беріледі де (2.19) теңсіздігін қанағаттандырады.

б) кез-келген  функциясы үшін  есебінің жалғыз әлді  шешімі бар. Бұл шешім (2.20) түрінде беріледі және (2.22) қанағаттандырады.

в)  есебі вольтеррлі есеп болып табылады.

* 1. **Диффузиялық-толқындық теңдеу үшін локалді және локалді емес есептердің меншікті мәндерінің шешімділігі және бар болуы**

 облысында қарастырылған 2бөлімшеде келесі есепті зерттейміз.

 **Есебі**. Мына шарттарды қанағаттандыратын (1.1) теңдеудің шешімін табу керек.

,

.

**Анықтама**.  облысында  есебінің регулярлы шешімі деп функциясын атаймыз, мұнда



 облысында (1.1) теңдеуді және (2.28)-(2.29) шарттарын қанағаттандырады.

**Анықтама.**  функциясын  есебінің әлді шешімі деп атаймыз, егер ,  функцияларының (2.28), (2.29) шарттарын қанағаттандыратын,  үшін ,  орындалатындай тізбегі бар болса.

2-бөлім сияқты  есебінің регулярлы шешімділігі дәлелденеді.

**Теорема 2.5.** Кез-келген  үшін  есебінің жалғыз әлді шешімі бар. Бұл шешім төмендегі түрге ие:



мұнда , және (2.22) бағалауын қанағаттандырады.

 есебіндегідей әрекет етіп,  облысындағы есебінің шешімін (2.5) түрінде іздейміз. (2.29) негізге алып (2.5) формуладан келесіні аламыз

,

мұнда ,, – сипаттамалық  айнымалылардағы  қисығының теңдеуі және  болғанда ,  және болғанда , .

Алынған  өрнегін (2.5) формуласына қойсақ, келесіні аламыз:



(2.31) формула,  гиперболалық бөлігінен  кесіндісіне әкелінген  және  арасындағы интегралды-дифференциалды қатынасты береді.

(2.12) және (2.31) ескере отырып,  есебі келесі екінші ретті Вольтеррдің интегралдық теңдеуіне эквивалент екенін анықтауға болады.



мұнда .

– әлсіз ерекшелігі бар ядро болғандықтан, (2.33) теңдеудің жалғыз әлді шешімі бар және келесі түрде болады

,

мұнда  – (2.34) теңдеуінің резольвентасы:

, .

(2.34) формуладан,  ескеріп, келесіні аламыз

,

мұнда

.

(2.35) формуласын, (2.10) және(2.32) қойып келесіні аламыз:





мұнда

.

(2.37) және (2.38) формулаларынан, (2.30) аламыз, ядро келесі түрде өрнектеледі:



(2.30), (2.37), (2.38) формулаларынан және диффузия теңдеуі үшін бірінші бастапқы-шекаралық есеп шешімінің қасиеттерінен [41, 174 б.] 2.2-теоремасындағыдай 2.5-теоремасының барлық тұжырымдары туындайды.

 арқылы (2.28), (2.29) шарттарын қанағаттандыратын,  функциялар жиынында (1.2) өрнегімен берілген,  кеңістігіндегі оператордың тұйықталуын белгілейміз.

**Теорема 2.6.**  болсын. Онда  теңдеуі тривиал емес  шешімге ие болатындай  бар.

**Дәлелдеу.** 2.5-теоремасы бойынша  қайтымды және  – (2.30) формуласымен анықталатын Гиьлберт-Шмидт операторы. Онда  –  кеңістігіндегі ядролық оператор. Сол себепті  операторы үшін В.Б. Лидский [179, 486 б.] матрицалық және спектралді із сәйкестігі туралы нәтижесін қолданамыз. Сонымен қатар, ядролық оператор үшін Гильберт-Шмидт екі оператор көбейтіндісі ретінде ұсынылған, ізді есептейтін Гаала формуласы [187, 1185 б.] орны маңызды. Гаал формуласын қолданып, матрицалық ізді есептейміз:

.

(2.39) және (2.40) ескере отырып, қандай да бір түрлендірулерден кейін алатынымыз:



.

 екенін көрсетеміз. Шынымен де, (2.36) және  ескерілуімен  орындалады, егер



функциясын келесі түрде көрсетеміз

.

Райт функциясының қасиеттерінен [41, 46 б.] , сол себепті соңғыдан (2.41) теңсіздігінің орындалатыны шығады.

,

сол себепті .

Осылайша, оң бағыт бойынша теріс емес және нөлге тепе-тең емес функциясының интегралы сияқты . Осыдан,  аламыз. Әрі қарай, [25, 13 б.] жұмыс нәтижелерін пайдалана отырып, алатынымыз

,

мұнда  – операторының меншікті мәндері. Бұл  екенін білдіреді, мұнда  – (1.1), (2.28) және (2.29) есебінің меншікті мәндері. Осыдан бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулер үшін  есебінің меншікті мәндерінің бар екендігі шығады. Теорема 2.6. дәлелденді.

Қорытындылай келе, ең қызықты факт – ол және есептерінде нүктесі  нүктесімен сәйкес келгенде, шекараның гиперболалық бөлігінде сипаттамалық емес қисығында берілген, есептердің вольтеррлігі немесе меншікті мәндерінің бар болуы ізделінді функцияның шекараның гиперболалық бөлігіндегі сипаттамалық емес қисықта берілген туындысының бағытынан тәуелді болғаны.

# **ҚОРЫТЫНДЫ**

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері екі бөлімде келтірілген.

Жұмыстың бірінші бөлімі екі тәуелсіз айнымалылы бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский шартымен берілген бір класстағы есептердің спектралды қасиеттерін және бірмәнді шешімділігін зерттеуге арналған.

Бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеу үшін бірқатар локалды емес есептердің регулярлы және әлді шешімділік мәселелері жіті қарастырылған. Келесі негізгі нәтижелер алынған: туынды реті (0;1) интервалына тиісті бөлшек ретті диффузиялық-гиперболалық теңдеу үшін қандай да бір сипаттамада ізделінді шешімнің жанама туындысының мәндерін сипаттамалардың бірінде сипаттамалық үшбұрыш ішінде жатқан қандай да бір қисықтағы әртүрлі бағыт бойынша туындылармен нүктелей байланыстыратын шарттарымен берілген үш есептің регулярлы және әлді шешімділігі, және де вольтеррлігі дәлелденген.

Диссертацияның бірінші бөлімінде келесі негізгі нәтижелер алынған:

* Бөлшек диффузиялық-толқындық теңдеу үшін аралас облыстың гиперболалық бөлігінде локалді емес шарты сипаттамада және сипаттамалық үшбұрыштың ішінде жатқан кез-келген қисықта ізделінді шешімнің бірдей сипаттамалық бағыты бойынша туындылардың мәндерін нүктелей байланыстыратын есеп тұжырымдалды және зерттелді. Зерттелінді есептің регулярлы және әлді шешімділігі, сонымен қатар вольтеррлігі дәлелденді.
* Бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін Бицадзе-Самарский шартымен берілген есептің баламасының қисындылығы дәлелденген, мұнда локалді емес шарт аралас облыстың гиперболалық бөлігіндегі шекарадағы сипаттамасы мен облыс ішінде жататын кез келген қисық арасында ізделінді функцияның әртүрлі сипаттама бағыттарымен алынған туындыларын байланыстырады. Бұл есептің алдыңғы есептен айырмашылығы – оның қисындылығы мен вольтеррлігі үшін координата басындағы локалді емес шарттағы «қысу» коэффициенті мәні мен облыстың ішінде жататын қисық пен абсцисса осі арасындағы полярлық бұрыш арасындағы арақатынастың маңыздылығы көрсетілген.
* Диффузиялық-толқындық теңдеудің классикалық емес есебі тұжырымдалған, оның айрықша ерекшелігі – аралас облыстың гиперболалық бөлігінде Бицадзе-Самарский шарты сипаттамалық шекарада ізделінді шешімнің жанама туындыларын және қатаң түрде облыстың ішінде жатқан кез-келген қисықты нүктелей байланыстырады. Бұл есептің бірмәнді шешімділігі мен вольтеррлігі үшін, алдыңғы есептен айырмашылығы, координаталар басындағы локалді емес шарттың «қысу» коэффициенті мен облыс ішінде жатқан қисық пен абсцисса осі түзетін полярлы бұрыш арасындағы арақатынас маңызды екені көрсетілген.
* облыстың геометриялық сипаттамаларына және локалді емес шартымен «қысу» коэффициентіне айтарлықтай тәуелді екендігі анықталды.

Екінші бөлімде бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеу үшін екі шекаралық есептің спектралді қасиеттері зерттелген. Қойылған есептердің сипаттамалық, сондай-ақ сипаттамалық емес шекаралы облыстардағы регулярлы және әлді шешімділіктері дәлелденген. Есептердің бірмәнді шешімділігі орнатылады және меншікті мәндерінің бар болуы туралы теоремалар немесе зерттелінді есептердің вольтеррлігі дәлелденеді.

* Сипаттамадан ауытқыған облыстағы бөлшек ретті аралас параболалық-гиперболалық теңдеу үшін екі локалді шекаралық есептердің бірмәнді регулярлы және әлді шешімділігі анықталды. Қарастырулы есептердің меншікті мәндерінің бар болуы немесе вольтеррлігі туралы теоремалар дәлелденді. Айта кету керек, ең қызықтысы – бұл есептерде сипаттамалық шекара болмаған кезде, есептердің меншікті мәндерінің болуы немесе вольтеррлігі шекараның гиперболалық бөлігінің сипаттамалық емес қисығында берілген ізделінді функцияның туындысының бағытына байланысты.

Алынған нәтижелер келешекте әр түрлі интегралдық-дифференциалдық операторлармен берілген бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді зерттеу теориясында пайдалы болуы мүмкін. Сондай-ақ, бөлшек есептеуді диффузия мен толқындық процестердің классикалық модельдеріне, сондай-ақ жаратылыстанудың басқа модельдеріне енгізу ғылым мен техниканың әртүрлі салаларында кеңінен қолданылады, бұл табиғатта және технологиялық жүйелерде болатын күрделі процестерді дәлірек модельдеуді қамтамасыз етеді. Аталған теңдеулер орталардың жадылары мен біртексіздігін, сондай-ақ олардың мүмкіндіктерінің едәуір кеңеюіне әкелетін, құбылыстардың кең класын жоғары дәлдікпен сипаттайтын қалыптан тыс таралу және диффузия үдерістерін ескеруге мүмкіндік береді. Бұл бөлшек ретті диффузиялық-толқындық теңдеулерін зерттеуді өзекті ғана емес, сонымен қатар ғылыми зерттеулердің перспективалық бағытына айналдырады.

Диссертациялық зерттеуді орындау барысында алынған нәтижелер 8 жұмыста жарияланды, оның ішінде 2 [188, 190] Clarivate Analytics компаниясының Journal Citation Reports мәліметтері бойынша бірінші және үшінші квартилдеріне кіретін және/немесе Scopus 84 және 35 дерекқорында citescore бойынша процентиль көрсеткіштері бар жоғары рейтингісі бар халықаралық журналдарда жарияланған, тиісінше 5 тезис [191-195] халықаралық конференциялар нәтижелерінің жинақтарында жарық көрді.

# **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ**

1. Davies E.B. Quantum Theory of Open Systems. London, UK, New York, NY, USA : Academic Press, 1976. – P. 179.
2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York, USA :Gordon and Breach, 1993. – P. 1006.
3. Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications.–New York, USA : Longman and J. Wiley, 1994. – P. 360.
4. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego, CA, USA: Academic Press, 1998. – P. 340.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 2006. – P. 540.
6. Diethelm, K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application‐Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin, Germany: Springer, 2010. – P. 247.
7. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 1: Basic Theory. Berlin, Germany, Boston, MA, USA: Walter de Gruyter GmbH, 2019. – 481p.
8. Kochubei A., Luchko Y. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Volume 2: Fractional Differential Equations.–Berlin, Germany, Boston, MA, USA: Walter de Gruyter GmbH, 2019. –P. 519.
9. Letnikov A.V. On the historical development of the theory of differentiation with arbitrary index// Math. Collect. Mat. Sb. – 1868. – Volume 3, №2. –P. 85–112.
10. Machado J.T., Kiryakova V., Mainardi F. Recent history of fractional calculus// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.– 2011. – Volume 16, Issue 3. – P. 1140–1153.
11. Machado J.A.T., Galhano A.M., Trujillo J.J. Science metrics on fractional calculus development since 1966 // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2013. – Volume16, № 2. – P. 479–500.
12. Machado J.A.T., Galhano A.M., Trujillo J.J. On development of fractional calculus during the last fifty years // Scientometrics, 2014. – Volume 98, № 1. – P. 577–582.
13. Machado J.A.T., Kiryakova V. The chronicles of fractional calculus//Fractional Calculus and Applied Analysis.–2017. – Volume 20. – P.307–336.
14. Tarasov V.E. Rules for fractional‐dynamic generalizations: Difficulties of constructing fractional dynamic models// Mathematics. – 2019. – Volume 7, № 6. – P. 554.
15. Tarasov V.E. No violation of the Leibniz rule. No fractional derivative // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2013. – Volume 18. – P. 2945–2948.
16. Ortigueira M.D., Machado, J.A.T. What is a fractional derivative?// Journal of Computational Physics. – 2015. – Volume 293. – P. 4–13.
17. Tarasov V.E. On chain rule for fractional derivatives// Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2016. – Volume 30. – P. 1–4.
18. Tarasov V.E. Leibniz rule and fractional derivatives of power functions.//Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. – 2016. – Volume 11. –P.1-4.
19. Tarasov V.E. No nonlocality. No fractional derivative//Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2018. – Volume 62, № 11. – P. 157–163.
20. Tarasov V.E. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Berlin, Germany, Boston, MA, USA: Application in Physics, Part A, Walter de Gruyter GmbH, 2019. – Volume 4. – P. 306.
21. Tarasov V.E. Handbook of Fractional Calculus with Applications. Berlin, Germany, Boston, MA, USA: Application in Physics, Part B, Walter de Gruyter GmbH, 2019.–Volume 5.– P. 319.
22. Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion‐wave equation // Applied Mathematics Letters. – 1996. – Volume 9. – P. 23–28.
23. Tarasov V.E. Fractional diffusion equations for open quantum systems//Nonlinear Dynamics.–2013. – Volume 71. – P. 663–670.
24. Schuster H.G. Deterministic Chaos. An Introduction, 2nd ed. Weinheim, Germany: Physic Verlag, 1988.– P. 270.
25. Tarasov V.E., Zaslavsky G.M. Fractional equations of kicked systems and discrete maps // Journal of physics A: mathematical and theoretical.– 2008.– Volume 41, № 43.
26. Tarasov V.E. Differential equations with fractional derivative and universal map with memory // Journal of Physics A: mathematical and theoretical. – 2009. – Volume 42.
27. Boltzmann L. Theory of elastic after effect // Sitz. Kais. Akad. Wissenhaft Wien Math. Nat.–1874. – volume 70, P. 275–306. (In German)
28. Boltzmann, L. Theory of elastic aftereffect // Ann. Der Phys. Und Chem. Erganz. VII . – 1876.–Volume 7, P. 624–654. (In German)
29. Tarasov V.E. Generalized memory: Fractional calculus approach // Fractal and Fractional.–2018.– Volume 2. – P.1-23.
30. Trujillo J.J., Rivero M., Bonilla B. On a Riemann‐Liouville generalized Taylor’s formula // Journal of Mathematical Analysis and Applications.– 1999. – Volume 231.– P. 255–265.
31. Tarasov V.E., Tarasova V.V. Criterion of existence of power‐law memory for economic processes // Entropy.– 2018. – Volume20, P. 414.
32. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag‐Leffler Functions, Related Topics and Applications. Berlin, Germany: Springer, 2014.– P. 443.
33. PengJ., Li K. A note on property of the Mittag‐Leffler function // Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2010.– Volume 370, №2.– P. 635–638.
34. Elagan S.K. On the invalidity of semigroup property for the Mittag‐Leffler function with two parameters // Journal of the Egyptian Mathematical Society.– 2016.–Volume 24. – P. 200–203.
35. Sadeghi A., Cardoso, J.R. Some notes on properties of the matrix Mittag‐Leffler function // Applied and Mathematical Computations. –2018.– Volume 338. – P. 733–738.
36. Lighthill M.J. An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1958. – P.79.
37. Gel’fand I.M., Shilov G.E. Generalized Functions, Volume I: Properties and Operations. Boston, MA, USA: Academic Press, 1964. Providence, RI, USA: American Mathematical Society, 2016. – P. 423.
38. Camargo RF, Oliveira EC. Cálculo fracionário, Livraria da Física, São Paulo.-2015.-P.163.
39. Srivastava H.M., Saxena R.K. Operators of fractional integration and their Applications// Applied and Mathematical Computations.– 2001.– Volume118, №1. – P. 1–52.
40. Pinto C, Tenreiro M.J.A. Fractional dynamics of computer virus propagation // Mathematical Problems in Engineering.– 2014. – Volume 2014.
41. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка.– Москва: Наука, 2005.– 199 с.
42. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: АртИшок, 2008. – 510 с.
43. Hilfer R., Luchko Y., Tomovski Z. Operational method for solution of the fractional differential equations with the generalized Riemann-Liouville fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis - DeGruyter.– 2009. –V.12, №.3.–P.299-318.
44. Подлубный И. Дробное дифференциальное исчисление и его приложения. Томск: Изд-во НТЛ, 1999.
45. Gorini V., Frigerio A., Verri M., Kossakowski A., Sudarshan E.C.G. Properties of quantum markovian master equations // Reports on Mathematical Physics.– 1978. – Volume 13. – P. 149–173.
46. Lindblad G. On the generators of quantum dynamical semigroups // Communications in Mathematical Physics.–1976.– Volume 48.– P. 119–130.
47. Lindblad G. Brownian motion of a quantum harmonic oscillator // Reports on Mathematical Physics.–1976.–Volume 10.– P. 393–406.
48. Ingarden R.S., Kossakowski A., Ohya M. Information Dynamics and Open Systems: Classical and Quantum Approach. Kluwer, New York, NY, USA: Springer Dordrecht, 1997.– P. 310.
49. Breuer H.‐P., Petruccione F. Theory of Open Quantum Systems, Oxford, UK: Oxford University Press, 2002. – P. 625.
50. Attal A., Joye A., Pillet C.A. (Eds.) Open Quantum Systems: The Markovian Approach. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2006. – P. 244.
51. Tarasov V.E. Quantum Mechanics of Non‐Hamiltonian and Dissipative Systems. Amsterdam, The Netherlands, London, UK : Elsevier, 2008,- P. 540.(<https://www.sciencedirect.com/bookseries/monograph‐series‐on‐nonlinear>)
52. Isar A., Sandulescu A., Scutaru H., Stefanescu E., Scheid W. Open quantum systems // International Journal of Modern Physics E.–1994.–Volume 3. – P.635–714.
53. Isar A., Sandulescu A., Scheid W. Phase space representation for open quantum systems with the Lindblad theory // International Journal of Modern Physics B, 1996. – Volume 10. – P. 2767–2779.
54. Sandulescu A., Scutaru H. Open quantum systems and the damping of collective models in deep inelastic collisions // Annals of Physics.– 1987.– Volume 173, P. 277–317.
55. Caputo M., Mainardi F. Linear models of dissipation in anelastic solids // Rivisto Del Nuovo Cimiento (Ser. II).–1971.– Volume 1, №2. – P. 161–198.
56. Caputo M., Mainardi F. A new dissipation model based on memory mechanism // Pure and Applied Geophysics.–1971.–Volume 91.– P.134–147.
57. Mainardi F. Fractional relaxation‐oscillation and fractional diffusion‐wave phenomena // Chaos Solitons Fractals.–1996.–Volume 7, issue 9.– P. 1461–1477.
58. Chruscinski D., Kossakowski A. From Markovian semigroup to non‐Markovian quantum evolution // Europhysics Letters.– 2012.–Volume 97, Issue 2.–P.1-8. doi:10.1209/0295‐5075/97/20005.
59. Vacchini B., Smirne A., Laine E.‐M., Piilo J., Breuer H.‐P. Markovianity and non‐Markovianity in quantum and classical systems // New Journal of Physics – 2011.–Volume 13.–P.1-15.
60. Breuer H.‐P. Foundations and measures of quantum non‐Markovianity // Journal of Physics B Atomic Molecular and Optical Physics – 2012. –Volume 45.–1-31.
61. Rivas A., Huelga S.F., Plenio M.B. Quantum non‐Markovianity: Characterization, quantification and detection // Reports on Progress in Physics – 2014. – Volume 77, №9. – P.1-52.
62. Breuer H.‐P., Laine E.‐M., Piilo J., Vacchini B. Non‐Markovian dynamics in open quantum systems // Reviews of Modern Physics. – 2016. – Volume 88. –P.1-26.
63. De Vega I., Alonso D. Dynamics of non‐Markovian open quantum systems // Reviews of Modern Physics. – 2017. – Volume 89. – P.1-63.
64. Tarasov V.E. Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer, 2010. – P. 516.
65. Tarasov V.E. Quantum dissipation from power‐law memory // Annals of Physics – 2012.– Volume 327, Issue 6.– P.1719–1729.
66. Tarasov V.E. Fractional quantum mechanics of open quantum systems. Chapter 11. In Handbook of Fractional Calculus with Applications, Applications in Physics, Part B. Berlin, Germany: Walter de Gruyter, 2019. – Volume 5.– P. 257–277.
67. Tarasov V.E. Fractional generalization of the quantum Markovian master equation // Theoretical and Mathematical Physics.– 2009.–Volume 158. – P.179–195.
68. Tarasov V.E. Fractional Dynamics of Open Quantum Systems. Chapter 19 // In Fractional Dynamics: Recent Advances, Klafter J., Lim S.C., Metzler R., Eds. Singapore :World Scientific.–2012, P. 447–480.
69. Tarasov V.E. Fractional diffusion equations for open quantum systems // Nonlinear Dynamics.–2013.– Volume 71.– P. 663–670.
70. Tarasov V.E., Tarasova V.V. Time‐dependent fractional dynamics with memory in quantum and economic physics // Annals Physics.– 2017. – Volume 383.– P. 579–599.
71. Tarasov V.E. Uncertainty relation for non‐Hamiltonian quantum systems // Journal of Mathematical Physics.– 2013.–Volume 54, issue 1.
72. Tarasov V.E. Path integral for quantum operations. // Journal of Physics A.–2004. ̶ Volume 37.– P. 3241–3257.
73. Tarasov V.E. Pure stationary states of open quantum systems // Physical Review E.–2002. ̶ Volume 66. ̶ P.1-7.
74. Tarasov V.E. Stationary states of dissipative quantum systems // Physical Letters A, 2002. ̶ Volume 299. ̶ P.173‐178,
75. Tarasov V.E. Quantum computer with mixed states and four‐valued logic // Journal of Physics A, 2002. ̶ Volume 35. ̶ P. 5207–5235,
76. Tarasov V.E. Relativistic non‐Hamiltonian mechanics // Annals Physics, 2010. ̶ Volume 325. ̶ P. 2103–2119.
77. Tarasov V.E. Fractional dynamics of relativistic particle // International Journal of Theoretical Physics, 2010. ̶ Volume 49. ̶ P. 293–303.
78. Tarasov V.E. Dirac particle with memory: Proper time non‐locality // Physical Letters A. ̶ 2020. ̶ Volume 384. ̶ P.1-20.
79. Tarasov V.E. The fractional oscillator as an open system // Central European Journal of Physics (Open Physics) . ̶ 2012. ̶ Volume 10. ̶ P. 382–389.
80. Tarasov V.E. Quantization of non‐Hamiltonian and dissipative systems // Physical Letters A. ̶ 2001. ̶ Volume 288. ̶ P. 173–182.
81. Tarasov V.E. Weyl quantization of fractional derivatives // Journal of Mathematical Physics. ̶ 2008. ̶ Volume 49. ̶ P.1-6.
82. Iomin A. Fractional‐time quantum dynamics // Physical Review E, 2009. ̶ Volume 80. ̶ P.1-4.
83. Iomin A. Fractional time quantum mechanics. // In Handbook of Fractional Calculus with Applications. Berlin, Germany: De Gruyter, Applications in Physics, Part B. ̶ P.299.
84. Tarasov V.E., Handbook of Fractional Calculus with Applications. Berlin, Germany: De Gruyter: Berlin, Germany, 2019. ̶ Volume 5. ̶ P. 299–315.
85. Iomin A., Mendez V., Horsthemke W. Comb model: Non‐Markovian versus Markovian // Fractal and Fractional. ̶ 2019. ̶ Volume 3. ̶ P.1-13.
86. Sagdeev R.Z., Usikov D.A., Zaslavsky G.M. Nonlinear Physics. From the Pendulum to Turbulence and Chaos. New York, USA: Harwood Academic, 1988. ̶ P. 675.
87. Zaslavsky G.M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. Oxford, UK : Oxford University Press, 2005. ̶ P. 432.
88. Chirikov B.V. A universal instability of many dimensional oscillator systems // Physics Reports. ̶ 1979. ̶ Volume 52. ̶ P. 263–379.
89. Collet P., Eckman, J.P. Iterated Maps on the Interval as Dynamical System. Basel, Switzerland: Birkhauser, 2009. ̶ P. 248.
90. Fulinski A., Kleczkowski A.S. Nonlinear maps with memory // Physica Scripta. ̶ 1987. ̶ Volume 35. ̶ P. 119–122.
91. Giona M. Dynamics and relaxation properties of complex systems with memory // Nonlinearity. ̶ 1991. ̶ Volume 4. ̶ P. 911–925.
92. Hartwich K., Fick E. Hopf bifurcations in the logistic map with oscillating memory // Physics Letters A. ̶ 1993. ̶ Volume 177. ̶ P. 305–310.
93. Gallas J.A.C. Simulating memory effects with discrete dynamical systems. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications. ̶ 1993. ̶ Volume 195 . ̶ P. 417–430.
94. Timo V., Markku K. Comparisons of uncoupled, film theoretical and exact solutions for binary droplet evaporation and condensationErratum // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. ̶ 1993. ̶ Volume 198. ̶ P. 339–339.
95. Stanislavsky A.A. Long‐term memory contribution as applied to the motion of discrete dynamical system // Chaos: Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2006. ̶ Volume 16, №4. ̶ P1-10.
96. Zhou O., Gao J., Wang Z., and Li K. Adaptive Variable Time Fractional Anisotropic Diffusion Filtering for Seismic Data Noise Attenuation // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. ̶ 2016, Volume 54,№ . 4. – P. 1905-1917.
97. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London, UK: Imperial College Press, 2010. – 368 P.
98. Ramadevi B, Kasi VR, Bingi K. Hybrid LSTM-Based Fractional-Order Neural Network for Jeju Island’s Wind Farm Power Forecasting // Fractal and Fractional.–2024.–Volume 8(3).–P.149.
99. Awadalla M., Alahmadi J., Cheneke K.R., Qureshi S. Fractional Optimal Control Model and Bifurcation Analysis of Human Syncytial Respiratory Virus Transmission Dynamics // Fractal and Fractional.–2024.–Volume 8.–P. 44.
100. Beisner BE, Haydon D, Cuddington KL. Hysteresis // in book Encylopedia of ecology, Elsevier reference collection in Earth systems and environmental sciences, 2008. – P.1930-1935.
101. Chen L, Ghanbarnejad F, Brockmann D. Fundamental properties of cooperative contagion processes // New Journal of Physics.– 2017.– Volume 19. – P.1-10.
102. Pimenov A et al. Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study // Mathematical Modelling of Natural Phenoma.– 2012.– Volume 7. – P. 204–226.
103. Yamana TK, Qiu X, Eltahir EAB. Hysteresis in simulations of malaria transmission // Advances in Water Resources.– 2017.– Volume 108.–P. 416–422.
104. Laécio Carvalho de Barros, Michele Martins Lopes, Francielle Santo Pedro, Estevão Esmi, José Paulo Carvalho dos Santos, Daniel Eduardo Sánchez. The memory effect on fractional calculus: an Application in the spread of COVID-19 // Computational and Applied Mathematics.–2021.– Volume 40.–P.1-24.
105. Tarasov V.E. Mathematical Economics: Application of Fractional Calculus, MDPI: Basel, Switzerland, Beijing, China, 2020.–P. 278.
106. Tarasov V.E., Tarasova V.V. Economic Dynamics with Memory: Fractional Calculus Approach, De Gruyter: Berlin, Germany, Boston, MA, USA, 2021, P. 602.
107. Tarasova, V.V., Tarasov V.E. Logistic map with memory from economic model. Chaos Solitons Fractals 2017, 95, 84–91,doi:10.1016/j.chaos.2016.12.012.
108. Tarasov V.E., Tarasova, V.V. Criterion of existence of power‐law memory for economic processes. Entropy 2018, 20, 414,doi:10.3390/e20060414.
109. Luchko Y. Maximum principle and its Application for the time-fractional diffusion equations // Fractional Calculus and Applied Analysis.– 2011.– Volume 14, № 1.– P.110-124.
110. Трусов П.В. Спектральный анализ и синтез систем автоматического управления. Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
111. Ruzhansky M., Tokmagambetov N.,Torebek B. T. On a non–local problem For a multi–term fractional diffusion-wave equation // Fractional Calculus and applied analysis, 2020. – Vol. 23, No.2.– P. 324–355.
112. Karimov E., Ruzhansky M., Tokmagambetov N. Cauchy type problems for fractional differential equations // Integral transforms and special functions.– 2021.–P. 47-64.
113. Ruzhansky M., Tokmagambetov N.,Torebek B. T. // Bitsadze–Samarskii type problem for the integro-differential diffusion–wave equation on the Heisenberg group, Integral Transforms and Special Functions.–2019.–Volume 31.–P.1-9.
114. Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with Caputo fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences.– 2017.–Volume 40.–P. 6468–6479.
115. Borikhanov M. B., Ruzhansky M., Torebek B. T. Qualitative properties of solutions to a nonlinear time-space fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Applied Analysis.– 2022.– P.1-32.
116. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения, Минск.: Наука и техника, 1987.– 688 с.
117. Berdyshev A.S., Cabada A, Kadirkulov B.J. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator // An Inter. J. Computers and Mathematics with Applications.–Elsevier, 2011.–Vol. 62, № 10.–P. 3884 – 3893.
118. Aitzhanov, S.E., Berdyshev, A.S., Bekenayeva, K.S. Solvability issues of a pseudo‐parabolic fractional order equation with a nonlinear boundary condition // Fractal and Fractional.–2021.–Volume 5(4) .–P. 134.
119. Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Real World Applications. – Elsevier.–2012. –Vol.75.–P.3268-3273.
120. Berdyshev A.S., Eshmatov B. E., Kadirkulov B.J. Boundary value problems for fourth-order mixed type equation with fractional derivative // EJDE.– Texas State University - San Marcos.– Volume 2016, № 36.– P. 1 - 11.
121. Karimov E.T., Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A. Unique solvability of a non-local problem for mixed-type equation with fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences.– 2017.– Volume 40, № 8.– P. 2994-2999.
122. Agarwal P., Berdyshev А., Karimov Е. Solvability of a non-local problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative // Results in Mathematics. Springer.– 2017.–Volume 71, № 3.–P. 1235-1257.
123. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж. Прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных с операторами дробного интегро-дифференцирования. Монография – Алматы: Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, 2017. – 203 с.
124. Архиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1966.–544 с.
125. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов. –Киев: Издательство «Наукова думка», 1965.–805 с.
126. Корзюк В.И. Метод энергетических неравенств и операторы осреднения. // Вестник Белорусcкого Университета. Серия физико- математических наук.–1996.– № 3.– С. 55-71.
127. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений – Москва: Наука.–1962.–396 с.
128. Кудрявцев Л.Д., Никольский С.М. Пространства дифференцируемых функции многих переменных и теоремы вложения. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Москва,1988. –Т. 26. –С. 5-149.
129. Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. Москва: Наука.–1980.–208 с.
130. Friedrichs K.О. Symmtric positive linear differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics.–1958.–Volume 11.–P. 333-418.
131. Алимов Ш.А. Об p L решениях одной краевой задачи // Узбекский математический журнал.– 1999, №1.– С. 3-9.
132. Алимов Ш.А. О гладкости средних значений функций с суммируемым спектральным разложением // Дифферен-циальные уравнения.– 2012. –Т.48, №4. – С.498-508.
133. Моисеев Е.И. Уравнение смешанного типа со спектральным параметром. Москва: Издательство МГУ, 1988. –150 с.
134. Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальных вольтерровой задачи для гиперболического уравнения. // Известия АН КазССР. Серия физико-математических наук.–1988. № 5.– С. 13-16.
135. Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для уравнения в частных производных гиперболического типа. Шымкент: КазХТИ.–1992.–328 с.
136. Бияров Б.Н., Отелбаев М.О. Описание нормальных расширений // Математические заметки.–1993. –Т.53, Вып.5.– С. 21-28.
137. Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.А. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева- Бицадзе. // Диффе-ренциальные уравнения.–1981. – Т.17, № 5. –С. 873-875.
138. Кожанов А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Издательство НГУ, 1990.–132 с.
139. Кожанов А.И. О разрешимости некоторых пространственно нелокальных краевых задач для нелинейных гиперболических уравнений второго порядка.//Математические заметки, 2011. – Т.90, №6. –С.254-296.
140. Корзюк В.И. Метод энергетических неравенств и операторы осреднения // Вестник Белорусского Университета. Серия физико- математических наук. 1996. – № 3. –С 55-71.
141. Корзюк В.И., Козловская И.С. Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных. //Дифференциальные уравнения. 2012. – Т. 48, № 5.– С. 700-709.
142. Корзюк В.И., Мандрик А.А. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором. //Дифференциальные уравнения.–2014. –Т.50, №4. – С.492-505.
143. Коврыжкин В.В. Гладкость решений обобщенной задачи Трикоми // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9, № 1. –С. 77-105.
144. Диденко В.П. Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми. //Украинский математический журнал.–1973. –Т. 25, № 1. –С. 14-24.
145. Сорокина Н.Г. О нормальной разрешимости задачи Трикоми для уравнения типа Лаврентьева- Бицадзе. //Украинский математический журнал.–1971.–Т.23, № 1 –С. 34-42.
146. Садыбеков М.А., Егисбаев Н.О. О сопряженной к обобщенной задаче Трикоми для уравнения Лаврентьева-Бицадзе. //Дифференциальные уравнения.–1992.–Т. 28, №1.–С.75-81.
147. Садыбеков М.А., Орынбасаров Е.М. Базисность системы корневых функций краевой задачи со смещением уравнения Лаврентьева- Бицадзе // Доклады АН России.–1992. –Т. 324, № 6.– С. 1152-1154.
148. Капустин Н.Ю. Оценка решения задачи Трикоми для системы уравнений параболо-гиперболического типа // Доклады АН СССР.–1982. –Т. 265, № 3. – С.524-525.
149. Капустин Н.Ю. Задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью. //Дифференциальные уравнения.–1988. –Т. 24, № 8.– С. 1379-1386.
150. Капустин Н.Ю. О p L -разрешимости краевых задач для уравнения смешанного типа. //Дифференциальные уравнения.–1989. –Т. 25, № 1.– С. 50-59.
151. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И. О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. 1997.– Т. 33, № 1.– С. 115–119.
152. Капустин Н.Ю. О спектральной задаче, возникающей при решении одной смешанной задачи для уравнения теплопроводности со смешанной производной в граничном условии. // Дифференциальные уравнения.–2012.– Т. 48, №5.– С. 694-700.
153. Капустин Н.Ю. О классической задаче с комплекснозначным коэффициентом и спектральным параметром в граничном условии. // Дифференциальные уравнения.–2012.– Т. 48, № 10.– С. 1361-1367.
154. Капустин Н.Ю. О равномерной сходимости спектральных разложений одной задачи для оператора Лапласа на квадрате со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения.– 2013.–Т.49, №10.– С.1261-1267.
155. Muratbekov M.B., Bayandiyev Ye.N. Existence and smoothness of solutions of a singular differential equation of hyperbolic type // Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, 2022. – №3(107) . –P.98-104.
156. Muratbekov M. B., Muratbekov M. M., Abylayeva A. M. On existence of the resolvent and discreteness of the spectrum of a class of differential operators of hyperbolic type // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.– 2013.–№ 64.– P.1-10.
157. Лионс Ж.Л., Мадженс Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.– Москва: Издательство «Мир», 1971.– 400 с.
158. Бердышев А.С., Краевые задачи и их спектральные свойства для уравнения смешанного параболо-гиперболического и смешанно-составного типов / Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, 2015. –224 с.
159. Berdyshev A.S. The Riesz basis property of the system of root functions of a nonlocal boundary value problem for a mixed-composite type equation // Siberian Mathematical Journal.–1997.–№38(2).–P. 213–219.
160. Berdyshev A.S. Basisness of system of root functions for boundary value problem with a displacement for parabolic-hyperbolic equations // Doklady Akademii Nauk.–1999.– № 366(1) .–P. 7–9.
161. Berdyshev A.S. The basis property of a system of root functions of a nonlocal problem for a third-order equation with a parabolic-hyperbolic operator // Differential Equations.–2000.– Volume 36(3).– P. 417–422.
162. Berdyshev A.S. The volterra property of some problems with the Bitsadze-Samarskii-type conditions for a mixed parabolic-hyperbolic equation // Siberian Mathematical Journal.–2005. –Volume 46(3) . –P. 386–395.
163. Berdyshev, A.S., Cabada, A., Karimov, E.T., Akhtaeva, N.S. 2a boundary problem with integral gluing condition for a mixed parabolic-hyperbolic equation // Boundary Value Problems.–2013.–Volume 2013(94).– P.1-14.
164. Berdyshev, A., Cabada, A., Karimov, E. On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics.–2020. – Volume 8(6), 1030. –P.1-13.
165. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. //ДАН СССР.-1969.-Т.185., №4.-С.739-740.
166. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения в области с отходом от характеристики. //Доклады АН России. -1992. –Т. 327, № 3. –С. 303-305.
167. Салахитдинов М.С., Бердышев А.С. О вольтерровсти краевой задачи с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения. //Узбекский математический журнал. -1993. № 3. –С. 6-13.
168. Бердышев А.С. О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе–Самарского для смешанного параболо–гиперболического уравнения. //Сибирский математический журнал. – 2005г. Т.46, №3. – С. 500-510.
169. Бердышев А.С. О локальных краевых задачах с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения. //Известия АН УзССР. Серия физико-математических наук. -1989. № 3. – С.14-18.
170. Бердышев А.С. Спектральные вопросы теории краевых задач для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Библиотека Института математики АН РУ. Ташкент. 1999г. 249с.
171. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M. Fractional diffusion in inhomogeneous media // Journal of Physics A .– 2005. – Volume 38.–P. 679–684.
172. Freed A., Diethelm K., Luchko Yu. Fractional-Order Viscoelasticity (FOV): Constitutive Development Using the Fractional Calculus, NASA’s Glenn Research Center, Hanover, 2002. – 138 P.
173. Gorenflo R., Mainardi F., Random walk models for space-fractional diffusion processes // Fract. Calc. Appl. Anal. 1.–1998.–P. 167–191
174. R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific, Singapore.– 2000.
175. Mainardi F., Tomirotti M. Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions // Ann. Geofisica 40 (1997) 1311–1328.
176. Metzler R., Klafter J., The random walk’s guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach // Phys. Rep.–2000.–Volume 339.–P. 1–77.
177. Alikhanov A.A. A priori estimates for solutions of boundary value problems for fractional-oreder equations // Differential Equations, 2010, Vol. 46, No.5,- P. 660–666.
178. Karimov E.T. Boundary value problems with integral transmitting conditions and inverse problems for integer and Fractional order differential equations. Information-resource centre of V.I.Romanovkiy Institute of Mathematics, Tashkent, 2020.
179. Лидский В.Б. Несамосопряжённые операторы, имеющие след. //Доклады АН СССР.–1959. –Т.125, №. 3. –P. 485-488.
180. Brislawn C. Kernels of trace class operators //Proc. Amer. Math. Soc. –1988. – Vol. 104, № 4. –P. 1181-1190.
181. Gorenflo R., Mainardi F. Some recent advances in theory and simulation of fractional diffusion processes // J. Comput. Appl. Math. –Elsevier, 2009. – v.229. -№ 2. -P.400-415.
182. Sakamoto K., Yamamoto M. Inverse source problem with a final overdetermination for a fractional diffusion equation // Math. Control Relat. Fields. -AIMS, 2011.-v.1.-P. 509-518.
183. Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.K. On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // Acta Mathematica Scientia, 2014, 34(6), стр. 1695–1706. doi: 10.1016/S0252-9602(14)60115-6.
184. Berdyshev, A.S., Cabada, A., Turmetov, B. On solvability of some boundary value problem for polyharmonic equation with boundary operator of a fractional order // Applied Mathematical Modelling, 2015, 39(15), стр. 4548–4569. doi: 10.1016/j.apm.2015.01.006.
185. Berdyshev, A.S., Aitzhanov, S.E., Zhumagul, G.O. Solvability of Pseudoparabolic Equations with Non-Linear Boundary Condition // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, 41(9), стр. 1772–1783. doi: 10.1134/S1995080220090061.
186. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера. //Доклады АН СССР.–1964. –Т. 155, № 5. –С. 1049-1051.
187. Brislawn C. Kernels of trace class operators //Proc. Amer. Math. Soc. –1988. – Vol. 104, № 4. –P. 1181-1190.
188. Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Zh.D. Solvability and Volterra property of nonlocal problems for mixed fractional-order diffusion-wave equation // Boundary Value Problems. – 2023. – No. 47 (2023). – P. 1-29. (Percentile-84, IF -1,793, Quartile – Q1) DOI: 10.1186/s13661-023-01764-9;
189. Adil N., Berdyshev A.S., Eshmatov B.E., Baishemirov Zh.D. Correction to: Solvability and Volterra property of nonlocal problems for mixed fractional-order diffusion-wave equation // Boundary Value Problems. – 2023. No. 73 (2023) (Percentile-84, IF – 1,793, Quartile – Q1) DOI: 10.1186/s13661-023-01735-0;
190. Adil N., Berdyshev A.S. Spectral properties of local and nonlocal problems for the diffusion-wave equation of fractional order // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. – 2023. – №2 (110). – P. 4-20. (Percentile-35, IF -0,6, Quartile – Q3) DOI: 10.31489/2023M2/4-20;
191. Бердышев А.С., Адил Н. О существовании собственных значений задачи с условиями Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения // Материалы Международной конференции «Современные методы теории краевых задач» воронежской весенней математической школы Понтрягинские чтения – XXX. 3-9 мая 2019 г., Воронеж. – С. 59-60.
192. Адил Н., Бердышев А.С., Эшматов Б.Э. Разрешимость нелокальной задачи для волнового уравнения дробного порядка // Тезисы докладов международной научной конференции «Uzbekistan-Malaysia International Conference «Computational Models and Technologies (CMT2022)». 16-17 сентября, 2022 г., Ташкент. – С. 148.
193. Адил Н., Бердышев А.С., Эшматов Б. Задача с нелокальными условиями с производными по одинаковым характеристическим направлением для диффузионно-гиперболического уравнения // Тезисы докладов международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». 6-8 октября, 2022г., Ташкент. – С. 65-66.
194. Адил Н., Бердышев А.С. Спектральные свойства задач с условиями Бицадзе-Самарского для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Тезисы докладов VII Всемирного Конгресса математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023). 20-23 сентября, 2023 г., Туркестан. – С. 156.
195. Адил Н., Бердышев А.С., Эшматов Б. Вопросы разрешимости и спектральные свойства нелокальных задач для диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Тезисы докладов международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Часть І. – 23-25 ноября, 2023 г., Ташкент. – С. 327-327.